

Dynamische Instabilität eines Bose-Einstein Kondensats in einem optischen Ringresonator

Dissertation

**der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard Karls Universität Tübingen
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)**

vorgelegt von

Dag Schmidt

aus Stuttgart-Bad Cannstatt

Tübingen

2016

Gedruckt mit Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Eberhard Karls Universität Tübingen.

Tag der mündlichen Qualifikation:

5. April 2016

Dekan:

Prof. Dr. Wolfgang Rosenstiel

1. Berichterstatter:

Prof. Dr. Claus Zimmermann

2. Berichterstatter:

Prof. Dr. József Fortágh

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	5
I. Technische Realisierung des Experiments	11
2. Apparativer Aufbau und Messzyklus	13
2.1. Funktionsprinzip einer magneto-optischen Falle	13
2.2. Magnetisches Fangen und evaporatives Kühlen von $^{87}\text{Rubidium}$. . .	15
2.3. Vakuumkomponenten	17
2.3.1. Ringresonator	20
2.4. Lasersystem	23
2.5. Experimenteller Zyklus	27
3. Neuer Versuchsaufbau	31
3.1. Ringresonator	31
3.2. Ioffe-Pritchard Falle	34
3.3. Optischer Aufbau	38
4. Anhang I	41
4.1. Ergänzendes zum neuen Ringresonator	41
4.2. Geometrie der verwendeten Ioffefalle	43
II. Theoretische Grundlagen und Messergebnisse	45
5. Atom-Licht Wechselwirkung	47
5.1. Dipolnäherung	47
5.2. Lichtkräfte	49
5.3. Der kollektive atomare Rückstoßlaser	52
6. Stabilitätsdiagramm eines Bose-Einstein Kondensats in einem Ringreso- nator	59
6.1. Quantenmechanisches Modell	61
6.2. Numerische Simulationen der CARL Gleichungen	64
6.2.1. Simulation mit vier dynamischen Variablen	66
6.3. Analytisches 3-Moden-Modell	68
6.4. Eigenwerte des 3-Moden-Modells unter Berücksichtigung des Feldzer- falls	72
6.5. Stabilitätsdiagramm mit thermischen Atomen	76
6.6. Qualitatives 3-Atom-Modell	77

7. Anhang II	85
7.1. Zur Berechnung der Dipol-Kopplungskonstanten von $^{87}\text{Rubidium}$ in einem Ringresonator	85
7.1.1. Effektives Dipolmoment	85
7.1.2. Vakuumfluktuationen einer Ring- und Stehwellenresonatormode	86
7.2. Herleitung der CARL Gleichungen	90
7.2.1. Mean field Näherung	93
7.3. Eigenwerte und Eigenvektoren des analytischen 3-Moden Modells . .	96
7.4. Abstände der Impulsmoden im Flugzeitbild	98
7.5. Vielteilchenphysik und zweite Quantisierung	99
7.5.1. Fermionen	100
7.5.2. Bosonen	102
7.5.3. Ein- und Mehrteilchenoperatoren in zweiter Quantisierung . .	103
7.5.4. Feldoperatoren	104
7.5.5. Feldgleichungen	105
8. Zusammenfassung und Ausblick	107
Literaturverzeichnis	109

1. Einleitung

Das Wesen des Lichts und insbesondere die Interaktion von Licht und Materie ist eine Thematik von der seit jeher eine große Faszination ausgeht. Von den frühen geometrischen Überlegungen von Platon und Euklid bis hin zur modernen Theorie der Quantenelektrodynamik hat sich daran bis heute nichts geändert. Vielmehr haben sich im Laufe der Zeit eine Fülle neuer faszinierender Aspekte offenbart.

Als Energieträger ist Licht eine grundlegende Voraussetzung für die Entstehung und Erhaltung fast aller uns heute bekannten Lebensformen¹. Ohne die Photosynthese wäre das Leben, wie wir es in der heutigen Vielfalt kennen, undenkbar. Und auch die Fähigkeit des Sehens basiert auf der Wechselwirkung von Licht und Materie, wobei der Lichtstreuung eine besondere Rolle zukommt: Erst sie ermöglicht die Betrachtung eines Objektes aus allen Raumrichtungen.

In der Geschichte der Physik hat der Energieaustausch von Licht mit seiner Umgebung zur Postulierung des Energiequantums² und letztlich zur Entwicklung der Quantenmechanik geführt, die nicht nur das physikalische Weltbild grundlegend verändert hat. Auch unser Alltag wird von Techniken begleitet, deren Funktionsweise auf quantenmechanischen Effekten beruht: Mikroelektronische Schaltungen, wie beispielsweise der Flash-Speicher, bei dem der quantenmechanische Tunneleffekt Anwendung findet, die Magnetresonanztomographie oder Atomuhren, die für die Navigation per GPS³ erforderlich sind, seien hier als stellvertretende Beispiele genannt. Aufgrund seiner großen Anwendungsvielfalt kommt auch dem Laser⁴ eine besondere Rolle zu: Diese reicht von der optischen Datenübertragung per Glasfaserkabel, über die Bearbeitung verschiedenster Materialien, bis hin zu medizinischen Eingriffen. Und auch im Bereich der Forschung ist der Laser ein unverzichtbares Werkzeug, insbesondere auf dem Gebiet der optischen Spektroskopie, die durch die Einführung des Lasers revolutioniert wurde. Nie zuvor stand eine kohärente Lichtquelle mit einer derartigen Frequenzgenauigkeit zur Verfügung. Erst Laserlicht ermöglicht die genaue Untersuchung der Struktur von Molekülen und Atomen und ist somit eines der wichtigsten Werkzeuge, um auf der atomaren Ebene quantenmechanische Effekte zu untersuchen.

Die Kontrollierbarkeit quantenmechanischer Systeme ist inzwischen derart fortgeschritten, dass sogar die Wechselwirkung einzelner Atome mit einzelnen Photonen nachgewiesen werden konnte [3]. Um die hierfür nötige Kopplungsstärke zwischen einem Atom und einem Photon zu erreichen, kommen meist Resonatoren mit ho-

¹Davon ausgenommen sind möglicherweise Lebensformen in der Tiefsee, deren Ökosystem auf dem Umsatz geothermischer Energie basiert.

²Das von Max Planck eingeführte Wirkungsquantum, das üblicherweise mit h bezeichnet wird, ermöglichte eine erste, befriedigende Erklärung der Hohlraumstrahlung [1]. $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Js.

³GPS: Global Positioning System.

⁴Das Akronym „Laser“ steht für: Light amplification by stimulated emission of radiation. Der erste Laser wurde von T. Maiman im Jahre 1960 realisiert [2].

her Finesse⁵ zum Einsatz. Diese ermöglichen eine lange Lebensdauer der Photonen in der Resonatormode, in der auch das Atom positioniert wird und erhöhen somit die Wechselwirkungswahrscheinlichkeit. Mit derartigen Experimenten, die unter dem Begriff „Resonator-Quantenelektrodynamik“ zusammengefasst werden, konnten unter anderem Effekte, wie die Verschränkung von Atomen untereinander, die Verschränkung von Atomen mit Photonen [4, 5] und das sogenannte Resonatorkühlen realisiert werden, bei dem die kinetische Energie eines Atoms kohärent an das Lichtfeld des Resonators transferiert wird⁶ [6–9]. Der Zerfall des Resonatorlichtfeldes transportiert die Energie letztlich an ein äußeres Reservoir. Sogar die Wechselwirkung einzelner Atome mit dem Vakuumfeld eines Resonators ist nachweisbar, ein Effekt, der mit dem Mitteln der klassischen Elektrodynamik nicht erklärt werden kann [10, 11].

An dieser Stelle sei neben dem Kühlen von Atomen in Resonatoren, noch der Prozess der Laserkühlung [12] und die magneto-optische Falle [13], aufgrund ihrer Relevanz in Bezug auf die vorliegende Arbeit, hervorgehoben (siehe Kapitel 2.1). Mit diesen Techniken ist es möglich bis zu 10^9 Atome innerhalb weniger Sekunden von Raumtemperaturen bis hin zu wenigen Mikrokkelvin oberhalb des absoluten Temperaturnullpunktes⁷ zu kühlen. Durch eine anschließende, rein magnetische Speicherung der Atome, eröffnet sich zudem die Möglichkeit einer präzisen Positionskontrolle der atomaren Wolke und zu weiteren Kühlmechanismen, wie dem sogenannten evaporativen Kühlen. Mit Hilfe dieser Kühlmethode wurde 1995 erstmals die Bose-Einstein Kondensation⁸ beobachtet [15–17]. In einem Bose-Einstein Kondensat besetzen alle bosonischen Atome denselben Grundzustand des magnetischen Fallenpotentials. Es handelt sich um einen makroskopischen, kohärenten Vielteilchen-Quantenzustand. Die de Broglie Wellenlänge⁹ der Atome liegt hierbei auf derselben Größenordnung wie die Ausdehnung des Kondensats. Kollektive Effekte, wie die Supraleitung, Suprafluidität, die Interferenzfähigkeit zweier Kondensate und die Möglichkeit der Erzeugung eines kohärenten, gepulsten Atomstrahls [18–21], sind nur einige faszinierende Aspekte dieses Quantenobjektes. Auch zur Untersuchung von Phasenübergängen eignen sich Bose-Einstein Kondensate in besonderer Weise. Der Übergang einer kalten atomaren Wolke zu einem Bose-Einstein Kondensat stellt bereits einen Phasenübergang dar¹⁰. Zudem konnte im Jahre 2001, mit Hilfe eines optischen Gitters, der Phasenübergang eines suprafluiden Kondensats in einen sogenannten „Mott-Isolator“ Zustand beobachtet werden [22]: Das durch überlagerte Laserstrahlen realisierte Gitter stellt ein periodisches Dipolpotential dar, indem sich die Atome anordnen können. Ist die Amplitude des Gitters gering, so zeigt sich in

⁵Je höher die Reflektivitäten der verwendeten Spiegel, desto höher ist die Finesse eines Resonators (siehe Gl. (3.2)).

⁶Dies steht im Gegensatz zum sogenannten Laserkühlen, das auf inkohärenter, spontaner Emission beruht.

⁷Dieser liegt bei $-273,15$ °C und ist der Nullpunkt der Kelvinskala.

⁸Bereits 1924 wurde die Kondensation von identischen Bosonen bei sehr niedrigen Temperaturen von S. Bose und A. Einstein vorhergesagt [14]. Für die ersten nachweisbaren Kondensate erhielten E. Cornell, C. Wieman und W. Ketterle 2001 den Nobelpreis für Physik.

⁹Die de Broglie Wellenlänge eines beliebigen Teilchens setzt sich aus dessen Impuls p und dem Wirkungsquantum h zusammen: $\lambda_{dB} = \frac{h}{p}$.

¹⁰Als Ordnungsparameter kann die Besetzung des Grundzustandes des Fallenpotentials verwendet werden.

der atomaren Dichteverteilung ein klares Interferenzmuster¹¹, das eindrucksvoll die Delokalisierung der Atome über mehrere Gitterplätze demonstriert¹² und somit die quantenmechanische Beschreibung des Kondensats als makroskopische Wellenfunktion rechtfertigt. Für große Gitteramplituden verschwindet das Interferenzmuster in der Dichteverteilung, da durch die starke Lokalisierung der Atome die kohärente Phasenbeziehung zwischen den Atomen nicht mehr vorhanden ist.

Ein weiteres, aktuelleres Beispiel in Bezug auf Phasenübergänge ist die Realisierung des „Dicke Quanten Phasenübergangs“ [23, 24]. Das sogenannte „Dicke Modell“ wurde von R. Dicke im Jahre 1954 veröffentlicht [25]. Es beschreibt die kollektive Interaktion einer Ansammlung von Atomen mit einer Lichtmode. Jedes einzelne Atom wird hierbei als Zweiniveausystem beschrieben. Fast 20 Jahre später konnte gezeigt werden, dass dieses System einen Phasenübergang durchlaufen kann, sofern eine starke, lichtinduzierte Kopplung¹³ zwischen den Atomen vorliegt [26, 27]. Die benötigte Kopplungsstärke kann jedoch drastisch reduziert werden, wenn man, statt den atomaren elektronischen Energieniveaus, die äußeren Freiheitsgrade der Atome nutzt¹⁴. Hierfür wurde ein Bose-Einstein Kondensat in einem Stehwellenresonator positioniert und senkrecht zur Resonatorachse mit einem retroreflektierten Laser beleuchtet. Ab einer kritischen Schwellleistung streuen die Atome Licht in den Resonator und bilden ein Interferenzmuster aus, das an ein Schachbrett erinnert. Die atomare Dichteverteilung ändert schlagartig ihren Zustand von einer anfänglich homogenen zu einer geordneten Struktur, was einen Phasenübergang des Systems darstellt. Erst die Kopplung des Kondensats an das Lichtfeld eines Stehwellenresonators ermöglichte in diesem Fall die Beobachtung des Phasenübergangs.

Die Wechselwirkung eines Bose-Einstein Kondensats mit dem Lichtfeld eines Ringresonators ist Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Der Ringresonator ermöglicht die definierte Interaktion des Kondensats mit zwei unabhängigen Lichtmoden, die den Resonator in entgegengesetzte Richtungen durchlaufen. Dieses System ist ideal für die Untersuchung fundamentaler, kollektiver Wechselwirkungseffekte zwischen Licht und Materie. Der Ringresonator ermöglicht die Wechselwirkung der Atome mit einer Laufwelle oder, im Falle einer beidseitigen Einkopplung des Pumplichts, mit einem Stehwellengitter, dessen absolute Position relativ zu den Spiegeln, jedoch nicht festgelegt ist¹⁵.

Bereits 1994 wurde ein Vorschlag von R. Bonifacio veröffentlicht, in dem die Wechselwirkung eines atomaren Ensembles mit zwei gegenläufigen Lichtmoden untersucht wurde [28]. Dabei kommt es zur Anordnung der Atome im eindimensionalen optischen Gitter und einer verstärkten Umstreuung von Licht zwischen den Moden, aufgrund derer dem System der Name „kollektiver atomarer Rückstoßlaser“¹⁶ gegeben wurde. Dieses instabile, selbstverstärkende Verhalten kann als atomares Analogon

¹¹Mit Hilfe von Absorptionsabbildungen kann ein „Schattenwurf“ der atomaren Dichteverteilung detektiert werden, siehe Kapitel 2.5.

¹²Einzelne Atome können mittels des Tunneleffektes den Gitterplatz wechseln.

¹³Die Kopplungsstärke, bzw. die damit verknüpfte Kopplungsenergie, muss vergleichbar mit dem energetischen Abstand des elektronischen Niveaus sein, damit eine „starke Kopplung“ vorliegt. Die entsprechenden Frequenzen liegen typischerweise im THz Bereich.

¹⁴Die, den auftretenden kinetischen Energien entsprechenden Frequenzen liegen im kHz Bereich.

¹⁵Während beim Stehwellenresonator die Randbedingungen durch die Spiegeloberflächen definiert sind, gilt beim Ringresonator lediglich eine periodische Randbedingung, die besagt, dass das Feld nach einem Umlauf wieder identisch mit sich selbst ist (siehe Kapitel 7.1.2).

¹⁶Oder kurz CARL, aus dem Englischen: „Collective Atomic Recoil Laser“. Bei jedem Streuprozess wird ein „Rückstoßimpuls“ auf ein Atom übertragen.

zum „Freie Elektronen Laser“ angesehen werden [29, 30].

Experimentell wurde der kollektive atomare Rückstoßlaser erstmals im Jahre 2003 an der Universität Tübingen mit kalten Atomen in einem einseitig gepumpten Ringresonator realisiert [31, 32]. Im Vorschlag von R. Bonifacio liegt bereits eine Vorstrukturierung der atomaren Dichteverteilung durch den Stehwellenanteil der gegenläufigen Lichtmoden vor. Die Experimente haben jedoch gezeigt, dass es auch in einem einseitig gepumpten Resonator zur selbstorganisierten Anordnung der Atome und einer erhöhten Umstreuung von der Pump- in die anfänglich unbesetzte Testmode kommt¹⁷. Dieser Effekt kann jedoch nur beobachtet werden, wenn zusätzliche Kühllaser eingestrahlt werden, die den Atomen kinetische Energie entziehen¹⁸. Das System erreicht so, dank der zusätzlich eingeführten dissipativen Kräfte, einen Gleichgewichtszustand mit konstanter atomarer Geschwindigkeit. Der Übergang einer anfänglich homogenen atomaren Dichteverteilung, in eine strukturierte Dichteverteilung, kann als Phasenübergang interpretiert werden [33], wie er auch im sogenannten Kuramoto Modell auftritt [34–36]. Dieses universelle Modell beschreibt das Verhalten von global gekoppelten Oszillatoren und findet, neben physikalischen Systemen, auch Anwendung in der Biologie und sogar in der Beschreibung gruppenspezifischer Prozesse¹⁹.

Nachfolgende Experimente wurden mit immer kälteren Atomen bzw. Bose-Einstein Kondensaten durchgeführt. Bei diesen Experimenten konnte die CARL Dynamik auch ohne zusätzliche Kühllaser beobachtet werden. Insbesondere konnte eine Verknüpfung des kollektiven atomaren Rückstoßlasers mit superradianter Rayleighstreuung hergestellt werden [37–39].

Der Effekt der superradianten Streuung²⁰ von Licht an einem Bose-Einstein Kondensat konnte bereits 1999 nachgewiesen werden [40]. Hierbei wird ein Kondensat mit einem Laserpuls bestrahlt und es bildet sich ein atomares Dichtegitter aufgrund der Interferenz einzelner Impulszustände aus, aber nur, wenn die Temperatur der Atome unterhalb der Rückstoßtemperatur²¹ liegt. Ist die Temperatur höher, so wird die Kohärenz der einzelnen Impulszustände durch thermische Diffusion zerstört.

Befindet sich das Kondensat bzw. die thermische Wolke jedoch in einem Resonator, so kann der Effekt der superradianten Rayleighstreuung auch bei deutlich höheren Temperaturen²² des atomaren Ensembles detektiert werden [31]. Die hierfür benötigte Kohärenz ist durch das Lichtfeld des Resonators gegeben. Auch in diesem Fall kommt es zu superradianter Umstreuung von Licht zwischen den Moden des Resonators.

Das Auftreten von superradianter Strahlung ist eng mit dem bereits erwähnten Dicke Phasenübergang verknüpft. Dies wirft die Frage auf, ob es auch während der CARL Dynamik zu einem Phasenübergang kommt. Es stellt sich jedoch heraus, dass trotz der Ähnlichkeiten zum Dicke Modell beim CARL Prozess ohne zusätzliche Kühl-

¹⁷Eine geringe Startbesetzung der Testmode kann, aufgrund von parasitärer Rückstreuung an den Resonatorspiegeln, nicht ausgeschlossen werden.

¹⁸Man spricht in diesem Zusammenhang vom „optischen Melassekühlen“ [12].

¹⁹Genannt seien hier bspw. die Synchronisation des Zirpens von Zikaden oder das Auftreten von synchronisiertem Applaus. Da jede Person bzw. Zikade alle anderen Gruppenmitglieder hören kann, liegt eine globale Kopplung vor.

²⁰Sofern die Intensität des gestreuten Lichts proportional zu N^α mit $\alpha > 1$ ist, wobei N die Teilchenzahl angibt, spricht man von superradianter Streuung.

²¹Die Rückstoßtemperatur von ^{87}Rb liegt bei $1,4 \mu\text{K}$.

²²Bis hin zu ca. $100 \mu\text{K}$.

laser kein Phasenübergang, sondern eine „dynamische Instabilität“ auftritt. Unter diesem Begriff versteht man einen selbstverstärkenden, instabilen Prozess, bei dem neben der Anfangsphase keine zweite, stabile Endphase existiert. Im Fall des kollektiven atomaren Rückstoßlasers werden Atome, die im Zustand eines ruhenden Bose-Einstein Kondensats präpariert sind, mit Hilfe eines Pumplasers, der einseitig in den Ringresonator eingekoppelt wird, in energetisch höher liegende Impulszustände angeregt. Dabei streuen die Atome Licht zwischen den gegenläufigen Resonatormoden um und bilden ein eindimensionales Gitter aus. Durch diese Strukturierung wird die kollektive Streurrate erhöht und der Kontrast des Materiewellengitters wächst an, was wiederum zu einer Erhöhung der Streurrate führt. Das Lichtfeld im Resonator vermittelt bei diesem selbstverstärkendem Prozess eine langreichweitige Wechselwirkung zwischen den Atomen, die einer globalen Kopplung entspricht. Da die Atome nicht mehr in den Ausgangszustand zurückkehren und auch für große Zeiten keinen Gleichgewichtszustand einnehmen²³, handelt es sich um ein instabiles System.

Die vorliegende Arbeit beschreibt die erstmalige, systematische Untersuchung des Auftretens dieser dynamischen Instabilität für verschiedene Verstimmungen zwischen der Lichtfrequenz des Pumplasers und einer Resonanzfrequenz des Ringresonators [41].

In **Teil I** werden der experimentelle Aufbau und die zum Einsatz kommenden Techniken beschrieben, die zur Durchführung der Experimente benötigt werden.

Die Messergebnisse, sowie die theoretischen Grundlagen und die physikalischen Modelle, die zur Beschreibung des Systems verwendet werden, sind in **Teil II** zu finden.

Die in Kapitel 6.5 gezeigten Messdaten wurden mit einer thermischen Atomwolke von meiner Kollegin Hannah Tomczyk aufgenommen. Eine vollständige Theorie und nähere Erläuterungen zu diesen Messungen sind in [42, 43] zu finden.

²³Die Beschleunigung der Atome nimmt für große Zeiten zwar ab, verschwindet aber nicht [33].

Teil I.

**Technische Realisierung des
Experiments**

2. Apparativer Aufbau und Messzyklus

Um Messungen an einem Bose-Einstein Kondensat¹ in einem Ringresonator mit möglichst hoher Finesse vorzunehmen, ist ein aufwendiger Versuchsaufbau notwendig. Ein BEC wird mit Hilfe optischer und magnetischer Fang- und Kühlmethode aus gasförmigen Atomen erzeugt, in diesem Fall ⁸⁷Rubidium. Die Atome müssen von Raumtemperatur auf Temperaturen von nur wenigen 100 nK oberhalb des absoluten Temperaturnullpunktes gekühlt werden. Hierfür ist es unerlässlich die Atome von anderen Gasen zu isolieren, deshalb finden die Experimente im Ultrahochvakuum statt. Dieses Vakuumsystem beinhaltet neben den ⁸⁷Rb Atomen auch den Hoch Finesse Ringresonator und Magnetspulen. Die Spulen dienen zur Erzeugung von Magnetfeldern, die in Kombination mit Lasern der richtigen Frequenz zum sogenannten magneto-optischen Fangen der Atome eingesetzt werden. Dieser Prozess kühlt die Atome bereits soweit ab, dass sie anschließend auch ohne Laser in magnetischen Feldern gespeichert und manipuliert werden können. Die hierbei verwendeten Techniken und der zugehörige experimentelle Aufbau werden in den folgenden Kapiteln beschrieben. Die Präparation des Kondensats und die Durchführung der eigentlichen Messung wird in Kapitel 2.5 erläutert. Letztendlich wird die atomare Dichteverteilung mit Hilfe einer Absorptionsabbildung detektiert, bei der das Kondensat zerstört wird. Deshalb müssen die Messungen in einem Computer gestützten Zyklus vorgenommen werden, der sich typischerweise alle 35 Sekunden wiederholt.

Nach der Durchführung verschiedener Messungen (siehe Kapitel 6), wurde der apparative Aufbau überarbeitet. Dabei wurde insbesondere der Ringresonator durch einen neuen Resonator mit größerer Umlauflänge ersetzt, was zu einer Reduktion der Linienbreite führt. Mit diesem sollte in zukünftigen Messungen beispielsweise der Effekt der „Rückstoß-induzierten Subradianz“ [44] nachweisbar sein. Die vorgenommenen Veränderungen am Versuchsaufbau werden in Kapitel 3 dargelegt.

2.1. Funktionsprinzip einer magneto-optischen Falle

Eine magneto-optische Falle² ermöglicht das effiziente Kühlen und Einfangen von gasförmigen Atomen. Hierbei kommt das Prinzip des Laserkühlens zum Einsatz, für dessen Umsetzung S. Chu, W. Phillips und C. Cohen-Tannoudji 1997 den Physik Nobelpreis erhielten: Ein Atom, mit einer bestimmten elektronischen Übergangsfrequenz ω_0 , wird aus allen drei Raumrichtungen mit jeweils gegenläufigen Laserstrahlen beleuchtet. Das Laserlicht ist dabei um eine gewisse Frequenz Δ_{MOT} rotverstimmt zur Übergangsfrequenz. Bewegt sich das Atom nicht, so hat das Laserlicht nicht genug Energie um den elektronischen Übergang anzuregen und das Atom bleibt unbeeinflusst. Nehmen wir jedoch an, das Atom bewege sich entlang zweier gegenläufiger Laserstrahlen mit der Geschwindigkeit v , so muss die Laserfrequenz im

¹Im Englischen: Bose-Einstein Condensate, kurz BEC.

²Im Englischen: magneto-optical trap, kurz MOT.

Bezugssystem des Atoms aufgrund des Dopplereffektes korrigiert werden. Der Laserstrahl, dessen Wellenvektor k antiparallel (parallel) zur Geschwindigkeit v steht, ist um den Betrag $+kv$ ($-kv$) in seiner Frequenz verstimmt³. Die Energiedifferenz zwischen Laserlicht und elektronischem Übergang kann im Fall der antiparallelen Konstellation überbrückt werden, wenn $+kv = \Delta_{MOT}$ entspricht. Es kommt zur Absorption eines Photons aus dem Laserstrahl und damit zu einem Impulsübertrag auf das Atom, entgegen seiner Bewegungsrichtung. Für die parallele Konstellation folgt eine noch größere Energiedifferenz zwischen Licht und Übergangsfrequenz, somit bleibt das Atom von diesem Laserstrahl unbeeinflusst. Dieselbe Argumentation gilt auch für eine beliebige Richtung von \vec{v} , sofern das Atom aus allen Raumrichtungen mit gegenläufigen Laserstrahlen beleuchtet wird. Natürlich erfolgt nach der Absorption von Photonen auch eine spontane Emission. Da diese jedoch im Allgemeinen keine bestimmte Vorzugsrichtung aufweist⁴, findet im zeitlichen Mittel kein Impulsübertrag auf das Atom statt. Mit dieser Kühlmethode werden typischerweise Temperaturen von $30 - 130 \mu\text{K}$ erreicht. Diese Resttemperatur ist der spontanen Emission zuzuschreiben. Zwar verschwindet der zeitliche Mittelwert des Impulsübertrages auf die Atome, nicht jedoch seine Standardabweichung. Es verbleibt somit eine ungeordnete Restbewegung der Atome.

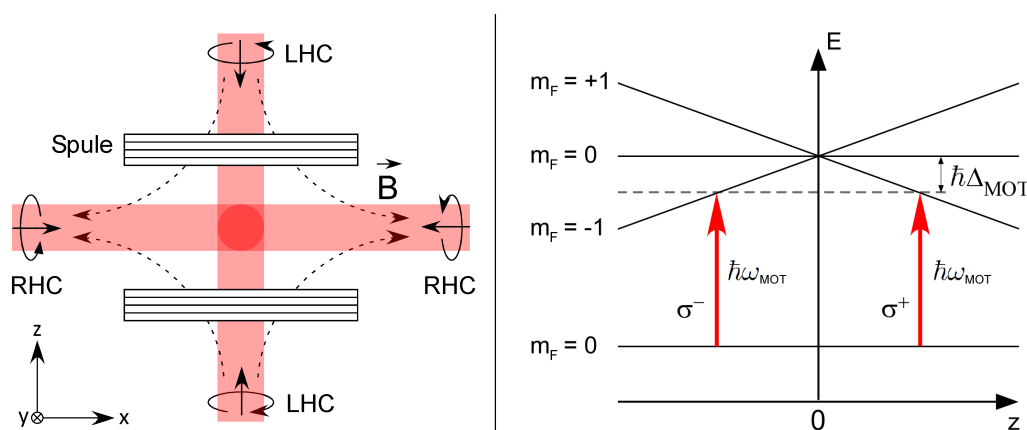


Abbildung 2.1.: *Links:* Die Laserstrahlen werden aus allen Raumrichtungen, jeweils entgegengesetzt eingestrahlt. Die dritte Raumrichtung steht senkrecht zur Papierebene. Die Laufrichtung der Spulenströme ist gegensinnig. Abkürzungen: LHC (RHC): Linkshändig (Rechtshändig) zirkular polarisiertes Licht.

Rechts: Fiktives Termschema mit Zeeman-Aufspaltung der Hyperfeinzustände. z bezeichnet die Symmetrieachse der Spulen, wobei der Ursprung exakt zwischen den Spulen liegt. Der Laser wird mit der Frequenz ω_{MOT} eingestrahlt.

Um Atome nicht nur zu kühlen sondern auch in einem bestimmten Raumbereich zu konzentrieren und einzufangen, muss zusätzlich zu den gegenläufigen Laserstrahlen

³Dies ist die führende Ordnung in der Frequenzkorrektur, die man aus der Lorentztransformation zwischen Laborsystem und atomaren Bezugssystem erhält.

⁴Im Gegensatz zum gerichteten Impulsübertrag bei der Absorption.

ein Magnetfeld⁵ angelegt werden. Dies kann beispielsweise, wie in Abb. 2.1 skizziert, mit Hilfe zweier in Anti-Helmholtz Konfiguration betriebenen Spulen realisiert werden. Das resultierende Magnetfeld verschwindet auf der Symmetrieachse im Mittelpunkt zwischen den Spulen und steigt in erster Ordnung linear mit dem Abstand zum Spulenmittelpunkt an. Dementsprechend kommt es in einem hinreichend kleinen Raumbereich um den Spulenmittelpunkt auch zu einer linearen Zeeman-Aufspaltung der Hyperfeinzustände (siehe Gl. (2.3)). Strahlt man rotverstimmtes Licht mit zirkularer Polarisation ein, so treiben beispielsweise die Laser die parallel zur z -Achse laufen σ_- bzw. σ_+ Übergänge, was auch für ruhende Atome zu einem Impulsübertrag in Richtung des Spulenmittelpunktes führt (Abb. 2.1). Ruht ein Atom jedoch im verschwindendem Magnetfeld, findet keine Interaktion mit dem Lichtfeld statt. Somit können Atome in einem Magnetfeld gekühlt und gefangen gehalten werden. Typische Zahlenwerte einer solchen magneto-optischen Falle sind 10^7 bis 10^9 Atome, deren Dichte im Bereich von $10^9 - 10^{11} \frac{1}{\text{cm}^3}$ liegt. Eine ausführliche Behandlung der MOT ist in [13] zu finden.

2.2. Magnetisches Fangen und evaporatives Kühlen von ^{87}Rb

Als Alkaliatom mit nur einem Außenelektron, dessen erste Übergangsfrequenzen im optischen Bereich liegen, eignet sich ^{87}Rb besonders gut zum optischen Kühlen, magnetischen Speichern und evaporativen Kühlen. Allerdings sind nicht alle Zustände magnetisch fangbar, was Voraussetzung für das evaporative Kühlen ist. Dies soll im Folgenden kurz erläutert werden.

Das zeitlich gemittelte magnetische Moment eines atomaren Zustandes ist stets proportional zum Drehimpuls des betrachteten Zustandes. Dieser setzt sich aus dem Drehimpuls des Atomkerns und dem der Elektronenhülle zusammen. Der Kernspin von ^{87}Rb beträgt $I = 3/2$. Zur Bestimmung des Hüllendrehimpulses muss die Elektronenkonfiguration von Rb beachtet werden: 37 Elektronen verteilen sich auf 5 Schalen⁶. In aufsteigender Reihenfolge von n ist die Konfiguration durch $[2, 8, 18, 8, 1]$ gegeben. Die ersten drei Schalen sind voll besetzt, ihr Gesamtdrehimpuls addiert sich zu Null. Die vierte Schale ist mit zwei Elektronen im $4s$ und sechs Elektronen im $4p$ Zustand besetzt, auch hier verschwindet der Gesamtdrehimpuls. Das magnetische Hüllennmoment ist somit nur durch ein Elektron im $5S_{1/2}$ Zustand definiert. Da in diesem der Bahndrehimpuls Null ist, bleibt nur der Elektronenspin $S = 1/2$ übrig. Für den Gesamtdrehimpuls $\vec{F} = \vec{I} + \vec{S}$ ergeben sich zwei mögliche Werte $F = 1$ oder $F = 2$, die sich energetisch um $\Delta E_{HFS} = h \cdot 6,8 \text{ GHz}$ (siehe Abb. 2.8) unterscheiden. Man spricht in diesem Zusammenhang von der Hyperfeinstrukturaufspaltung der Zustände. Die zugehörigen magnetischen Momente sind über

$$\vec{\mu}_F = -g_F \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{F} \quad (2.1)$$

definiert. g_F bezeichnet den Landé-Faktor des atomaren Zustandes und $\hbar = h/2\pi$ mit dem Planck'schen Wirkungsquantum h . Ins Bohr'sche Magneton μ_B geht die

⁵Der Zusammenhang zwischen Magnetfeld \vec{H} und magnetischer Flussdichte \vec{B} ist durch $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$ gegeben, wobei im Vakuum $\mu_r = 1$ gilt und μ_0 die Permeabilität des Vakuums bezeichnet. Allerdings wird üblicherweise auch \vec{B} als Magnetfeld bezeichnet.

⁶Die Schale wird durch die Hauptquantenzahl n definiert.

Elementarladung e und die Masse des Elektrons m_e ein.

$$\mu_B = \frac{\hbar e}{2m_e} \quad (2.2)$$

In einem äußeren Magnetfeld \vec{B} ist die Wechselwirkungsenergie zwischen Feld und atomarem magnetischen Moment durch

$$U_{mag} = -\vec{\mu}_F \vec{B} = g_F m_F \mu_B |\vec{B}| \quad (2.3)$$

gegeben. Das zweite Gleichheitszeichen gilt nur für den Fall, dass die Quantisierungsachse (QA) parallel zum Magnetfeld gewählt ist, was im folgenden angenommen wird. m_F ist die Projektion des Drehimpulses \vec{F} auf die QA⁷. Nach Gleichung (2.3) sind nur Zustände magnetisch speicherbar, deren Energie am Magnetfeldminimum⁸ minimiert wird. Man spricht von sogenannten „low field seeking“-Zuständen. Im Fall von ⁸⁷Rb sind das die Zustände $F=2, m_F=(1, 2)$ und $F=1, m_F=-1$ (vgl. Abb. 2.2). Ändert ein gefangenes Atom jedoch seine Spinausrichtung, so geht es möglicherweise in einen ungefangenen Zustand über. Solch ein „Spinflip“ kann vorkommen, wenn sich das Magnetfeld zeitlich schnell, im Vergleich zur Larmorfrequenz $\omega_L = \frac{U_{mag}}{\hbar}$, ändert. Das Kriterium für eine Aufrechterhaltung der Spinorientierung, das sogenannte Adiabazizitätskriterium, lautet

$$\frac{d|\vec{B}|}{dt} |\vec{B}|^{-1} < \omega_L. \quad (2.4)$$

Allerdings kann es auch in statischen Feldern zu solchen Spinflip Verlusten kommen: Im Quadrupolfeld zwischen zwei Spulen gibt es einen Punkt an dem das Feld verschwindet (vgl. Abb. 2.1). Bewegt sich ein Atom durch diesen Punkt bzw. nah an ihm vorbei, so ändert das Magnetfeld im atomaren Bezugssystem schlagartig sein Vorzeichen. Der Spin kann dem Feldverlauf nicht folgen und es kommt zu sogenannten Majorana Spinflip Verlusten. Diese spielen insbesondere bei sehr tiefen Temperaturen eine Rolle, da sich die Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Atome am Fallenzentrum mit sinkender Temperatur erhöht [46]. Somit ist das reine Quadrupolfeld zweier Spulen zum evaporativen Kühlen bis hin zum Kondensat ungeeignet. Man verwendet stattdessen eine sogenannte Ioffefalle: Im einfachsten Fall wird ein zusätzlicher Draht parallel zur Symmetrieachse der Spulen, aber nicht auf der Achse angebracht. Wird Strom durch den Draht geschickt, überlagert sich das Quadrupolfeld mit dem Drahtfeld und es gibt Raumbereiche, in denen das resultierende Feld ein lokales Minimum (ungleich Null) aufweist und in erster Ordnung parabolisch in jede Richtung, ausgehend vom Minimum, ansteigt. Bei entsprechend gewählten Strömen können Spinflip Verluste in einer solchen Falle verhindert werden. Eine genauere Analyse der Felder einer Ioffefalle mit vier Drähten ist in Kapitel 3.2 zu finden. Qualitativ ist der Betrag des Feldverlaufes entlang einer Raumrichtung in Abb. 2.2 skizziert⁹. In solch einem Feld kann ein Bose-Einstein Kondensat präpariert werden. Hierzu werden die magnetisch gefangenen Atome mit Hilfe von Radio- oder Mikrowellenfrequenzen an magnetisch ungefangene Zustände gekoppelt.

⁷Ab Feldstärken von ca. 600 Gauß koppeln Elektronen- und Kernspin separat an das äußere Magnetfeld und Gleichung (2.3) verliert ihre Gültigkeit. Felder dieser Größenordnung kommen im Experiment allerdings nicht zum Einsatz.

⁸Ein lokales Feldmaximum ist im freien Raum nicht möglich. Dies folgt aus $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$ und $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, siehe [45].

⁹Nach Gleichung (2.3) ist die Energie proportional zum Betrag des Magnetfeldes.

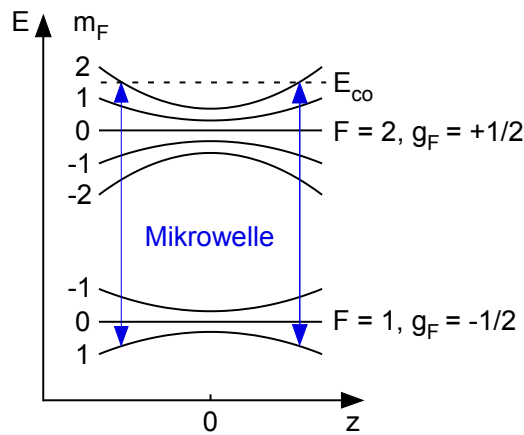


Abbildung 2.2.: Hyperfeinstrukturaufspaltung des $5S_{1/2}$ Zustandes im Magnetfeld der Ioffefalle. Der Betrag des Magnetfeldes kann in erster Näherung als parabolisch approximiert werden. Durch Mikrowelleneinstrahlung können magnetisch gefangene an ungefangene Zustände gekoppelt werden. Nähere Erläuterungen: siehe Text.

Atome im Zustand $F=2, m_F=2$, deren Energie größer als die Energie E_{co} ist, werden in den Zustand $F=1, m_F=1$ transferiert und bewegen sich in Richtung hoher Magnetfelder. Man entfernt demnach die Atome mit den höchsten kinetischen Energien aus der Magnetfalle. Die verbleibenden Atome rethermalisieren durch s-Wellen Stöße bei einer tieferen Temperatur. Die große s-Wellen Streulänge von ^{87}Rb ¹⁰ ermöglicht eine schnelle Rethermalisierung und effektives evaporatives Kühlen. Dies ist der Grund für die Verwendung von ^{87}Rb statt ^{85}Rb zur Herstellung des Bose-Einstein Kondensats¹¹.

2.3. Vakuumkomponenten

Eine Aufsicht des Vakuumsystems ist in Abbildung 2.3 schematisch dargestellt. Es besteht aus zwei Edelstahlkammern, die über eine differentielle Pumpstrecke miteinander verbunden sind. Diese ermöglicht eine Druckdifferenz zwischen den Kammern, die bis zu vier Größenordnungen betragen kann. Im Normalbetrieb herrscht in der Hauptkammer ein Druck von ca. $1 \cdot 10^{-11}$ mbar. Dieser Druck kann nur mit einer Kombination aus Ionengetter- und Titan-Sublimationspumpe erreicht werden. Beide befinden sich unterhalb der Kammer. Die kleinere Kammer (2D-MOT Kammer in Abb. 2.3) beinhaltet eine Rb-Ampulle¹², die mit Hilfe eines Heizdrahtes auf 40°C temperiert wird. In diesem Zustand stellt sich ein Gleichgewichtsdruck von ca. $2 \cdot 10^{-7}$ mbar ein. Eine Ionengetterpumpe (nicht gezeigt) sorgt für die Aufrechterhaltung des Vakuums. Mit Hilfe der außen angebrachten Spulen und den jeweils gegenläufigen Lasern, werden Atome in zwei Raumrichtungen¹³ gekühlt und gefangen.

¹⁰Der Zahlenwert beträgt 5,77 nm.

¹¹(^{85}Rb) hat eine negative Streulänge, was einer attraktiven Wechselwirkung zwischen den Atomen entspricht und mit einer Implosion des Kondensats enden kann. Man spricht auch von einer „Bosenova“.

¹²Mit natürlichem Isotopenverhältnis.

¹³Die zweite Raumrichtung steht senkrecht zur Papierebene, die Laser sind nicht eingezeichnet.

Man spricht von einer zweidimensionalen magneto-optischen Falle, kurz 2D-MOT. Entlang der Achse der differentiellen Pumpstrecke wird ein weiterer Laser eingestrahlt, dessen Strahlungsdruck die Atome in die Hauptkammer transferiert. Hier werden sie zwischen den MOT-Spulen in der konventionellen MOT-Geometrie (Abb. 2.1) eingefangen und auf Temperaturen von ca. $100 \mu\text{K}$ abgekühlt.

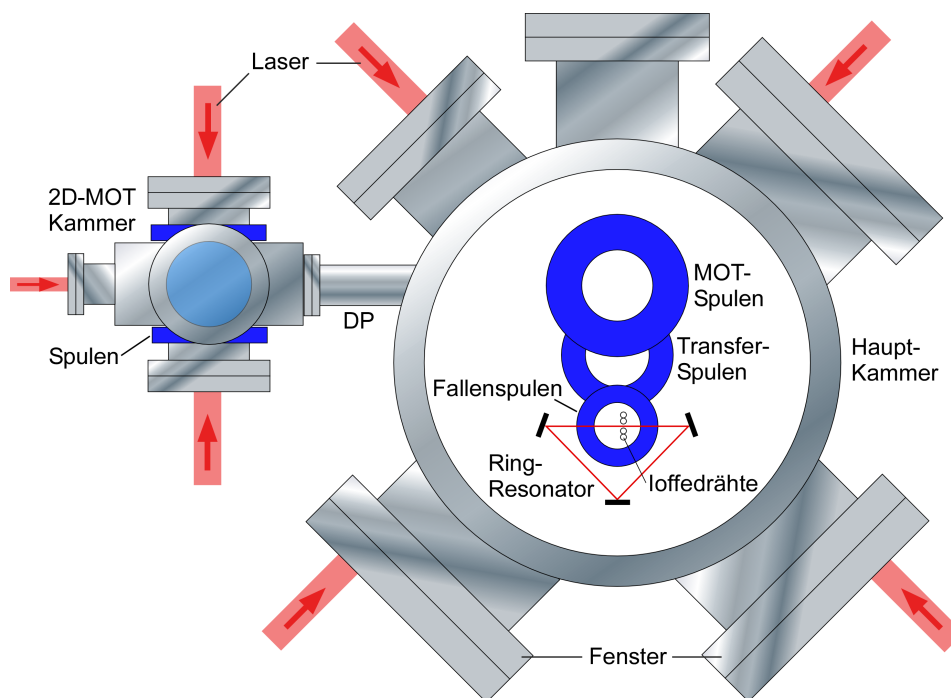


Abbildung 2.3.: Skizze des Vakuumsystems. Die Darstellung des Innenaufbaus der Hauptkammer ist nicht maßstabsgetreu (vgl. Abb. 2.4 und Abb. 2.5). Die Resonatormode verläuft zwischen den Fallenspulen und den Ioffedrähten. Abkürzungen: DP: differentielle Pumpstrecke, 2D-MOT: zweidimensionale magneto-optische Falle. Nähere Erläuterungen: siehe Text.

Nach der MOT-Phase werden die Atome mit Hilfe eines Umpumplasers (siehe Kapitel 2.4) im Hyperfeinzustand $5S_{1/2}, F=2, m_F=2$ präpariert und magnetisch gefangen. Durch Erhöhung des Stromes in den Transferspulen bei gleichzeitiger Stromreduktion in den MOT Spulen wandert das Feldminimum vom Zentrum der MOT zum Zentrum der Transferspulen (siehe Abb. 2.4). Nach dem selben Prinzip wird das Feldminimum weiter zum Fallenspulenzentrum verschoben. Wenn die Ströme dabei nicht zu schnell verändert werden, folgen die gefangenen Atome adiabatisch dem Magnetfeldminimum (Gl. (2.4)). Vom Fallenspulenzentrum erfolgt ein letzter Transfer in die Ioffefalle, in der durch evaporatives Kühlen ein Bose-Einstein Kondensat erzeugt wird. Die Ioffefalle wird durch die Fallenspulen und vier Ioffedrähte realisiert. Damit das Kondensat im Fokus der Resonatormode positioniert werden kann, muss diese zwischen den Fallenspulen und den Ioffedrähten verlaufen.

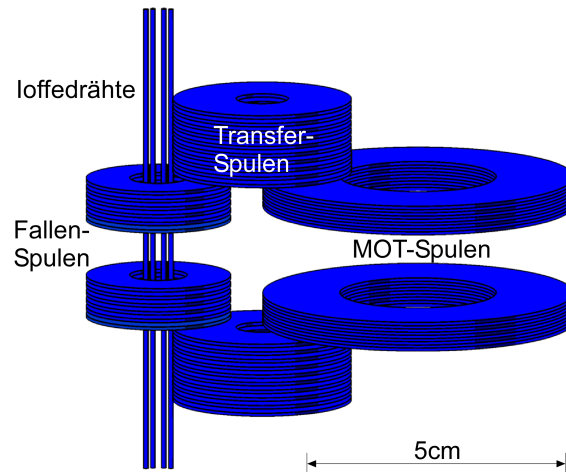


Abbildung 2.4.: Maßstabsgetreue Skizze der stromführenden Elemente in der Hauptkammer. Magnetisch gefangene Atome zwischen den MOT-Spulen können mit Hilfe der Transferspulen zu den Fallenspulen transportiert werden. Das evaporative Kühlen, bis hin zur Bose-Einstein Kondensation, findet in der Ioffefalle statt.

	MOT-Spulen	Transferspulen	Fallenspulen
Abstand der Spulenmitten in mm	25	48	19
Spulendicke in mm	6	15	9
Innenradius in mm	15	7	5
Außenradius in mm	30	17	15
Drahtwindungen	115 und 112	105 und 108	119 und 115
Widerstand in Ω	1,0 und 1,0	0,22 und 0,22	0,45 und 0,45
Magnetfeldgradient in G/cm	h:12 , v:24	h:5,5 , v:11	h:40 , v:80

Tabelle 2.1.: Daten der im Vakuum verwendeten Magnetspulen (entnommen aus [37]). Die Anzahl der Drahtwindungen, sowie die Widerstände, sind für beide Spulen angegeben. Der Magnetfeldgradient wurde am jeweiligen Mittelpunkt des Spulenpaares in horizontaler (h) und vertikaler (v) Richtung für einen Strom von $I = 1$ A pro Spule berechnet.

Die Vakuumkomponenten sind in Abb. 2.5 illustriert. Der gesamte Aufbau ist mit Edelstahlstangen am Kammerdeckel aufgehängt. Die Spulenhalter sind aus OFHC-Kupfer¹⁴ gefertigt, ebenso der Kühlstab, der zum Abtransport der durch Strom erzeugten Wärme dient. Der Ringresonator aus Edelstahl ist am Kühlstab und am unteren Spulenhalter fixiert und umschließt die Fallenspulen und die Ioffedrähte. Um eine möglichst hohe Finesse zu erreichen, befindet sich der Resonator im Vakuum. Jede erdenkliche Konstruktion außerhalb des Vakuums hätte zusätzliche Glasflächen in der Resonatormode zur Folge und damit unerwünschte Umlaufverluste, die die Finesse reduzieren.

¹⁴OFHC steht für „Oxygen-free high thermal conductivity“.

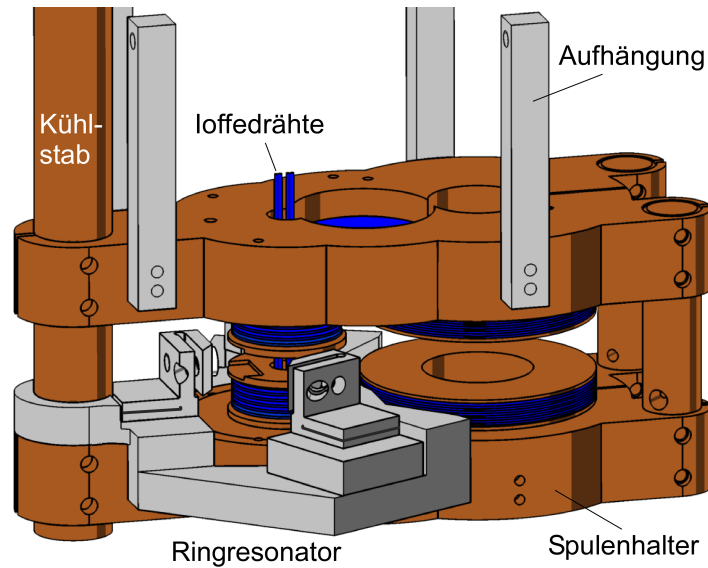


Abbildung 2.5.: Illustration der Vakuumkomponenten. Stromführende Elemente sind in blau, Kupfer in rotbraun und Edelstahlkomponenten in grau dargestellt. Die Spiegelhalter verfügen über Bohrungen für den optischen Zugang. Nicht gezeigt sind die elektrischen Zuführungen, Schrauben und der Kammerdeckel.

2.3.1. Ringresonator

Der gesamte Versuchsaufbau dient der Untersuchung der Wechselwirkung eines Bose-Einstein Kondensats mit der Lichtmode eines Ringresonators. Der verwendete Resonator verfügt über drei separate Spiegel und damit intrinsisch über zwei voneinander unabhängige Umlaufrichtungen des eingekoppelten Lichts. Die umlaufenden Lichtfelder können, im Gegensatz zu einem Stehwellenresonator, getrennt detektiert und untersucht werden. In diesem Kapitel sollen die technischen Daten des Resonators, dem eine Schlüsselrolle im Versuchsaufbau zukommt, kurz zusammengefasst werden.

Abb. 2.6 zeigt eine Skizze des Ringresonators. Die Grundplatte, sowie die Spiegelhalter sind aus Edelstahl gefertigt. Letztere verfügen über jeweils zwei Festkörpergelenke¹⁵, die mit Madenschrauben justiert werden können. Der eigentliche Resonator wird durch einen Einkoppelspiegel (EK) und zwei hochreflektierende Spiegel (HR) gebildet. Der Krümmungsradius des Einkopplers beträgt 100 mm, der eines Hochreflektors 500 mm (Daten entnommen aus [47]). Die Transmissionswerte der Spiegel¹⁶, sowie weitere technische Daten, sind in Tabelle 2.2 angegeben. Der Purcell Faktor η (siehe Kapitel 5.3) berechnet sich bei bekannter Finesse F mittels [48]:

$$\eta = \frac{6F/\pi}{k^2 w_x w_y} \quad (2.5)$$

Dieser Ausdruck gilt für einen Ringresonator, wobei $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ die Wellenzahl des Lichts und w_x, w_y die Strahltaillen am Ort des Fokus bezeichnen.

¹⁵Diese dienen der horizontalen und vertikalen Verkippung des Spiegels.

¹⁶Es handelt sich hierbei um Angaben der Herstellerfirma Research Electro Optics.

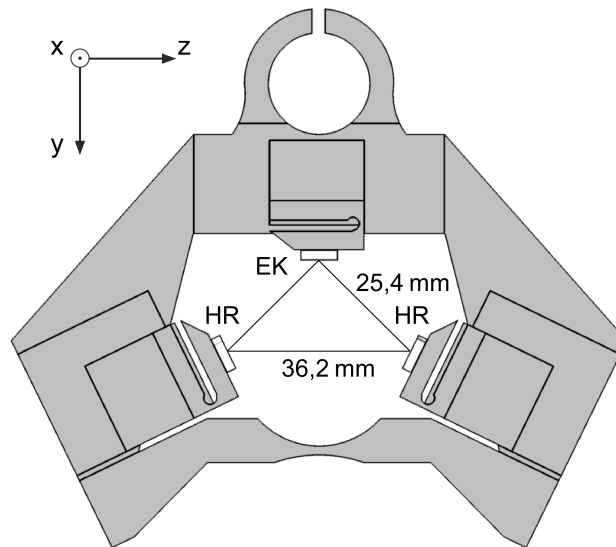


Abbildung 2.6.: Skizze des Ringresonators. Die Spiegelhalter, sowie die aus einem Stück gefräste Grundplatte, bestehen aus Edelstahl. Abkürzungen: EK: Einkoppelspiegel, HR: Hochreflektierender Spiegel.

	s-Polarisation (High Finesse)	p-Polarisation (Low Finesse)
Finesse, F	130 000	2650
$(1/e)$ Leistungs-Zerfallszeit, T_{res}	$6,0 \mu s$	$0,1 \mu s$
Feld-Zerfallsrate, κ	$2\pi \cdot 13,3 \text{ kHz}$	$2\pi \cdot 650 \text{ kHz}$
Leistungs-Linienbreite, $\delta\nu_{FWHM}$	26,5 kHz	1,3 MHz
Transmission Einkoppelspiegel	11 ppm	1100 ppm
Transmission Hochreflektor	1,5 ppm	7 ppm
Purcell Faktor, η	0,386	0,008
Umlauflänge, L	8,7 cm	
Umlaufzeit, τ	0,3 ns	
Freier Spektralbereich, ν_0	3,45 GHz	
Horizontale Strahltaile, w_y	88 μm	
Vertikale Strahltaile, w_x	117 μm	
Modenvolumen, $V_M = \frac{1}{2}L\pi w_x w_y$	1,4 mm ³	

Tabelle 2.2.: Der Finesse Wert für s-Polarisation ist aus [37] entnommen. Der Wert für p-Polarisation wurde aus der Messung der Linienbreite bestimmt (vgl. Abb. 2.7). Die Strahltaillen sind am Ort des Fokus, der mittig zwischen den hochreflektierenden Spiegeln liegt, angegeben.

Wird das Licht nur in die Resonator Grundmode eingekoppelt, so definieren die Auftreffpunkte auf den drei Spiegeln eine Ebene im Raum (yz -Ebene in Abb. 2.6). Relativ zu dieser Ebene muss nun zwischen s-Polarisation (senkrecht zur Ebene) und p-Polarisation (Polarisation parallel zur Ebene) unterschieden werden. Da die Lichtfelder stets unter einem Einfallswinkel $\theta \neq 0^\circ$ auf die Spiegel treffen, ist das Reflexionsvermögen der Spiegel je nach gewählter Polarisation des Lichts unterschiedlich. Die verwendeten Spiegel sind auf eine möglichst hohe Reflektivität für s-polarisiertes Licht ausgelegt. Dies schlägt sich in der Finesse des Resonators nieder, die für s-polarisiertes Licht deutlich größer ist als für p-polarisiertes Licht. Aufgrund des schrägen Lichteinfalls¹⁷ auf die Spiegel sind auch die Strahltaillen in der horizontalen und vertikalen Richtung verschieden. Ebenso unterscheiden sich die effektiven Krümmungsradien der Spiegel für die yz - von denen in der xz -Ebene. Es gilt:

$$r_{yz} = r_s \cos(\theta); \quad r_{xz} = \frac{r_s}{\cos(\theta)} \quad (2.6)$$

sofern r_s den Krümmungsradius des Spiegels angibt.

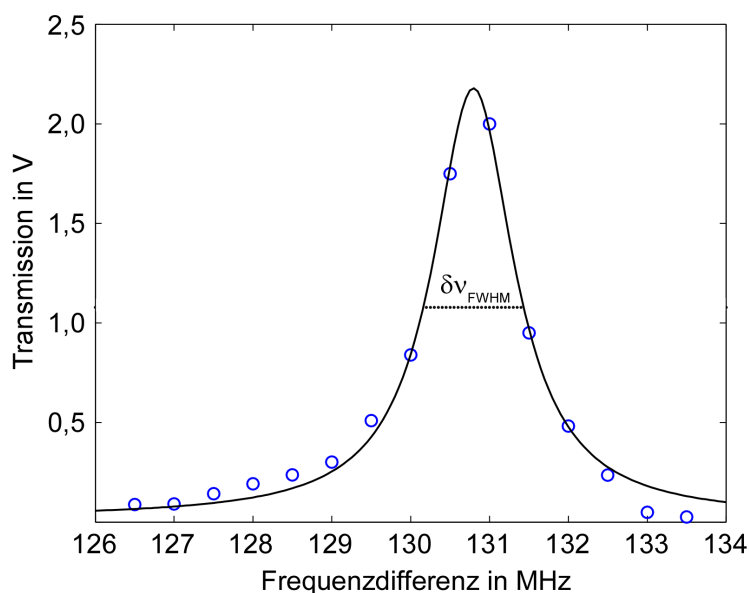


Abbildung 2.7.: Vermessung der TEM_{00} Low Finesse Mode. Die volle Leistungslinienbreite $\delta\nu_{\text{FWHM}}$ beträgt 1,3 MHz. Die Frequenzdifferenz ist relativ zur TEM_{03} HF Mode angegeben.

Zur Bestimmung der Linienbreite der TEM_{00} ¹⁸ Low Finesse (LF) Mode wurde ein Titan:Saphir Laser elektronisch auf die TEM_{03} High Finesse (HF) Mode stabilisiert. Ein zweiter Laserstrahl wird mit Hilfe eines akusto-optischen Modulators (kurz AOM) in seiner Frequenz relativ zur TEM_{03} Mode variiert und die durch den Resonator transmittierte Leistung mit einer Photodiode gemessen (vgl. Abb. 2.9). Die Ergebnisse sind in Abb. 2.7 zu sehen: die Messpunkte sind in blau, ein an die Daten angepasstes Lorentzprofil in schwarz dargestellt. Die resultierende Linienbreite

¹⁷Einfallswinkel θ : EK: $45,4^\circ$, HR: $22,3^\circ$.

¹⁸ TEM_{ij} steht für „Transversal elektromagnetische Mode“. Die Indizes geben die Anzahl der Nulldurchgänge der Feldverteilung in zwei Raumrichtungen (x, y) an.

beträgt 1,3 MHz, dies entspricht einer Finesse von $F=2650$. Die Finesse kann bei bekanntem freien Spektralbereich¹⁹ $\nu_0 = c/L$ aus der Linienbreite oder der Zerfallszeit T_{res} bestimmt werden:

$$F = \frac{\nu_0}{\delta\nu_{FWHM}} = 2\pi\nu_0 T_{res} \quad (2.7)$$

2.4. Lasersystem

Das im Experiment verwendete Lasersystem dient zur Bereitstellung ausreichender Lichtintensitäten mit wohldefinierten Frequenzen. Letztere richten sich nach den elektronischen Übergängen des verwendeten Atoms. Die relevanten Zustände von ^{87}Rb sind in Abb. 2.8 dargestellt.

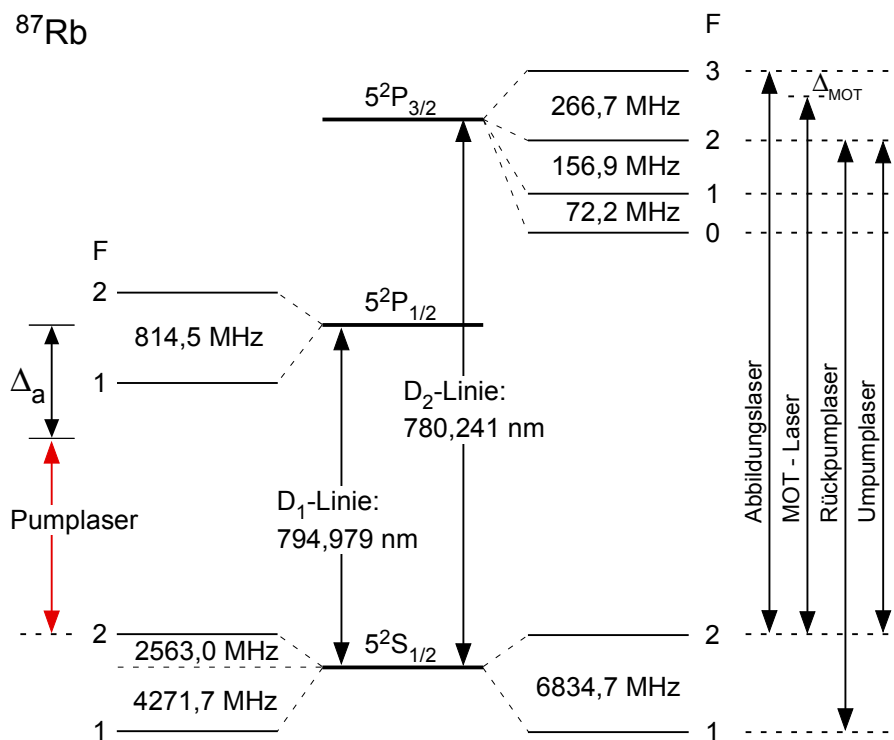


Abbildung 2.8.: D_1 - und D_2 -Linie von ^{87}Rb mit Hyperfeinstrukturaufspaltung. Die eigentliche Messung wird mit einem Pumplaser ausgeführt. Dieser ist um $|\Delta_a| \approx 90$ GHz rotverstimmt zur D_1 -Linie. Die für die Erzeugung und Abbildung ultrakalter Atome nötigen Laser-Wellenlängen liegen bei ca. 780,2 nm.

Zur Erzeugung ultrakalter Atome verwendet man kommerziell erhältliche Laserdioden, die Licht bei ca. 785 nm emittieren. Diese Wellenlänge ist zum einen um ca. 5 nm größer als die der D_2 -Linie, zum anderen ist die Linienbreite einer solchen Diode nicht ausreichend klein um die notwendige Frequenzgenauigkeit zu erreichen. Deshalb werden die Dioden in der sogenannten Littrow Anordnung verwendet [49].

¹⁹ $c = 299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ bezeichnet die Lichtgeschwindigkeit.

Hierbei ist ein optisches Gitter in einem Winkel von ca. 45° zur Lichtausbreitungsrichtung in einem Abstand von ca. 2 cm zur Laserdiode angebracht. Unter diesem Winkel wird die erste Beugungsordnung zurück in die Laserdiode gelenkt und injiziert dieselbige. Somit kann durch Änderung des Einfallswinkels die Frequenz des Lasers präzise kontrolliert werden. Die Verkippung des Gitters wird dabei mit einem Niederspannungs-Piezokristall vorgenommen. Der direkte Reflex am Gitter ist der nutzbare Laserstrahl.

Der für die Präparation der Atome verwendete optische Aufbau ist ausführlich in [37] beschrieben. Hier sei nur erwähnt, dass insgesamt fünf Laser für die Präparation der ultrakalten Atome und ein Laser, der Pumplaser, für die Bereitstellung des Lichts im Resonator zum Einsatz kommen. Der sogenannte Referenzlaser wird mittels einer frequenzmodulierten Sättigungsspektroskopie auf die Wellenlänge des Übergangs von $5S_{1/2}, F = 2$ zur cross-over Resonanz der $5P_{3/2}, F = 2, 3$ Zustände stabilisiert. Teilstrahlen dieses Lasers werden mit akusto-optischen Modulatoren derart in ihrer Frequenz verstimmt, dass sie als Abbildungslaser, Umpumplaser und Injektionslicht für den Laser der 2D-MOT verwendet werden können, vgl. Abb. 2.8. Der MOT-Laser wird relativ zum Referenzlaser mit Hilfe eines Schwebungssignals und zugehöriger Regelelektronik auf Frequenz gehalten, die Verstimmungen bis hin zu $|\Delta_{MOT}| = 100$ MHz ermöglicht. Eine zweite frequenzmodulierte Sättigungsspektroskopie stabilisiert die Frequenz des Rückpumplasers. Die Aufgaben der einzelnen Laser im Experiment werden in Kapitel 2.5 näher erläutert.

Der eigentliche Experimentierlaser ist ein Titan:Saphir Laser, kurz Ti:Sa²⁰. Dieser

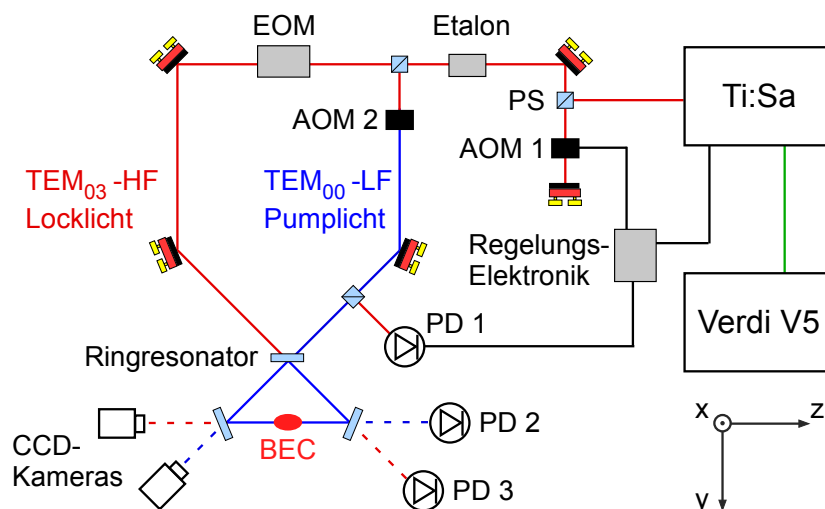


Abbildung 2.9.: Vereinfachter, schematischer Versuchsaufbau zur Durchführung der Messungen. Abkürzungen: PS: Polarisationsstrahlteiler, AOM: Akusto-optischer Modulator, EOM: Elektro-optischer Modulator, PD: Photodiode, CCD: Charge Coupled Device, BEC: Bose-Einstein Kondensat. Mittels des AOM 2 kann die Verstimmung des Pumplichts relativ zur Resonanzfrequenz des Resonators kontrolliert werden. Das Koordinatensystem dient zum Vergleich mit Abbildung 2.10. Nähere Erläuterungen: siehe Text.

²⁰Das Verstärkermedium des Lasers ist ein mit Titan Ionen dotierter Saphir Kristall: $Ti^{3+}:Al_2O_3$.

wird von einem kommerziellen Verdi V5 Laser mit 5 Watt Leistung bei einer Wellenlänge von 532 nm gepumpt und emittiert Licht bei ca. 795 nm. Die Konstruktion des Ti:Sa ist ausführlich in [50] beschrieben und ermöglicht einen großen Durchstimmbereich der Laserfrequenz mit gleichbleibend kleiner Linienbreite.

Der Strahlengang des Pumplasers ist in Abb. 2.9 stark vereinfacht dargestellt: Der Laser durchläuft einen AOM in sogenannter „Double-Pass“ Anordnung. Diese ermöglicht eine schnelle Veränderung der Laserfrequenz ohne die Strahlausbreitungsrichtung zu beeinflussen. Konstruktionsbedingt emittiert der Ti:Sa Laser stets zwei Lichtfrequenzen, von denen im Experiment aber nur eine Verwendung findet. Die unerwünschte Komponente kann mit einem Etalon herausgefiltert werden und die verbleibende wird mit einem Polarisationsstrahlteiler in „Pumplicht“ und „Locklicht“ aufgeteilt. Letzteres dient zur Stabilisierung des Lasers auf die TEM_{03} HF Mode des Ringresonators mittels des Pound-Drever-Hall Verfahrens [51].

Für dieses Verfahren muss das Licht phasenmoduliert werden, was mit Hilfe eines elektro-optischen Modulators (EOM) geschieht. Die Überlagerung aus direkt reflektiertem und durch den Resonator transmittiertem Licht wird mit einer Photodiode (PD1) detektiert und liefert das Signal für die elektronische Regelung. Diese wirkt über zwei Stellglieder auf den Laser ein: zum einen über einen Piezokristall im Ti:Sa Laser, zum anderen auf den AOM 1 im Strahlengang. Man spricht in diesem Zusammenhang von der Aufteilung der Regelung in zwei Äste. Der langsame Ast, repräsentiert durch den Piezokristall, ermöglicht einen großen Frequenzhub, kann Störungen aber nur bis zu Frequenzen von ca. 2 kHz ausgleichen. Höhere Störfrequenzen müssen vom AOM 1 (schneller Regelast) kompensiert werden, dessen Regelbandbreite ca. 200 kHz beträgt (siehe auch Kap. 4.2.2 in [37]).

Das Pumplicht wird mit AOM 2 relativ zum Locklicht in seiner Frequenz verschoben. Der Abstand der als Pumplicht verwendeten TEM_{00} LF Mode zur TEM_{03} HF Mode ist durch die Konstruktion des Resonators festgelegt und beträgt ca. 131 MHz²¹.

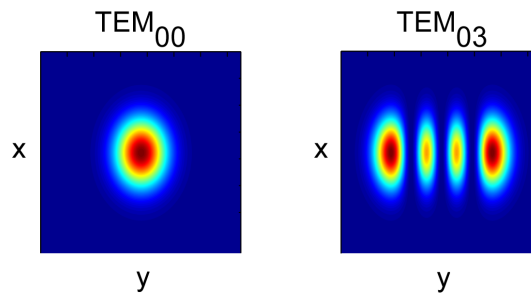


Abbildung 2.10.: Simulierte Intensitätsverteilung der TEM_{00} und der TEM_{03} Mode im Strahlfokus zwischen den hochreflektierenden Spiegeln. Für die Messungen wird das BEC im Zentrum der TEM_{03} Mode positioniert. Hier ist die Intensität des Locklichts minimal, die des Pumplichts maximal.

Damit das Kondensat nur mit der TEM_{00} LF Mode wechselwirkt, wurde für das Locklicht ein Modenprofil gewählt, in dessen Zentrum die Lichtintensität verschwindet. Am selben Punkt ist die Intensität der TEM_{00} Mode jedoch maximal und

²¹Durch Temperaturschwankungen kann sich die Umlauflänge des Resonators verändern. Dieser Effekt beeinflusst auch den Modenabstand.

damit auch die Wechselwirkung mit dem BEC. Somit ist es naheliegend das Kondensat möglichst genau im Zentrum der Moden zu positionieren. Im Experiment können die Modenprofile über CCD-Kameras detektiert werden. Zwei weitere Photodioden (PD 2 und PD 3 in Abb. 2.9) dienen zur Vermessung der transmittierten Lichtleistungen. Die simulierte Intensitätsverteilung der verwendeten Moden ist in Abb. 2.10 zu sehen.

Zur genauen Positionierung wurde das Kondensat sowohl in vertikaler, als auch in horizontaler Richtung, mit eingestrahltm Locklicht, verschoben²². Mittels einer Absorptionsabbildung (siehe Kapitel 2.5) kann die Atomzahl für jede Position berechnet werden. Abb. 2.11 zeigt eine solche Messreihe, bei der das BEC entlang der horizontalen Richtung verschoben wurde. Bei hoher Intensität werden Atome aus dem Kondensat entfernt, das Intensitätsprofil der TEM_{03} Mode im Resonator kann somit indirekt über die Atomzahl vermessen werden. Eine Vergleichsmessung ohne Licht zeigt, dass das Kondensat im Zentrum der Mode vom Locklicht praktisch unbeeinflusst bleibt. Allerdings führen zu große Ströme in den Transferspulen nicht nur zu einem Versatz des Kondensats in y -Richtung, sondern auch zu einer Öffnung der Ioffefalle, die mit einer Reduktion der Atomzahl verbunden ist. Für die Messung wurden die Ströme in den Transferspulen über einen Bereich von 2,5 A variiert. Das Optimum der Atomzahl liegt ca. $100 \mu\text{m}$ versetzt zum Zentrum der Resonatormode, vermutlich da das Magnetfeldminimum der Ioffefalle nicht exakt mit der Mode überlagert ist.

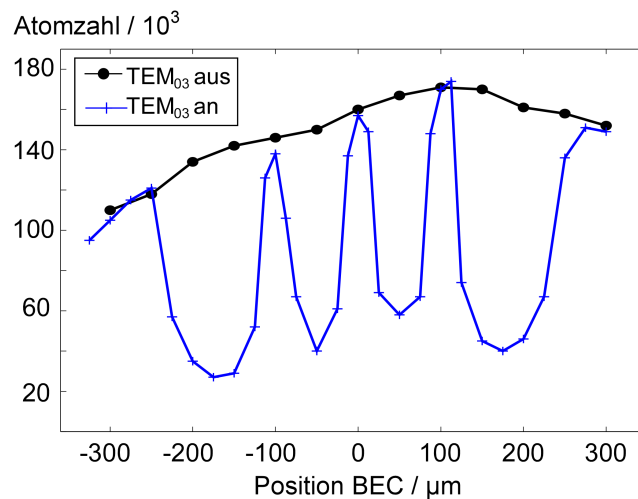


Abbildung 2.11.: Messung der Atomzahl mit und ohne Locklicht in Abhängigkeit der horizontalen Position. Das Intensitätsprofil der TEM_{03} Mode spiegelt sich in der Atomzahl wider. Die äußeren Intensitätsmaxima haben einen Abstand von $350 \mu\text{m}$.

²²Die Position des BEC in der Ioffefalle kann über die Ströme in den Fallenspulen, den Transferspulen und den äußeren Ioffedrähten in allen Raumrichtungen verändert werden.

2.5. Experimenteller Zyklus

Die atomare Dichteverteilung ist eine der zentralen Messgrößen des Experiments. Diese kann mit Hilfe einer Absorptionsabbildung bestimmt werden, bei der ein Abbildungslaser resonant zum $F = 2$ nach $F' = 3$ Übergang auf das Kondensat eingestrahlt wird, was zur Zerstörung desselbigen führt. Man kann somit an einem einzelnen Kondensat nur eine einzige Messung durchführen. Für jede weitere Messung muss ein neues BEC präpariert werden. Deshalb finden die Messungen in einem Zyklus statt, dessen zeitlicher Ablauf in Abb. 2.12 dargestellt ist. Die hierfür benötigte elektronische Steuerung des Experiments wird von einem ADwin System²³ übernommen. Die Einstellung der Parameter erfolgt am Computer, der mittels Ethernet Schnittstelle mit ADwin kommuniziert.

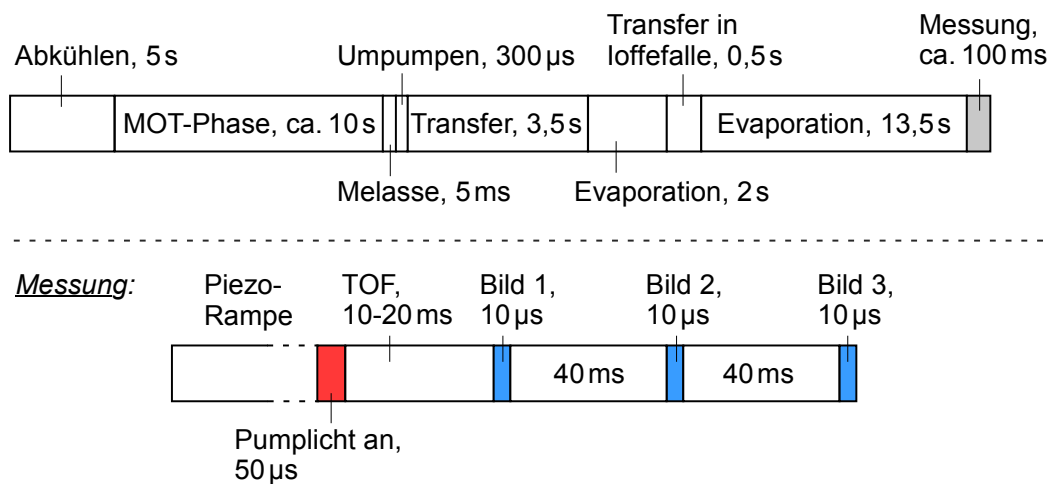


Abbildung 2.12.: Schematische Darstellung des experimentellen Zyklus. Die Präparation des Kondensats nimmt ca. 35 s in Anspruch, die eigentliche Messung dauert nur etwa 100 ms. Abkürzungen: TOF: „Time of flight“.

Abkühlzeit:

Die stromdurchflossenen Spulen im Vakuum erzeugen Wärme, die über den Kühlstab zum Kammerdeckel abfließen kann. Mit einer Abkühlzeit von ca. 5 s wird gewährleistet, dass der Druck in der Hauptkammer konstant bleibt. Bei höheren Temperaturen der Vakuumkomponenten dampft mehr adsorbiertes Rb ab, was zu unerwünschter Druckerhöhung führt.

MOT-Phase:

Der eigentliche Zyklus beginnt mit dem Laden der Atome in die magneto-optische Falle. Die Verstimmungen der Laser von 2D-MOT und MOT sind hierbei typischerweise $\Delta_{2D} = -6$ MHz und $\Delta_{MOT} = -15$ MHz. Da die MOT-Laser auch einen kleinen Anteil der Atome durch nicht-resonante Anregung in den $5P_{3/2}, F = 2$ Zustand transferieren, kann dieser in den Zustand $5S_{1/2}, F = 1$ zerfallen und wird somit nicht mehr gekühlt. Ein Rückpumplaser, welcher während der gesamten MOT-Phase ein-

²³Firma: Jäger GmbH.

geschaltet ist, sorgt dafür, dass die Atome zurück über den $5P_{3/2}, F = 2$ in den $5S_{1/2}, F = 2$ Zustand zerfallen und somit wieder gekühlt werden können (vgl. Abb. 2.8). Das Laden der MOT geschieht mit Laserleistungen von jeweils ca. 10 mW pro MOT bzw. 2D-MOT Strahl²⁴ und ca. 0,9 A pro MOT Spule. Typischerweise befinden sich nach 10 s Ladezeit ca. $5 \cdot 10^8$ Atome in der MOT.

Melasse-Phase:

Während dieser Phase kommt das Polarisationsgradientenkühlen [52] zum Einsatz, mit der die Temperatur der Atomwolke auf ca. $30 \mu\text{K}$ abgesenkt werden kann. Die Magnetfelder sind in dieser Phase ausgeschaltet, die MOT Laser um ca. $\Delta_{MOT} = -90 \text{ MHz}$ verstimmt. Der Rückpumplaser bleibt eingeschaltet.

Umpump-Phase und Transfer zur Ioffefalle:

Die Atome werden innerhalb von $300 \mu\text{s}$ durch Einstrahlen von zirkularem Licht, entlang der Symmetrieachse der MOT Spulen, in den $5S_{1/2}, F = 2, m_F = 2$ Unterzustand überführt²⁵, der ein rein magnetisches Speichern der Atome ermöglicht. Hierfür müssen die Spulenströme innerhalb von 2 s auf ca. 3 A pro MOT Spule erhöht werden. Dabei geht ein Großteil der Atome verloren, typischerweise werden $2 \cdot 10^8$ Atome in die Magnetfalle überführt, die Temperatur liegt bei etwa $100 \mu\text{K}$. Der Transfer zu den Fallenspulen geschieht wie in Kapitel 2.3 beschrieben und nimmt 1,5 s in Anspruch. Der genaue zeitliche Verlauf der Spulenströme ist in [37] angegeben. Da der Transfer zu einer Aufheizung der Atomwolke führt, muss diese vor dem Umladen in die Ioffefalle für 2 s evaporativ vorgekühlt werden. Der Umladeprozess wird in Kapitel 3.2 näher erläutert.

Evaporation:

Beim evaporativen Kühlen in der Ioffefalle wird mit aufeinander folgenden Frequenzrampen gearbeitet, die den Fallenrand in allen drei Raumrichtungen sukzessive absenken. Die benötigte Mikrowellenfrequenz wird mit Hilfe einer Helix-Antenne in zirkularer Polarisation durch ein Kammerfenster eingestrahlt.

Ein Teil der Atome kann durch dipolare Relaxation [50] in den $F = 2, m_F = 1$ Zustand überführt werden. Da diese durch Stöße die Atome im $F = 2, m_F = 2$ Zustand aufheizen können, werden zusätzlich zu den Frequenzrampen zur Kühlung sogenannte „Clean-up“ Rampen eingestrahlt, die die unerwünschten Atome aus der Falle entfernen. Am Ende des Kühlprozesses sind ca. $4 \cdot 10^4$ Atome kondensiert.

Messung:

Die eigentliche Messung dauert ca. 100 ms, die Wechselwirkungszeit zwischen Kondensat und Pumplicht beträgt hierbei nur $50 \mu\text{s}$. Die Stabilisierung des Ti:Sa Lasers auf den Resonator stellt eine besondere Herausforderung dar. Vermutlich durch Alterungsprozesse²⁶ der Spiegelhalter des Resonators wurden diese anfällig auf akustische Schwingungen. Dies äußert sich in einer ständigen absoluten Frequenzänderung der Resonanzfrequenzen des Resonators²⁷, was eine dauerhafte Stabilisierung des Lasers unmöglich macht. Um trotzdem Messungen vornehmen zu können, ist ein

²⁴Lichtleistung unmittelbar vor den Kammerfenstern. Der Transferstrahl von der 2D-MOT zur MOT wird mit ca. 0,6 mW betrieben.

²⁵Damit nur σ^+ Übergänge stattfinden, wird mittels der MOT Spulen ein homogenes Feld erzeugt. Der Laser wird nur aus einer Richtung eingestrahlt.

²⁶In Metall, das unter Spannung steht, können Korngrenzen wandern und schließlich Mikrorisse im Material ausbilden.

²⁷Auf der Größenordnung von 100 MHz.

spezielles Stabilisierungsverfahren notwendig: Das ADwin System steuert mit einer Spannungsrampe den Piezokristall des Ti:Sa Lasers. Der Frequenzhub und die Mittelfrequenz müssen dabei so gewählt sein, dass die Locklichtfrequenz die Resonanzfrequenz der TEM_{03} HF Mode des Resonators erreicht. Ist dies der Fall, so steigt die Transmission des Locklichts durch den Resonator an. Eine weitere elektronische Schaltung²⁸ vergleicht den Transmissionswert mit einer Referenzspannung, schaltet beim Erreichen dieser Spannung den Pumpstrahl über AOM 2 an und steuert AOM 1 (vgl. Abb. 2.9) derart, dass die Laserfrequenz der Resonanzfrequenz der TEM_{03} HF Mode entspricht. Diese Regelung greift allerdings nur für den kurzen Zeitraum von ca. $50 \mu\text{s}$ und begrenzt somit die Wechselwirkungszeit zwischen Pumplicht und Kondensat.

Beim Abschalten des Pumplichts wird ein Triggerpuls an einen Arduino Mikrocontroller übertragen, der die Magnetfalle ausschaltet und nach $10 - 20 \text{ ms}$ Flugzeit (TOF in Abb. 2.12) eine Abbildungssequenz steuert. Diese besteht aus drei Bildern mit einer Belichtungszeit von jeweils $10 \mu\text{s}$ und einer Wartezeit von jeweils 40 ms . Letztere ist durch die Ausleserate der verwendeten CCD Kameras vorgegeben. Das erste Bild ist der Schattenwurf der Atome im Licht des Abbildungslasers. Das zweite Bild wird ohne Atome aber mit Abbildungslaser aufgenommen und das dritte, das sogenannte „Dunkelbild“, ohne Licht und ohne Atome. Aus diesen Bildern kann die atomare Flächendichte $n(x, y)$ ²⁹ wie folgt berechnet werden: Die eingestrahlte Intensität des Abbildungslasers $I_0(x, y)$ wird durch die atomare Verteilung entlang der Ausbreitungsrichtung z des Lasers exponentiell abgeschwächt. Die detektierte Intensitätsverteilung $I(x, y)$ ist durch

$$I(x, y) = I_0(x, y) \exp\left[-\sigma_\pi \int n(x, y, z) dz\right] \quad (2.8)$$

gegeben [53], wobei σ_π den resonanten Wirkungsquerschnitt des Abbildungsübergangs für linear polarisiertes Licht angibt. Für ^{87}Rb ist der Zahlenwert

$$\sigma_\pi = \frac{7}{15} \frac{3\lambda^2}{2\pi} = 1,36 \cdot 10^{-13} \text{ m}^2. \quad (2.9)$$

Durch Messung der Strahlintensität mit und ohne Atome kann die Flächendichte nach

$$n(x, y) = \int n(x, y, z) dz = -\frac{1}{\sigma_\pi} \ln \frac{I(x, y)}{I_0(x, y)} \equiv \frac{1}{\sigma_\pi} D(x, y) \quad (2.10)$$

berechnet werden (siehe Abb. 2.13), wobei $D(x, y) = -\ln \frac{I(x, y)}{I_0(x, y)}$ als optische Dichte bezeichnet wird. Die Atomzahl folgt aus der Integration über $[x, y]$ im gewünschten Bereich³⁰. Intensitätsvariationen, die aufgrund systematischer Fehler im Abbildungssystem unvermeidbar sind, können mit Hilfe des Dunkelbildes eliminiert werden. Hierfür wird die Intensitätsverteilung des Dunkelbildes von $I(x, y)$ und $I_0(x, y)$ abgezogen. Außerdem ist darauf zu achten, dass die atomare Dichte bei der Abbildung nicht zu hoch ist, da die transmittierte Intensität aufgrund des begrenzten Dynamikumfangs der Abbildungskamera im Vergleich zur eingestrahlten Intensität nicht zu

²⁸Diese wird ausführlich in [42] beschrieben.

²⁹Das gewählte Koordinatensystem bezieht sich auf die Ausbreitungsrichtung des Abbildungslasers und ist unabhängig von denen in Abb. 2.6 und 2.9 zu verstehen.

³⁰Die Pixel der CCD Kamera haben eine gewisse Fläche ΔA . Ein Pixel kann nur einen Intensitätswert aufweisen. Das Differential $dx dy$ geht somit in die Fläche ΔA über, die Integration wird zur Summe über alle Pixel.

klein werden darf. Ist dies der Fall, gehen Informationen über die atomare Verteilung verloren. Um dies zu verhindern, muss die Flugzeit je nach Atomzahl angepasst werden. Eine längere Flugzeit führt aufgrund der repulsiven Wechselwirkung der kondensierten Atome untereinander (und der Resttemperatur der thermischen Wolke die das Kondensat umgibt) zu einer Ausdehnung der Wolke und damit zur Reduktion der Dichte. Durch diese Abbildungsmethode wird außerdem die Impulsverteilung der Atome im Ortsraum sichtbar, welche die zentrale Messgröße des Experiments darstellt.

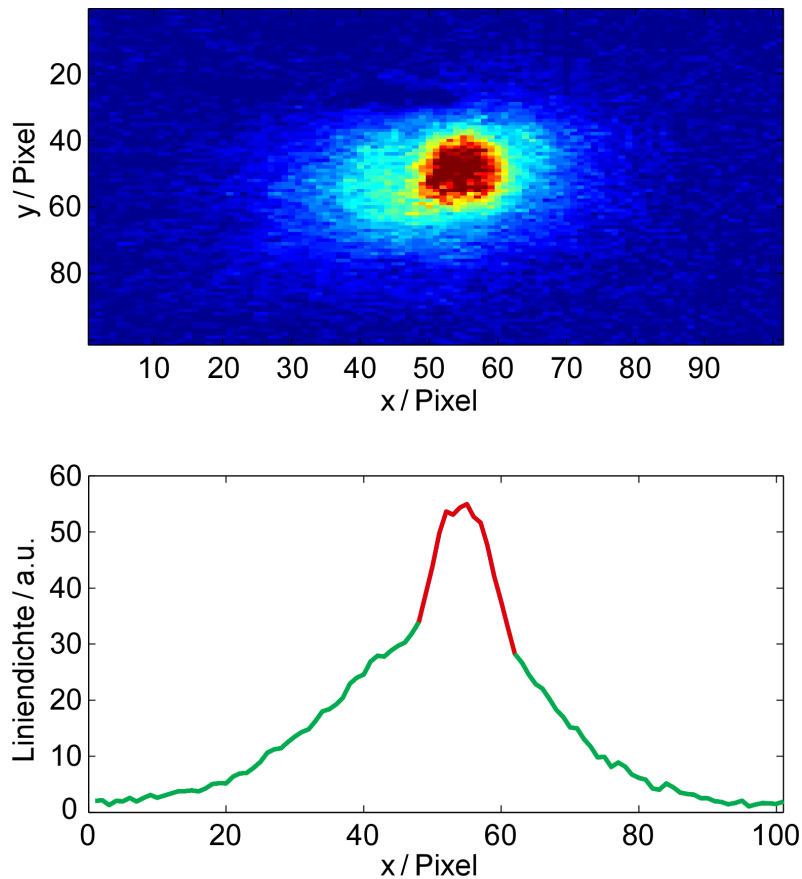


Abbildung 2.13.: *Oben:* Mittels Dunkelbild korrigierte optische Flächendichte $\tilde{D}(x, y)$. Rot steht für eine hohe, blau für eine geringe Dichte.

Unten: Die gezeigte Liniendichte erhält man durch die Integration der Flächendichte entlang der y -Richtung. Der kondensierte Anteil der Atome ist in rot, der thermische in grün dargestellt. Der Kondensatsanteil liegt bei ca. 40% der Gesamtatomzahl, die hier $\approx 80\,000$ beträgt.

3. Neuer Versuchsaufbau

3.1. Ringresonator

Nach Abschluss der Messungen, die in Kapitel 6 vorgestellt werden, wurde ein Umbau der bestehenden Anlage vorgenommen. Hauptziel war die Ersetzung des Ringresonators durch einen neuen Resonator mit größerer Umlauflänge, was zu einer Reduktion der Linienbreite $\delta\nu_{\text{FWHM}}$ und der Feldzerfallsrate κ führt. Letztere sollte dabei insbesondere kleiner als die Rückstoßfrequenz von ^{87}Rb sein¹, um in zukünftigen Messungen beispielsweise den Effekt der Rückstoß-induzierten Subradianz nachzuweisen [44]. Außerdem eröffnet eine solch kleine Feldzerfallsrate die Möglichkeit, Mehrniveausysteme mit praktisch frei wählbarer Niveauanzahl (vgl. Kap. 5.3) und größeren Kohärenzzeiten zu realisieren.

Der Zusammenhang zwischen Linienbreite und Feldzerfallsrate ist durch

$$\delta\nu_{\text{FWHM}} = \frac{\kappa}{\pi r_m} \quad (3.1)$$

gegeben. Der Faktor r_m beschreibt die Dämpfung des Lichtfeldes im Resonator. Bei jedem Umlauf geht Licht aus dem Resonator verloren, zum einen aufgrund der Transmission durch die Spiegel, zum anderen durch unvermeidbare Streu- und Absorptionsverluste. Dies wird berücksichtigt, indem man das Feld bei jedem Umlauf mit dem Faktor r_m multipliziert. Der Wert von r_m muss demnach stets kleiner 1 sein und kann aus der Finesse des Resonators mit dem Zusammenhang

$$F = \pi \frac{\sqrt{r_m}}{1 - r_m} = \frac{\nu_0}{\delta\nu_{\text{FWHM}}} \quad (3.2)$$

bestimmt werden [54]. Die Finesse ist somit nur durch die Feldverluste pro Umlauf definiert. Um eine möglichst kleine Feldzerfallsrate zu erreichen, muss nach Gl. (3.1) die Linienbreite minimiert werden. Da

$$\delta\nu_{\text{FWHM}} = \frac{\nu_0}{F} = \frac{c}{LF} \quad (3.3)$$

gilt, sollte sowohl die Finesse, als auch die Umlauflänge maximiert werden². Um eine ausreichende Finesse zu erreichen, kommen im neuen Resonator drei Spiegel der Firma Advanced Thin Films zum Einsatz. Die Krümmungsradien betragen jeweils 200 mm, die Transmissionswerte sind in Tabelle 3.1 angegeben (Herstellerangaben). Um die Umlauflänge zu maximieren, wurde ein vollständig neuer Resonator entwickelt [55], der in den bestehenden Versuchsaufbau integriert wurde. Eine Illustration ist in Abb. 3.1 zu sehen. Die Größe der Grundplatte ist durch die Hauptkammer begrenzt, die Form ist derart konzipiert, dass der Resonator mittels drei Halteklammern am bestehenden Vakuumaufbau fixiert werden kann, vgl. Abb. 3.2.

¹Diese beträgt 14,5 kHz.

²Die Feldzerfallsrate kann auch mittels der Umlaufzeit $\tau = L/c$ ausgedrückt werden: $\kappa = \frac{1-r_m}{\tau}$.

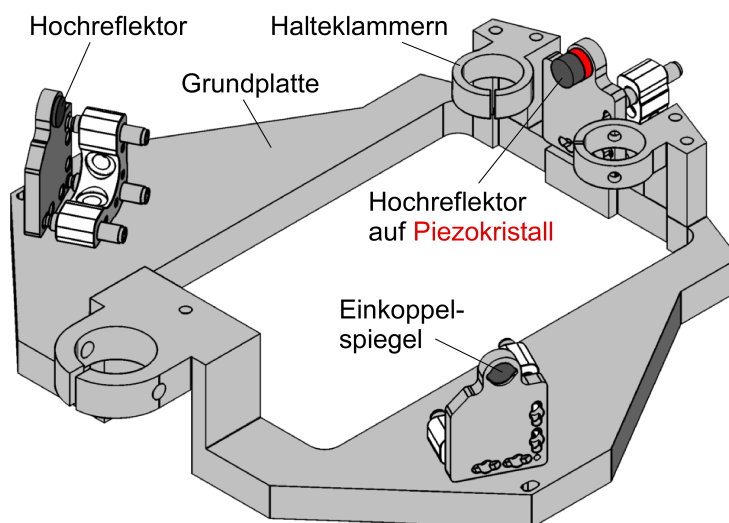


Abbildung 3.1.: Illustration des Ringresonators, siehe auch [56]. Nicht dargestellt sind zusätzliche Umlenkspiegel, die notwendig sind, um beide Umlaufrichtungen des Resonators nach Einbau in die Hauptkammer, optisch zugänglich zu machen (vgl. Abb. 3.5).

Die Spiegelhalter aus Edelstahl sind mit jeweils drei Madenschrauben³ und vier Spannfedern ausgestattet. Diese erlauben es, nicht nur den Winkel, sondern auch die Position jedes Spiegels präzise einzustellen. Besonders bei der Justage der Resonatormode durch die Ioffedrähte hat sich die Konstruktion als zweckmäßig erwiesen. Die Spiegel sind mit vakuumtauglichem Kleber⁴ in den Einfräsungen der Spiegelhalter fixiert bzw. auf einen Piezokristall aufgebracht. Mit diesem können thermisch bedingte Schwankungen der Umlauflänge korrigiert werden. Zukünftige Messungen können so bei einer bestimmten longitudinalen Mode des Resonators durchgeführt werden. Die relative Position der Spiegel definiert die longitudinale Mode und hat einen Einfluss auf die Lichtrückstreuung an den Spiegeln [57]. Das rückgestreute Licht bildet mit dem eingestrahlt Licht eine Stehwelle aus, deren Einfluss auf die Atome in zukünftigen Messungen genauer untersucht werden könnte.

Tabelle 3.1 fasst die Daten des Resonators zusammen, eine technische Zeichnung ist in Kapitel 4.1 zu finden. Die Umlauflänge ist ca. 4,5 mal größer als die des vorherigen Resonators. Insbesondere sei angemerkt, dass die Feldzerfallsrate kleiner als die Rückstoßfrequenz von ^{87}Rb ist.

³Diese bestehen ebenfalls aus Edelstahl.

⁴Epo-Tek H77 Keramikkleber. Zum Kontaktieren des Piezokristalles wurde der leitfähige Epoxykleber Epo-Tek H20e verwendet [56].

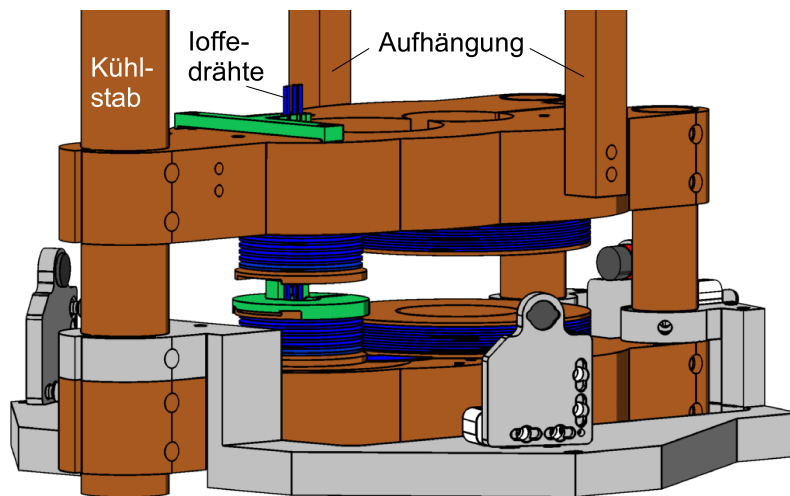


Abbildung 3.2.: Illustration der Vakuumkomponenten mit neuem Resonator und neuer Ioffefalle. Der Halter und die Zugentlastung für die Ioffedrähte sind in grün dargestellt. Der Resonator umschließt den unteren Spulenhalter.

	s-Polarisation (High Finesse)	p-Polarisation (Low Finesse)
Finesse, F	93 041	5107
$(1/e)$ Leistungs-Zerfallszeit, T_{res}	19,33 μ s	1,06 μ s
Feld-Zerfallsrate, κ	$2\pi \cdot 4,12$ kHz	$2\pi \cdot 75$ kHz
Leistungs-Linienbreite, $\delta\nu_{FWHM}$	8,23 kHz	150 kHz
Transmission Einkoppelspiegel	10 ppm	100 ppm
Transmission Hochreflektor	1 ppm	10 ppm
Purcell Faktor, η	0.096	0.005
Umlauflänge, L	39,14 cm	
Umlaufzeit, τ	1,31 ns	
Freier Spektralbereich, ν_0	766 MHz	
Horizontale Strahltaile, w_y	166 μ m	
Vertikale Strahltaile, w_x	178 μ m	
Modenvolumen, $V_M = \frac{1}{2}L\pi w_x w_y$	18,17 mm ³	

Tabelle 3.1.: Technische Daten des neuen Ringresonators.

Um den neuen Ringresonators in die bestehende Konstruktion einzubauen, musste die Hauptkammer geöffnet und der untere Spulenhalter, sowie die Ioffedrähte vorübergehend entfernt werden. Da die Drähte mit den Spulenhaltern verklebt waren, mussten neue Drähte eingebaut werden. Bei dieser Gelegenheit wurde eine leicht abgeänderte Ioffefallengeometrie verwendet, die im folgenden Kapitel kurz dargelegt werden soll.

3.2. Ioffe-Pritchard Falle

Wie bereits in Kapitel 2.2 erwähnt, ist die nach dem russischen Physiker M. Ioffe und dem US-Amerikaner D. Pritchard benannte Magnetfalle besonders geeignet, um atomare Gase bis ins entartete Regime abzukühlen und zu speichern. Die Messungen wurden mit einer Falle ausgeführt in der vier Drähte parallel und in einer gemeinsamen Ebene angeordnet waren (vgl. Abb. 4.3). Beim Transfer von der Magnetfalle⁵ in die Ioffefalle entsteht temporär ein kritischer Feldzustand, bei dem Atome aus der Falle verloren gehen können. Mit Hilfe von Feldsimulationen, durchgeführt mit einem Programm von C. Silber [58], wurde dieser kritische Feldverlauf durch eine leichte Veränderung der Fallengeometrie optimiert. Abbildung 3.3 zeigt links die geometrischen Verhältnisse in einer Aufsicht entlang der Symmetrieachse der Fallenspulen und rechts eine Illustration der mechanischen Realisierung.

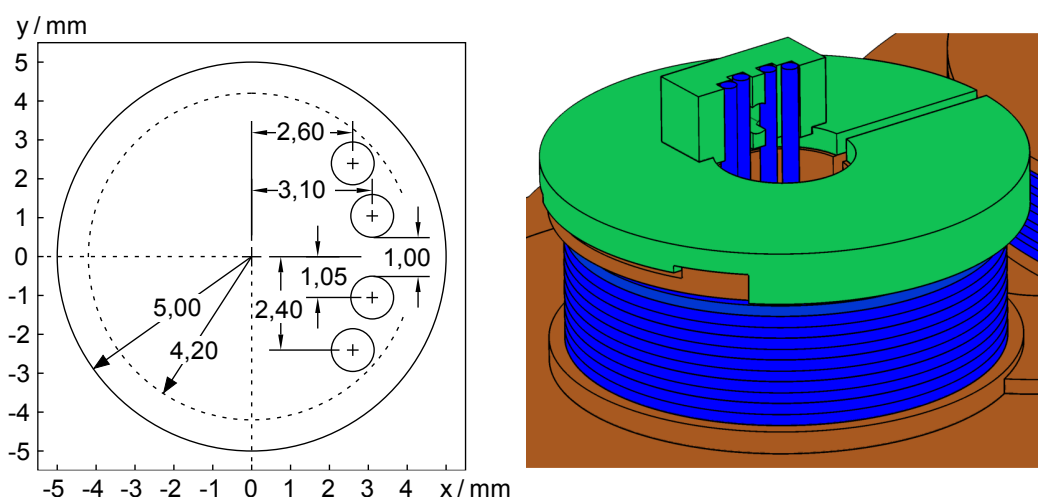


Abbildung 3.3.: Zur Geometrie der neuen Ioffefalle: Als Ursprung wurde die Symmetrieachse der Fallenspulen gewählt. Der Innenradius des Spulenhalters beträgt 4,2 mm (gestrichelter Kreis), der Innenradius der Fallenspule 5 mm. Alle Angaben in mm. *Rechts:* Schnittbild der Ioffefalle. Die kreisförmige Grundplatte und der Drahtalter sind in grün, stromführende Elemente in blau dargestellt. Der Halter verfügt über eine Bohrung mit 2 mm Durchmesser für die Durchführung der Resonatormode.

Der Durchmesser eines Ioffedrahtes beträgt 1,1 mm mit Kaptonisolation, ohne 1,0 mm. Der Abstand zwischen den inneren Drähten beträgt 1,0 mm.

⁵Diese wird allein durch das Fallenspulenpaar gebildet.

Ein kleinerer Abstand wäre vorteilhaft für die Optimierung des Magnetfeldes, würde aber die Justage der Resonatormode erheblich erschweren. Die Geometrie wurde unter Berücksichtigung einer maximal verfügbaren Stromstärke von 10 A pro Ioffedraht optimiert⁶. Die Drähte sind auf einem Halter aus OFHC-Kupfer mit Keramikkleber fixiert und am oberen und unteren Spulenhalter durch eine Zugentlastung gefädelt (vgl. Abb. 3.2). Diese Konstruktion ermöglicht die Ausdehnung der Ioffedrähte durch Wärmeentwicklung während des Betriebes, ohne Positionsveränderung nah am Spulenzentrum. Die stufenförmigen Einfräsungen im Halter definieren die Positionen der einzelnen Drähte und die kreisförmige Grundplatte⁷ ist an den unteren Fallenspulenhalter angepasst, um die Ausrichtung relativ zur Resonatormode zu gewährleisten. Genau wie die Spulenhalter verfügt auch die Grundplatte über eine Aussparung, um induzierte Ringströme, die beim An- und Abschalten der Spulen auftreten, möglichst gering zu halten⁸.

Die Feldkonfigurationen beim Transfer der Atome aus dem Quadrupolfeld der Fallenspulen in die Ioffefalle sind in Abb. 3.4 auszugsweise dargestellt. Die linke Abbildungsspalte zeigt den Betrag des Magnetfeldes in der Symmetrieebene zwischen den Fallenspulen, die rechte einen Schnitt in derselben Ebene entlang der x -Richtung für $y=0$. Bei perfekter Resonatorjustage entspricht dies der lokalen Ausrichtung der Resonatormode. Die Ströme in den Fallenspulen und den Ioffedrähten sind für die Abbildungszeilen (A), (B), (C) in folgender Tabelle angegeben.

siehe Abb. 3.4	Spulenstrom in A oben = unten	Ioffestrom in A	
		innen	außen
(A)	2	6,6	-6,6
(B)	1,05	10	-10
(C)	1,1	10	0

Die inneren Ioffedrähte sind an ihren unteren Enden miteinander verbunden, ebenso die zwei äußeren. Ein positiver Ioffestrom der inneren und ein negativer Strom der äußeren Drähte bedeutet, dass die Stromrichtung in benachbarten Drähten gegenläufig ist. Die Fallenspulen allein erzeugen ein Quadrupolfeld, das im Ursprung des in Abb. 3.4 gewählten Koordinatensystems verschwindet. Durch Hochfahren der Ioffeströme wird das Feldminimum der Fallenspulen in negative x -Richtung verschoben und es entsteht ein zweites lokales Feldminimum zwischen den Ioffedrähten (bei $x \approx 3$ mm, Teilbild (A)). Ein weiteres Erhöhen der Ioffeströme auf den Maximalwert von ± 10 A bei gleichzeitiger Absenkung der Spulenströme auf 1,05 A führt zu drei Feldminima und zwei Sattelpunkten mit Feldbetrag B_c (Teilbild (B)). Atome, deren Energie größer als die kritische magnetische Energie $U_{mag,c} = \mu_B B_c$ (vgl. Gl. (2.3)) ist, können von Gebiet I, in dem sie anfänglich eingefangen sind, in Gebiet II und III gelangen. Atome in Gebiet III werden nicht in die eigentliche Ioffefalle überführt und gehen verloren. Demnach sollte der Wert B_c möglichst hoch sein, um diese Verluste zu minimieren. Durch Änderung der Drahtpositionen konnte der Wert für B_c

⁶Die Stromstärke ist hier durch die verwendeten Stromquellen der Firma High Finesse begrenzt, prinzipiell aber durch die Wärmeentwicklung in den Ioffedrähten, die nicht zu groß werden darf.

⁷Ebenfalls aus OFHC Kupfer gefertigt.

⁸Diese sogenannten „eddy currents“ wirken sich negativ auf die Schaltzeiten der Magnetfelder aus.

von 6 Gauß (planare Drahtanordnung) auf 8,8 Gauß erhöht werden⁹. Dies entspricht einer Erhöhung um den Faktor 1,47. Da die magnetische Energie proportional zum Betrag des Magnetfeldes ist, wird diese meist direkt in Gauß angegeben. Allerdings sind auch die Zuordnungen

$$\mu_B |\vec{B}| \cong k_B T \cong \hbar \omega \quad (3.4)$$

üblich¹⁰. k_B bezeichnet die Boltzmannkonstante. Demnach konnte die kritische Temperatur $T_c \cong \mu_B B_c / k_B$ von $403 \mu\text{K}$ auf $591 \mu\text{K}$ erhöht werden.

Teilbild (C) zeigt die Endkonfiguration der Ioffefalle, in der das Kondensat gespeichert werden kann. Die Falltiefe beträgt 22 Gauß (entspricht $1,48 \text{ mK}$) und das Feldminimum beträgt 3,2 Gauß, somit können Majorana Spinflip Verluste vermieden werden. Für sehr kalte Atome, die sich nah am Fallenminimum aufhalten, kann das Potential parabolisch genähert werden. Die Oszillationsfrequenzen der Atome in diesem parabolischen Potential betragen: 27 Hz in x -Richtung, 62 Hz in y -Richtung und 68 Hz in z -Richtung.

Für das evaporative Kühlen sind höhere Fallenfrequenzen zweckmäßig, um die Stoßrate zu erhöhen und somit die Rethermalisierungszeiten zu verkürzen. Eine mögliche Konfiguration wäre ein Spulenstrom von 2,03 A mit +10 A in den inneren und +2 A in den äußeren Ioffedrähten. Die Frequenzen sind für diesen Fall durch $\nu_x : 37 \text{ Hz}$, $\nu_y : 193 \text{ Hz}$, $\nu_z : 196 \text{ Hz}$ gegeben.

⁹Das Fallenvolumen bleibt dabei dem der planaren Ioffefalle sehr ähnlich. Werden die Atome zu stark komprimiert, erwärmen sie sich, was wiederum zu erhöhten Verlusten führt.

¹⁰Mit diesen Zuordnungen folgt: $1 \text{ Gauß} \cong 67,2 \mu\text{K} \cong 2\pi \cdot 1,4 \text{ MHz}$.

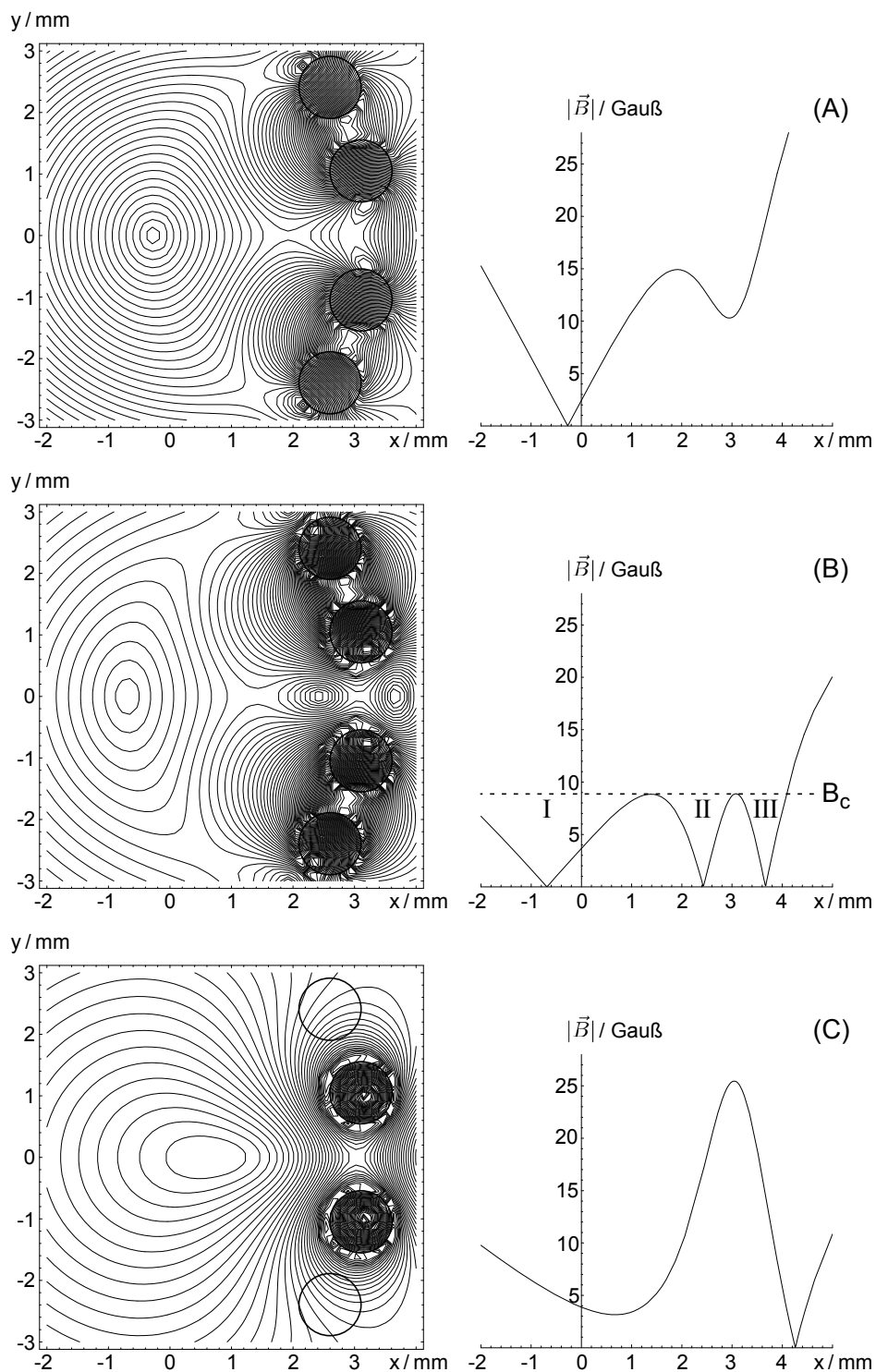


Abbildung 3.4.: *Links*: Betrag des Magnetfeldes in der Symmetrieebene zwischen den Spulen ($z = 0$). Die Positionen der Ioffedrähte sind mit Kreisen markiert. Entlang einer geschlossenen Linie ist der Betrag des Magnetfeldes konstant. Benachbarte Linien unterscheiden sich um 1 Gauß. *Rechts*: Schnitt entlang der x -Richtung für $y = 0, z = 0$. Gezeigt ist der Betrag des Magnetfeldes in Einheiten von Gauß.

3.3. Optischer Aufbau

Während der Messungen erwies sich die Frequenzstabilisierung und Instandhaltung des Ti:Sa Lasers als äußerst arbeitsintensiv. Im Zuge des Einbaus des neuen Ringresonators wurde deshalb auch der optische Aufbau grundlegend überarbeitet. Der Ti:Sa Laser wurde durch ein DL Pro Lasermodul mit einem zusätzlichen optischem Verstärkerchip ersetzt¹¹. Dieser liefert bis zu 800 mW Lichtleistung bei der gewünschten Frequenz von ca. 794 nm im Einmoden-Betrieb. Das DL Pro Modul ist ein Gitterstabilisierter Diodenlaser, dessen Frequenz zum einen mittels des integrierten Piezokristalles eingestellt werden kann¹², zum anderen mit Hilfe des Diodenstromes. Eine Veränderung des Diodenstromes hat eine Änderung der Ladungsträgerdichte und damit des Brechungsindex des Halbleitermaterials der Laserdiode zur Folge. Die Modulation des Diodenstromes kann mit bis zu 200 MHz erfolgen und wird zusammen mit der Piezosteuerung zur Stabilisierung des Lasers auf den Ringresonator verwendet. Auch hier kommt die Stabilisierungsmethode nach Pound-Drever-Hall zum Einsatz. Eine ausführliche Beschreibung der Regelung und der hierfür verwendeten Elektronik ist in [56] zu finden.

Während des Messzyklus müssen die Laser zu wohldefinierten Zeiten an- und ausgeschaltet werden. Hierfür kommen akusto-optische Modulatoren und sogenannte „Shutter“ zum Einsatz. Letztere blockieren den Laserstrahl mit Hilfe einer mechanischen Blende oder durch Einschieben einer Rasierklinge, die auf einem Lautsprecher fixiert ist. Beide Methoden führen zu akustischen Schwingungen, die sich über den optischen Tisch ausbreiten. Da die Regelung des Ti:Sa Lasers empfindlich auf diese Störungen reagierte, wurden die für die Präparation eines Kondensats nötigen Laser, mit den entsprechenden Shuttern, auf einem separaten Tisch aufgebaut. Diese Unterteilung erwies sich durch den Einsatz des DL pro Lasermoduls als unnötig und der optische Aufbau konnte erheblich kompaktifiziert werden.

Abbildung 3.5 zeigt eine vereinfachte Skizze des aktuellen Aufbaus. Alle optischen Elemente finden nun auf einem Tisch Platz. Die Laser befinden sich zur Erleichterung der Justage am Rand des Tisches. Der Referenzlaser dient als Frequenzreferenz für alle anderen Laser, ausgenommen dem TA pro Lasersystem. Die Aufgaben der einzelnen Laser wurden bereits in Kapitel 2.4 und 2.5 erläutert. An dieser Stelle soll nur der Strahlengang kurz erläutert werden. Der Referenzlaser wird mit einer frequenzmodulierten Sättigungsspektroskopie stabilisiert. Eine optische Faser vereinfacht einen Diodenwechsel des Referenzlasers erheblich, da der Strahlengang nur bis zum ersten Faserkoppler neu justiert werden muss. Über AOM 1 wird der sogenannte Slave-Laser mittels eines Faraday Isolators optisch injiziert. Der Slave-Laser ist für den Betrieb der 2D-MOT zuständig. Aus Gründen der Übersichtlichkeit ist die Aufteilung der Laserstrahlen vor den beiden Vakuumkammern und die Strahlführung zu den Kammerfenstern nicht dargestellt. AOM 2 verstimmt den Referenzlaser derart, dass er als Umpumplaser verwendet werden kann. Des Weiteren werden Anteile des Referenzlichts mit Teilstrahlen des RückpumpLasers und des MOT Lasers überlagert. Die Frequenzen der resultierenden Schwebungssignale liegen im ersten Fall bei ca. 6,8 GHz im zweiten bei ca. 118 MHz. Beide Signale werden mit entsprechenden Photodioden detektiert und elektronisch weiterverarbeitet.

¹¹Das Komplettsystem der Firma Toptica trägt den Namen TA pro. TA steht für „Tapered Amplifier“.

¹²Dieser verändert den Winkel des Gitters.

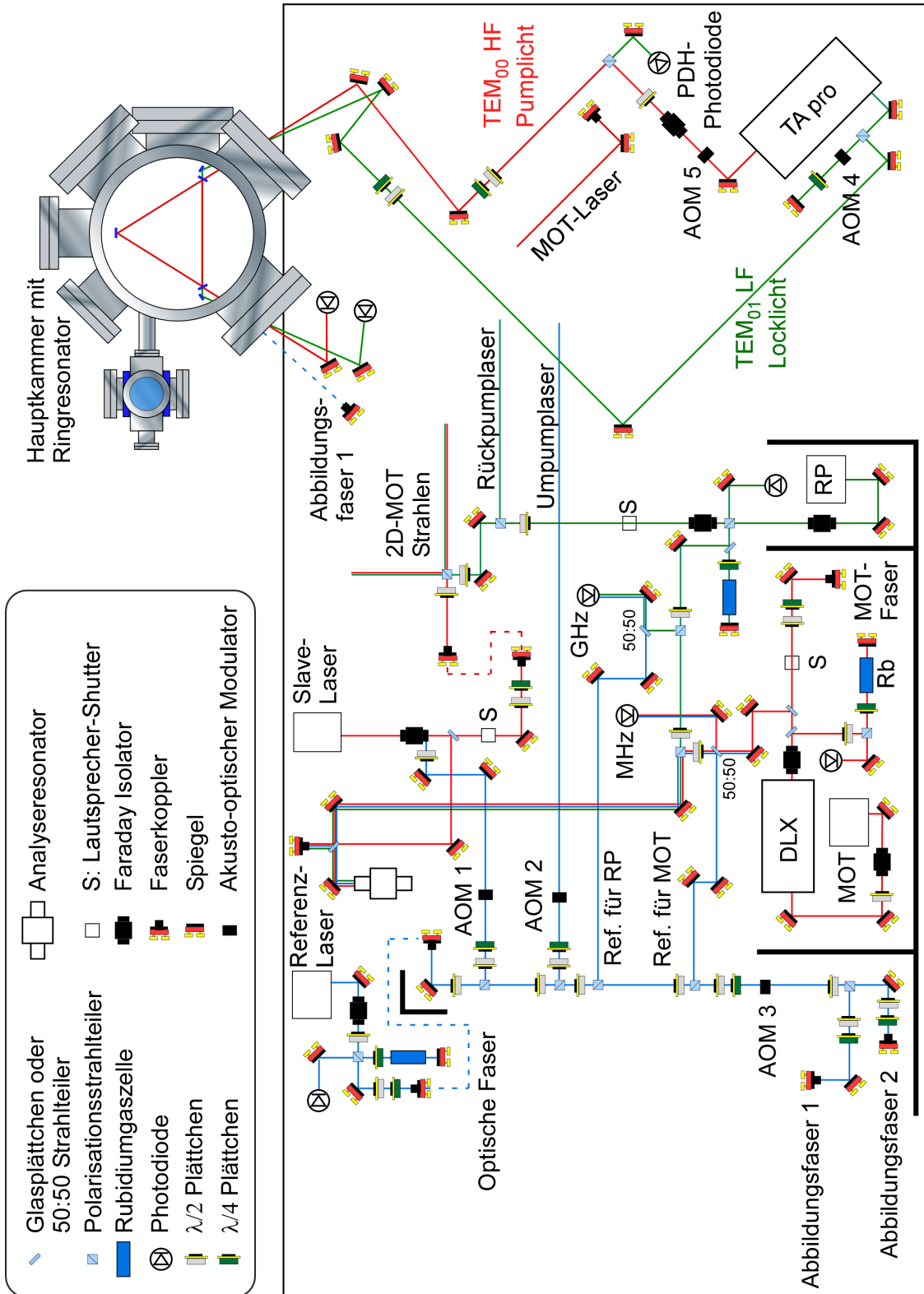


Abbildung 3.5.: Vereinfachte Skizze des aktuellen Versuchsaufbaus. Der optische Tisch misst 1,5 m × 3 m. Die Strahlengänge sind teilweise durch Kunststoffplatten (dicke schwarze Striche) voneinander separiert.

Das Schwebungssignal wird mit Hilfe einer elektronischen Schaltung in ein Spannungssignal überführt und kann dann auf eine Referenzspannung stabilisiert werden. Da diese einstellbar ist, können sowohl Rückpumper (RP) als auch MOT Laser über einen ausreichenden Frequenzbereich verstimmt werden.

Sowohl der Rückpump- als auch der MOT-Laser verfügen über eine Sättigungsspektroskopie, die aber lediglich der Frequenzkontrolle dient. Der MOT Laser besteht aus einem Eigenbau Diodenlaser, der einen modifizierten DLX Laser¹³ injiziert. Die Strahlengänge des MOT und des Slave Lasers werden durch Fasern geführt um das Strahlprofil zu verbessern. Der Rückpumlaser wird mit den Strahlengängen der MOT und des Slave-Lasers überlagert und erreicht so die Atome. Teilstrahlen aller Laser werden in einen Analysesonator eingekoppelt, um zu überprüfen ob die Laser jeweils nur auf der gewünschten Frequenz emittieren.

Das Licht für die Absorptionsabbildung der Atome wird vom Referenzlaser bereitgestellt. AOM 3 ändert die Lichtfrequenz auf den $F = 2$ nach $F' = 3$ Übergang (vgl. Abb. 2.8) und übernimmt das An- und Abschalten des Lichts. Durch den Einbau neuer elektronischer Schalter konnte auf mechanische Shutter verzichtet werden. Dies minimiert die akustischen Störungen während der Abbildung, die sich in ein Frequenzrauschen der Laser übersetzen. Ist die Frequenz des Abbildungslichts nicht resonant zum atomaren elektronischen Übergang, so führt dies zu einer fehlerhaften Bestimmung der Atomzahl.

Im TA pro Lasersystem wird ein Teil des DL pro Laserlichtes ausgekoppelt und kann als Stabilisierungslicht („Locklicht“ in Abb. 3.5) verwendet werden. Hierfür wird die TEM_{01} Low Finesse Mode verwendet, die ein Intensitätsminimum im Zentrum der Mode aufweist. Der Laser kann so über einen Zeitraum von Stunden auf den Ringresonator stabilisiert werden. Das hierfür benötigte Signal liefert die PDH-Photodiode¹⁴. Die Strahlengänge von Lock- und Pumplicht sind bei einem Ringresonator zwangsweise überlagert. Mit Hilfe eines Polarisationsstrahlteilers können die Strahlen jedoch separiert werden. Die Frequenzdifferenz der beiden Resonatormoden beträgt ca. 280 MHz und kann mittels AOM 4 und AOM 5 überbrückt werden. Hierbei wird AOM 4 in einer Double-Pass Anordnung betrieben, die eine definierte Verstimmung zwischen Stabilisierungslicht¹⁵ und Pumplicht ermöglicht, ohne die Einkopplung in den Resonator zu verändern. Das Locklicht wird über einen Umlenkspiegel in den Resonator eingekoppelt, das Pumplicht auf direktem Wege. Die transmittierten Lichtleistungen können mit Photodioden detektiert werden. Als Pumpmode soll in zukünftigen Messungen die High Finesse TEM_{00} Mode zum Einsatz kommen, deren Feldzerfallsrate kleiner als die Rückstoßfrequenz von Rubidium ist.

¹³Hersteller: Toptica.

¹⁴PDH: Pound-Drever-Hall.

¹⁵Die Frequenz des Stabilisierungslichts entspricht, im geregelten Zustand, einer Resonanzfrequenz des Resonators.

4. Anhang I

4.1. Ergänzendes zum neuen Ringresonator

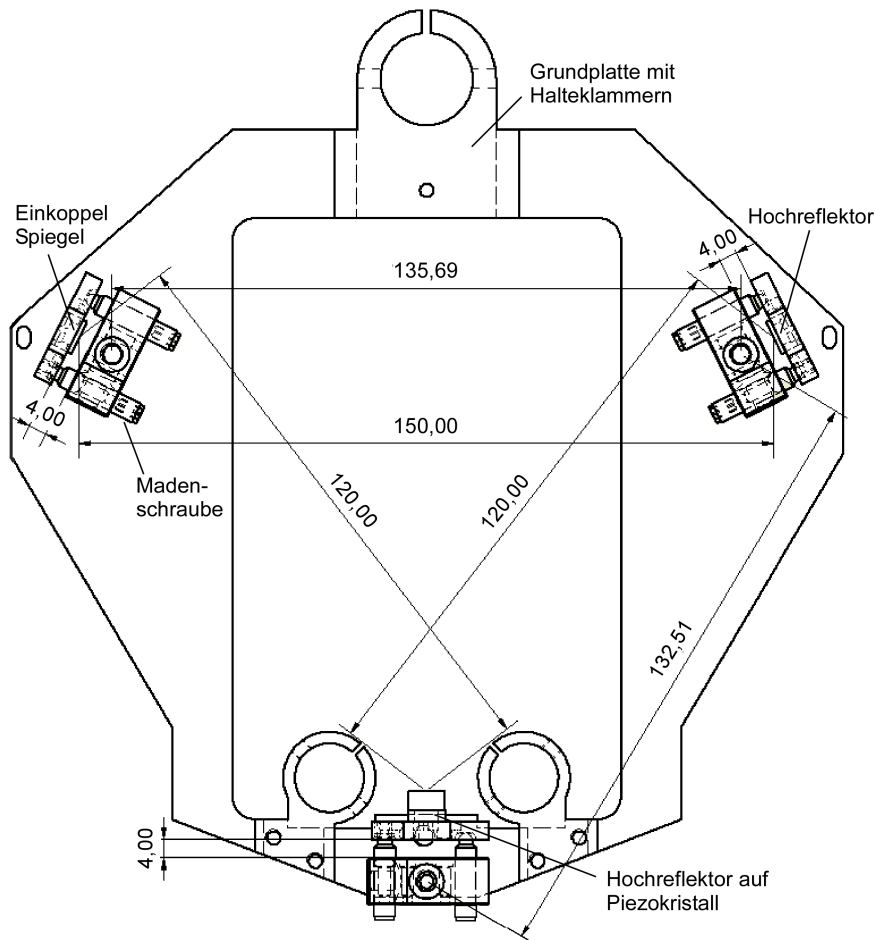


Abbildung 4.1.: Technische Zeichnung des Resonators. Alle Angaben in mm. Die Grundplatte mit Halteklammern sowie die Spiegelhalter sind aus Edelstahl gefertigt. Die Steighöhe der Edelstahl-Madenschrauben Gewinde beträgt $150 \mu\text{m}$ pro Umdrehung.

Der gesamte Resonator wurde im Rahmen einer Diplomarbeit von D. Sodtke entwickelt [55]. Die Spiegelhalter wurden von LIOP-TEC gefertigt und basieren auf der „Asteroid“ Reihe. Die Spiegelhalterplatten, ebenfalls bei LIOP-TEC in Auftrag gegeben, sind für Spiegeldurchmesser von $1/4 \text{ Zoll} \cong 6,35 \text{ mm}$ ausgelegt. Ein Hochreflektor ist auf einen Piezokristall aufgebracht, der eine maximale Auslenkung von $2 \mu\text{m}$ bei einer Spannung von 100 V aufweist. Es handelt sich um einen Vielschicht

Piezoring der Firma PI-Ceramic¹ mit einer Kapazität von 300 nF und einer Resonanzfrequenz von 500 kHz.

Ein erster Aufbau des Resonators und verschiedene Testmessungen außerhalb der Vakuumkammer wurden von C. Georges vorgenommen. Die Ergebnisse sind in seiner Diplomarbeit zu finden [56]. Messungen der Leistungszerfallszeit der TEM_{00} HF Mode ergaben einen Bestwert von $T_{res} = 41,45 \mu\text{s}$, was einer Finesse von $F = 199\,496$ entspricht. Die zugehörige Feld-Zerfallsrate κ betrug nur $2\pi \cdot 1,92 \text{ kHz}$. Da sich beim Betrieb an Raumluft Staubpartikel auf den Spiegeln absetzen können, müssen diese kurz vor dem Einbau in die Vakuumkammer gereinigt werden. Dies wurde mit einem speziellen flüssigen Polymer, namens „opti-clean“, vorgenommen. Dieses wird mit einem Pinsel auf die Spiegel aufgetragen, bindet störende Partikel und lässt sich nach ca. 20 min Aushärtezeit abziehen². Dieses Verfahren lieferte gut reproduzierbare Ergebnisse bei Testmessungen an Raumluft.

Um in der Hauptvakuumkammer einen Druck im Bereich von 10^{-11} mbar zu erreichen, muss die Kammer während des Abpumpprozesses auf Temperaturen von ca. 180°C aufgeheizt werden. Bei diesem sogenannten „Ausheizen“ wurden die Resonatorspiegel verunreinigt, die Zerfallszeit lag im Bereich von $10 \mu\text{s}$. Ein erneutes Öffnen der Kammer zum Reinigen der Spiegel war unumgänglich. Erste Reinigungsversuche mit opti-clean führten zu keinen befriedigenden Ergebnissen. Eine Reinigung mit Spezialtüchern und einem Gemisch aus hochreinem Aceton und Methanol³ zeigte eine positive Wirkung, jedoch waren die Ergebnisse schlecht reproduzierbar⁴. Der Verdacht lag nahe, dass die Spiegelränder ebenfalls verunreinigt waren und je nach Ansetzen des Reinigungstuches Schmutz vom Spiegelrand auf die Spiegelflächen transportiert wurde. Deshalb wurden die drei Spiegelhalter komplett ausgebaut und mit Hilfe eines beheizten Ultraschallbades gereinigt. Als Reinigungsmittel kamen hier Aceton und Methanol nacheinander, für jeweils ca. 30 min zum Einsatz. Nach dem Wiedereinbau der Spiegelhalter und der Justage des Resonators wurde nur noch Methanol zur mechanischen Reinigung verwendet. Es konnten so Zerfallszeiten von $25 \mu\text{s}$ erreicht werden. Um die Spiegel vor Staubpartikeln zu schützen, wurden Silikonschläuche derart am Kammerdeckel montiert, dass ein ständiger Strom von reinem Stickstoff aus einer Druckluftflasche auf die Spiegel traf. Erst kurz vor dem Schließen der Hauptkammer wurden diese entfernt. Beim zweiten Ausheizprozess wurde sorgfältig darauf geachtet, dass die Spulenhalter und der Resonator stets eine höhere Temperatur aufwiesen als die restlichen Vakuumkomponenten, um jeden möglichen Niederschlag von Restgasen auf die Spiegeloberflächen zu minimieren. Trotzdem kam es zu lokalen Verunreinigungen, die sich negativ auf die Zerfallszeit auswirken. Diese zeigt eine Temperaturabhängigkeit, die in Abb. 4.2 dargestellt ist. Mit einer Veränderung der Temperatur ändert sich zwangsläufig die Resonatorgeometrie und damit variieren die Auftreffpunkte des Laserstrahls auf den Spiegeln. Demnach kann, je nach Temperatur, mehr oder weniger Licht an lokalen Verunreinigungen absorbiert und gestreut werden.

¹Produktname: PD080.30.

Maße: Außendurchmesser \times Innendurchmesser \times Dicke: 8 mm \times 4,5 mm \times 2,5 mm.

²Es empfiehlt sich einen kleinen Streifen eines geeigneten Spiegelreinigungstuches in den noch flüssigen Kunststoff einzubringen um das Abziehen zu erleichtern.

³Im Volumenverhältnis 60:40.

⁴Eine Reinigungsanleitung findet man z.B. auf:

http://advancedthinfilms.com/Technical_Info/Optics-Handling.

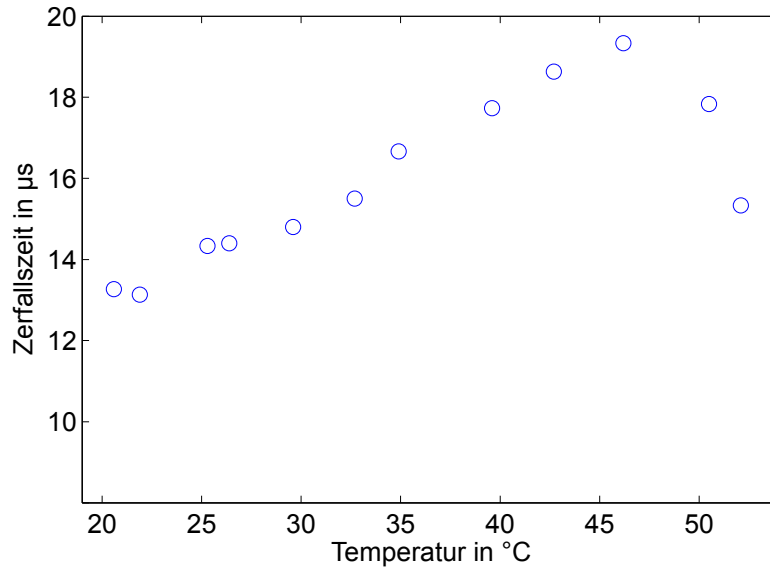


Abbildung 4.2.: Leistungszerfallszeit T_{res} in Abhängigkeit der Temperatur, gemessen am Kühlstab außerhalb der Kammer. Der Bestwert beträgt $19,33 \mu\text{s}$ bei $46,2^\circ\text{C}$.

Im normalen Messzyklus liegt die Betriebstemperatur bei ca. 33°C . Durch den Einbau eines neuen verkürzten Kühlstabes und die Aufhängung der Vakuumkomponenten an OFHC-Kupferstangen ist eine Abkühlphase, wie sie bislang im Messzyklus verwendet wurde (vgl. Abb. 2.12), überflüssig geworden. Um den Resonator auf die gewünschte Temperatur zu bringen, bei der die Zerfallszeit maximal ist, muss jetzt zusätzlich mit den Spulen geheizt werden. Anstelle der Abkühlphase tritt so eine Aufheizphase.

4.2. Geometrie der verwendeten Ioffefalle

Die in Kapitel 6.1 präsentierten Messungen wurden mit Kondensaten in einer Vierdraht-Ioffefalle durchgeführt, deren Geometrie in Abb. 4.3 dargestellt ist. Die Resonatormode liegt hierbei idealerweise entlang der x -Richtung zwischen den Drähten bei $y=0$. Auch bei der Konstruktion der neuen Ioffefalle wurde auf einen Abstand von 1 mm zwischen den inneren Drähten geachtet, um die Justage des Resonators nicht unnötig zu erschweren.

Bemerkung:

Die verwendeten Ioffedrähte sollten möglichst gerade sein. Um einen Draht, der normalerweise in aufgewickelter Form geliefert wird, zu begradigen, sollte man denselbigen unter Zugspannung setzen und gleichzeitig verdrehen. Eine zusätzliche Torsion⁵ liefert deutlich bessere Ergebnisse als eine ausschließliche Zugbelastung. Während der Belastung, die beispielsweise mit einem Schraubstock mit entsprechendem Aufbau realisiert werden kann, sollte eine Vierpunkt Widerstandsmessung am Draht vorgenommen werden. Der Widerstand steigt bei plastischer Einschnürung des Drahtes drastisch an, dies gilt es zu vermeiden.

⁵Bei einer Drahtlänge von 30 cm ca. eine volle Umdrehung.

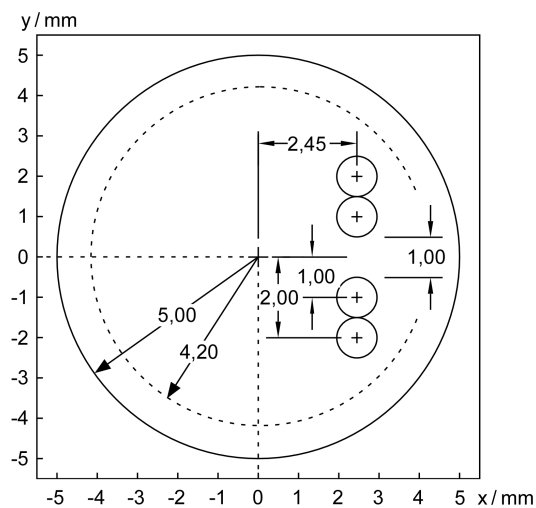


Abbildung 4.3.: Geometrie der während der Messungen verwendeten Ioffefalle in einer Aufsicht entlang der Symmetrieachse der Fallenspulen (Daten aus [37]). Der Innenradius des Spulenhalters beträgt 4,2 mm (gestrichelter Kreis), der Innenradius der Fallenspule 5 mm. Der Außendurchmesser eines Drahtes beträgt 1,0 mm.

Teil II.

**Theoretische Grundlagen und
Messergebnisse**

5. Atom-Licht Wechselwirkung

Die Interaktion eines Bose-Einstein Kondensats mit den Lichtmoden eines Ringresonators stellt einen besonders gut kontrollierbaren Spezialfall der Wechselwirkung zwischen Licht und Materie dar. Obwohl das Kondensat ausschließlich aus ^{87}Rb besteht und nur mit zwei Laufmoden eines Ringresonators interagiert, ist es ein erstaunlich komplexes System, dessen Beschreibung erheblich vereinfacht wird, wenn man die sogenannte Dipolnäherung verwendet und außerdem ein einzelnes Atom als Zweiniveausystem beschreibt. Beide Vereinfachungen und deren Gültigkeitsbereich, insbesondere im Bezug auf den kollektiven atomaren Rückstoßlaser, sollen im folgenden kurz erläutert werden.

5.1. Dipolnäherung

Ein Elektron, das durch ein Zentralpotential $V(r)$ an einen Atomkern gebunden ist und mit einem äußeren elektromagnetischen Feld wechselwirkt, wird durch folgenden Hamiltonoperator beschrieben [59]:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_e} [\hat{p} - q\hat{A}]^2 + V(r) - \frac{q}{m_e} \hat{S}\hat{B} \quad (5.1)$$

m_e bezeichnet die Masse des Elektrons, q seine Ladung und \hat{S} den Spinoperator. Ist das äußere Feld eine ebene Welle mit Wellenzahl k , die in z -Richtung propagiert und in x -Richtung polarisiert ist, so kann das klassische Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}, t)$ in der Form:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = A_0 \hat{e}_x e^{i(kz - \omega t)} + A_0^* \hat{e}_x e^{-i(kz - \omega t)} \quad (5.2)$$

geschrieben werden, wobei A_0 eine komplexe Konstante ist und \hat{e}_x den Einheitsvektor in x -Richtung bezeichnet. Für die Felder gilt dann:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}, t) = i\omega A_0 \hat{e}_x e^{i(kz - \omega t)} - i\omega A_0^* \hat{e}_x e^{-i(kz - \omega t)} \quad (5.3)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t) = ikA_0 \hat{e}_y e^{i(kz - \omega t)} - ikA_0^* \hat{e}_y e^{-i(kz - \omega t)} \quad (5.4)$$

Wählt man den Zeitnullpunkt derart, dass A_0 rein imaginär wird und definiert

$$i\omega A_0 = \frac{E_0}{2} \quad \text{und} \quad ikA_0 = \frac{B_0}{2}, \quad (5.5)$$

folgt die übliche Darstellung der Felder:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \hat{e}_x \cos(kz - \omega t) \quad (5.6)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = B_0 \hat{e}_y \cos(kz - \omega t) \quad (5.7)$$

wobei $\frac{E_0}{B_0} = \frac{\omega}{k} = c$ gilt. Die quantenmechanischen Operatoren \hat{A} und \hat{B} in Gleichung (5.1) erhält man aus Gl. (5.2) und Gl. (5.4), indem man die klassischen Koordinaten

durch ihre zugehörigen Operatoren ersetzt.

Gleichung (5.1) lässt sich umformen in

$$\hat{H} = \left[\frac{\hat{p}^2}{2m_e} + \hat{V} \right] - \frac{q}{m_e} \hat{p} \hat{A} - \frac{q}{m_e} \hat{S} \hat{B} + \frac{q^2}{2m_e} \hat{A}^2. \quad (5.8)$$

Hierbei ist darauf zu achten, dass bei der Auswertung des Ausdruckes $[\hat{p} - q\hat{A}]^2$ die Operatoren \hat{p} und \hat{A} im Allgemeinen nicht kommutieren. Das gewählte Vektorpotential (5.2) hat jedoch lediglich eine x -Komponente und beeinflusst somit nur die \hat{p}_x Komponente des Impulses des Elektrons. Da das Vektorpotential außerdem nur den Operator \hat{z} beinhaltet, kommutieren in diesem Fall \hat{p} und \hat{A} und der Mischterm nimmt die Form $2\hat{p}\hat{A}$ an.

Für nicht zu hohe Intensitäten kann der letzte Term, der quadratisch von A_0 abhängt, gegen Terme erster Ordnung in A_0 vernachlässigt werden. Es bleibt der ungestörte Hamiltonoperator des Atoms (eckige Klammern in Gl. (5.8)) und zwei Terme

$$W_1 = -\frac{q}{m_e} \hat{p} \hat{A} \quad \text{und} \quad W_2 = -\frac{q}{m_e} \hat{S} \hat{B}, \quad (5.9)$$

deren relative Größenordnung über die Beträge ihrer Übergangsmatrixelemente¹ abgeschätzt werden können. Da die Matrixelemente von \hat{S} von der Größenordnung \hbar und die von \hat{B} nach Gleichung (5.4) von der Größenordnung kA_0 sind, folgt:

$$\frac{\langle j|W_2|i\rangle}{\langle j|W_1|i\rangle} \approx \frac{q\hbar k A_0/m_e}{qpA_0/m_e} = \frac{\hbar k}{p} \quad (5.10)$$

\hbar/p kann nach der Unschärferelation höchstens die Ausmaße des Atoms annehmen. Diese liegen im Bereich des Bohrradius $a_0 \approx 0,5 \cdot 10^{-10}$ m. Mit $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ folgt:

$$\frac{\langle j|W_2|i\rangle}{\langle j|W_1|i\rangle} \approx \frac{2\pi a_0}{\lambda} \ll 1 \quad (5.11)$$

da optische Wellenlängen im Bereich von $4-8 \cdot 10^{-7}$ m liegen. Die magnetische Wechselwirkung kann in diesem Fall gegenüber der elektrischen vernachlässigt werden.

Für den Fall der ebenen elektromagnetischen Welle (Gl. (5.2)) ergibt sich der verbleibende Wechselwirkungsoperator zu

$$W_1 = -\frac{q}{m_e} \hat{p}_x \left(A_0 e^{ik\hat{z}} e^{-i\omega t} + A_0^* e^{-ik\hat{z}} e^{i\omega t} \right). \quad (5.12)$$

Die Exponentialfunktion kann in Potenzen von $k\hat{z}$ entwickelt werden

$$e^{\pm ik\hat{z}} = 1 \pm ik\hat{z} - \frac{1}{2} k^2 \hat{z}^2 + \dots \quad (5.13)$$

Die Wechselwirkung kann nur in einem Gebiet der Größe der atomaren Elektronenverteilung stattfinden. Die Matrixelemente von \hat{z} sind demnach von der Größenordnung des Bohrradius und mit demselben Argument, das zur Abschätzung des Verhältnisses von elektrischer zu magnetischer Wechselwirkung benutzt wurde, folgt:

$$k \langle j|\hat{z}|i\rangle \approx \frac{2\pi a_0}{\lambda} \ll 1 \quad (5.14)$$

¹In Bezug auf zwei beliebige Zustände $|i\rangle, |j\rangle$.

Man kann somit, in guter Näherung, die Exponentialfunktion in Gl. (5.12) durch 1 ersetzen und erhält die elektrische Wechselwirkungsenergie:

$$W_{DE}(t) = \frac{q}{m_e \omega} \hat{p}_x E_0 \sin(\omega t). \quad (5.15)$$

In der Dipolnäherung wird somit die räumliche Variation des elektrischen Feldes im Bereich der atomaren Ausdehnung gegenüber der Amplitude A_0 bzw. E_0 vernachlässigt. Die Wechselwirkung entspricht der einer Ladung im homogenen elektrischen Feld, das sich zeitlich sinusförmig ändert.

Üblicherweise wird der Wechselwirkungsoperator nicht wie in Gleichung (5.15) dargestellt, sondern in der Form

$$W'_{DE}(t) = -q \hat{x} E_0 \cos(\omega t). \quad (5.16)$$

Diese kann mittels einer Eichtransformation des Vektorpotentials $\vec{A}(\vec{r}, t)$ erreicht werden, die in [59] ausgeführt wird. Der Ausdruck (5.16) kann direkt mit der klassischen Energie eines Dipols im elektrischen Feld verglichen werden. Diese ist durch

$$E_{pot} = -\vec{d}_{kl} \vec{E} \quad (5.17)$$

gegeben. Hierbei ist das elektrische Feld \vec{E} durch Gleichung (5.6) gegeben und das klassische Dipolmoment \vec{d}_{kl} zweier Punktladungen mit Ladung $+q$ und $-q$ im Abstand l ist

$$\vec{d}_{kl} = q \cdot \vec{l}, \quad (5.18)$$

wobei l für den Betrag des Verbindungsvektors \vec{l} zwischen den beiden Ladungen steht.

Die potentielle Energie ergibt sich im semiklassischen Bild, unter der Annahme, dass sich das Atom als Zweiniveausystem beschreiben lässt (mit den Zuständen $|i\rangle, |j\rangle$), mit Hilfe von Gl. (5.16) zu

$$\langle j | W'_{DE}(t) | i \rangle = -q \langle j | \hat{x} | i \rangle E_0 \cos(\omega t) \quad (5.19)$$

In Analogie zu Gl. (5.18) spricht man auch in der quantenmechanischen Beschreibung von einem Dipolmoment, das sich aus dem Übergangsmatrixelement des Ortsoperators und der Elementarladung $q = -e$ zusammensetzt:

$$d = q \langle j | \hat{x} | i \rangle. \quad (5.20)$$

5.2. Lichtkräfte

Eine quantitative Beschreibung der Atom-Licht Wechselwirkung in der Dipolnäherung kann über die optischen Blochgleichungen vorgenommen werden: Dabei wird ein Atom für gewöhnlich als Zweiniveausystem dargestellt, dessen Dynamik mittels der Schrödingergleichung beschrieben wird². Das elektromagnetische Feld wird klassisch behandelt. Solange das Experiment nicht mit sehr kleinen Intensitäten ausgeführt wird, bei denen die Quanteneffekte des Lichts³ zum Tragen kommen, liefert dieser semiklassische Ansatz ausreichend genaue Ergebnisse.

²Unter gewissen Umständen kann auch das verwendete ⁸⁷Rb als Zweiniveausystem approximiert werden, siehe Kapitel 5.3.

³Beispielhaft genannt seien hier der Effekt der Verschränkung und die Photonenstatistik.

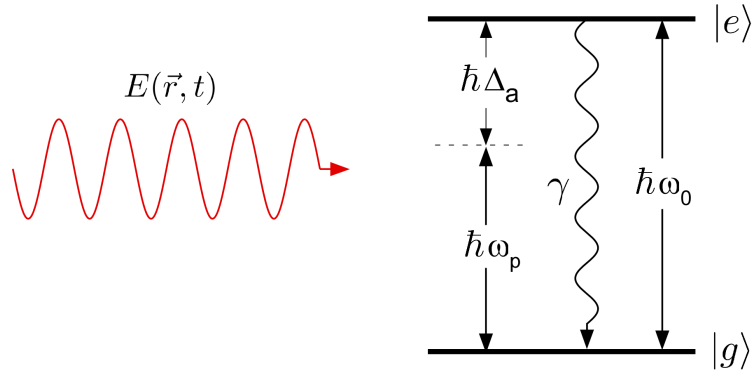


Abbildung 5.1.: Ein Zweiniveausystem, bestehend aus Grundzustand $|g\rangle$ und angeregtem Zustand $|e\rangle$, das mit einem monochromatischen Lichtfeld wechselwirkt, kann in der Dipolnäherung mit Hilfe der optischen Blochgleichungen beschrieben werden. Die spontane Zerfallsrate des angeregten Zustandes wird mit γ bezeichnet, die Verstimmung zur atomaren Resonanz mit $\Delta_a = \omega - \omega_0$.

Die Kraft, die auf ein Atom, das sich in einem monochromatischen Lichtfeld der allgemeinen Form

$$E(\vec{r}, t) = E_0(\vec{r}) \cos(\phi(\vec{r}) - \omega t) \quad (5.21)$$

befindet, ist durch

$$\vec{F} = \langle d \rangle \vec{\nabla} E(\vec{r}, t) \quad (5.22)$$

gegeben. Ein Dipol, dessen Gesamtladung verschwindet, erfährt in einem homogenen Feld keine Beschleunigung des Schwerpunktes⁴. Nur, wenn ein Gradient in der Feldamplitude oder ein Phasengradient existiert, wirkt eine Kraft. Um diese zu berechnen, benötigt man den Erwartungswert des Dipolmoments, der sich aus den optischen Blochgleichungen ergibt [37, 60]:

$$\langle d \rangle = d\Omega(\vec{r}) [u \cdot \cos(\phi(\vec{r}) - \omega t) - v \cdot \sin(\phi(\vec{r}) - \omega t)] \quad (5.23)$$

Mit

$$\Omega(\vec{r}) = \frac{dE_0(\vec{r})}{\hbar} \quad (5.24)$$

$$u = \frac{\Delta_a}{\Delta_a^2 + (\frac{\gamma}{2})^2 + \frac{1}{2}|\Omega|^2} \quad \text{und} \quad v = \frac{\frac{\gamma}{2}}{\Delta_a^2 + (\frac{\gamma}{2})^2 + \frac{1}{2}|\Omega|^2}, \quad (5.25)$$

wobei Δ_a die Verstimmung der Laserfrequenz zur atomaren Resonanzfrequenz angibt (vgl. Abb. 5.1).

Der Erwartungswert des Dipolmoments (5.23) setzt sich demnach aus zwei Anteilen zusammen, von denen einer mit der Amplitude u in Phase zum eingestrahlteten Lichtfeld (5.21) oszilliert. Der andere Anteil oszilliert mit der Amplitude v und einem Phasenversatz von $\frac{\pi}{2}$ relativ zum Lichtfeld. Mit den Gleichungen (5.21), (5.22) und (5.23) lässt sich die resultierende Kraft, nach zeitlicher Mittelung, in der Form

$$\vec{F} = \frac{1}{2} d\Omega(\vec{r}) [u \cdot \vec{\nabla} E_0(\vec{r})] + \frac{1}{2} d\Omega(\vec{r}) [v \cdot E_0(\vec{r}) \vec{\nabla} \phi(\vec{r})] \equiv \vec{F}_{Dip} + \vec{F}_{Str} \quad (5.26)$$

⁴Es wirkt allerdings ein Drehmoment.

schreiben. Der erste Term wird als Dipolkraft, der zweite als Strahlungsdruck bezeichnet. Für den Fall, dass die Verstimmung zur atomaren Resonanz Δ_a deutlich größer als die Zerfallsrate γ und die Rabifrequenz $\Omega(\vec{r})$ ist, folgt mit Gl. (5.25) für die Dipolkraft

$$|\vec{F}_{Dip}| \propto \frac{1}{\Delta_a}, \quad (5.27)$$

während sich für den Strahlungsdruck

$$|\vec{F}_{Str}| \propto \frac{1}{\Delta_a^2} \quad (5.28)$$

ergibt. Die Dipolkraft wird demnach für große Verstimmungen dominant. Im Experiment ist die Annahme $\Delta_a \gg \gamma, \Omega(\vec{r})$ in guter Näherung erfüllt (siehe Tabelle 5.1), der Einfluss des Strahlungsdrucks kann somit vernachlässigt werden. Strahlungsdruck kann anschaulich als der Impulsübertrag auf ein Atom bei der Absorption von Photonen verstanden werden. Das angeregte Niveau wird dabei besetzt und zerfällt anschließend spontan. Die Kohärenz zwischen einlaufendem und gestreutem Lichtfeld geht hierbei verloren. Die Dipolkraft hingegen kann als kohärente Umstreuung von Photonen zwischen zwei Lichtmoden beschrieben werden. Die resultierende Kraft, die auf die Atome wirkt, lässt sich aus einem Dipolpotential ableiten, das sich für ein Zweiniveausystem, welches mit linear polarisiertem Licht interagiert in der Form

$$U_{Dip}(\vec{r}) = \frac{2\pi c^2 \gamma}{\omega_0^3 \Delta_a} I(\vec{r}) \quad (5.29)$$

schreiben lässt (vgl. [61] Gl. (19)⁵), wobei die Intensität über

$$I(\vec{r}) = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 |E_0(\vec{r})|^2 \quad (5.30)$$

definiert ist⁶ (siehe Gl. (5.21)). Die Dipolkraft ergibt sich aus:

$$\vec{F}_{Dip} = -\vec{\nabla} U_{Dip}(\vec{r}). \quad (5.31)$$

Das Termschema des im Experiment verwendeten ^{87}Rb ist wesentlich komplexer, als ein reines Zweiniveausystem. Die Atome werden für das Experiment in den $5S_{1/2}, F = 2, m_F = 2$ Zustand präpariert, der den Grundzustand darstellt. Der Laser wird linear polarisiert auf die Atome eingestrahlt und ist rotverstimmt zur D_1 -Übergangsfrequenz (siehe Abb. 2.8). Der angeregte Zustand ($5P_{1/2}$) besteht aus zwei Hyperfeinzuständen, deren energetische Aufspaltung jedoch klein im Vergleich zur Verstimmung der Laserfrequenz ist (siehe Tabelle 5.1). Man kann deshalb den $5P_{1/2}$ Zustand effektiv als einen einzigen angeregten Zustand beschreiben. Der Frequenzabstand zu weiteren, höher liegenden Zuständen ist so groß, dass deren Einfluss vernachlässigt werden kann. Gleichung (5.29) kann demnach in guter Näherung verwendet werden.

⁵Für Laserfrequenzen, die kleiner sind als die atomare Übergangsfrequenz, ist das Dipolpotential negativ ($\Delta_a < 0$). Je höher die Intensität, desto niedriger ist demnach die potentielle Energie $U_{Dip}(\vec{r})$. Dies kann genutzt werden, um Atome z.B. im Fokus eines Gaußstrahls einzufangen. Man spricht in diesem Zusammenhang von einer „Dipolfalle“.

⁶In [61] wird die Intensität über $I = 2\varepsilon_0 c |E_0|^2$ definiert. Dementsprechend ist der Faktor 2 in diesem Fall im Nenner von Gl. (5.29) zu finden.

5.3. Der kollektive atomare Rückstoßlaser

Der experimentelle Aufbau zur Realisierung des kollektiven atomaren Rückstoßlasers ist schematisch in Abb. 5.2 dargestellt (siehe auch Abb. 2.9). Ein Pumplaser wird in einen Ringresonator eingekoppelt, in dessen Fokus ein Bose-Einstein Kondensat positioniert ist.

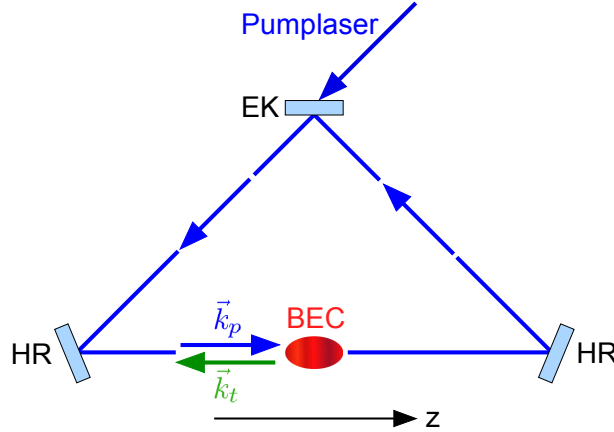


Abbildung 5.2.: Das BEC wird im Fokus zwischen den hochreflektierenden Spiegeln (HR) eines Ringresonators positioniert. Die Pumpmode (in blau dargestellt, Wellenvektor \vec{k}_p) wird mittels des Pumplasers besetzt und propagiert im Gegenuhrzeigersinn. Die Testmode (grüner Pfeil, Wellenvektor \vec{k}_t) durchläuft den Resonator im Uhrzeigersinn. Die z -Achse ist parallel zu \vec{k}_p gewählt. In einem eindimensionalen Modell, wird durch Umstreuung von Licht zwischen Pump- und Testmode nur Impuls entlang der z -Richtung transferiert.

Da die Laserfrequenz $\omega_p = ck_p$ weit verstimmt zur atomaren Übergangsfrequenz gewählt ist, kommt es vorwiegend zu kohärenter Umstreuung vom Pumplicht in die Testmode. Jeder Streuprozess stellt einen Zweiphotonen Raman Übergang dar, der in Abb. 5.3 skizziert ist. Dabei bleibt das angeregte Niveau unbesetzt⁷, es kommt aber zu einem Impulsübertrag auf das Atom, der durch $\hbar(\vec{k}_p - \vec{k}_t)$ gegeben ist, wobei \vec{k}_p und \vec{k}_t die Wellenvektoren der Pump- und der Testmode bezeichnen (vgl. Abb. 5.2). Mit diesem Impulsübertrag ist eine kinetische Rückstoßenergie verbunden:

$$E_r = \hbar\omega_r = \frac{(2\hbar k_p)^2}{2m} \equiv \frac{q^2}{2m} \quad (5.32)$$

wobei $q \equiv 2\hbar k_p$ gilt und m die Masse eines ^{87}Rb Atoms bezeichnet. Da die Wellenvektoren \vec{k}_p und \vec{k}_t antiparallel sind, gilt für den Betrag des Impulsübertrages $\hbar(|\vec{k}_p - \vec{k}_t|) \approx 2\hbar k_p$. Der Betrag des Wellenvektors ändert sich beim Streuprozess praktisch nicht. Änderungen der optischen Frequenz, die im THz Bereich liegt, um Beträge der Größenordnung der Rückstoßfrequenz (≈ 15 kHz), übersetzen

⁷Die kohärente Umstreuung an einem einzelnen Atom erfolgt ohne Phasenversatz zum einfallenden Lichtfeld (vgl. Gl. (5.21), (5.23), (5.26)). Somit findet kein Leistungsübertrag auf den schwingenden Dipol statt und die elektronische Konfiguration bleibt erhalten, man spricht deshalb auch von „Rayleigh-Streuung“.

sich mit $\omega = ck$ in eine relative Abweichung der Beträge der Wellenvektoren von $(k_p - k_T)/k_p \approx 10^{-11}$, die vernachlässigt werden kann. Im Folgenden wird das Symbol k für den Betrag der Wellenvektoren von Pump- und Testlicht verwendet. Die Rückstoßfrequenz ist demnach durch

$$\omega_r = 4 \frac{\hbar k^2}{2m} \quad (5.33)$$

gegeben.

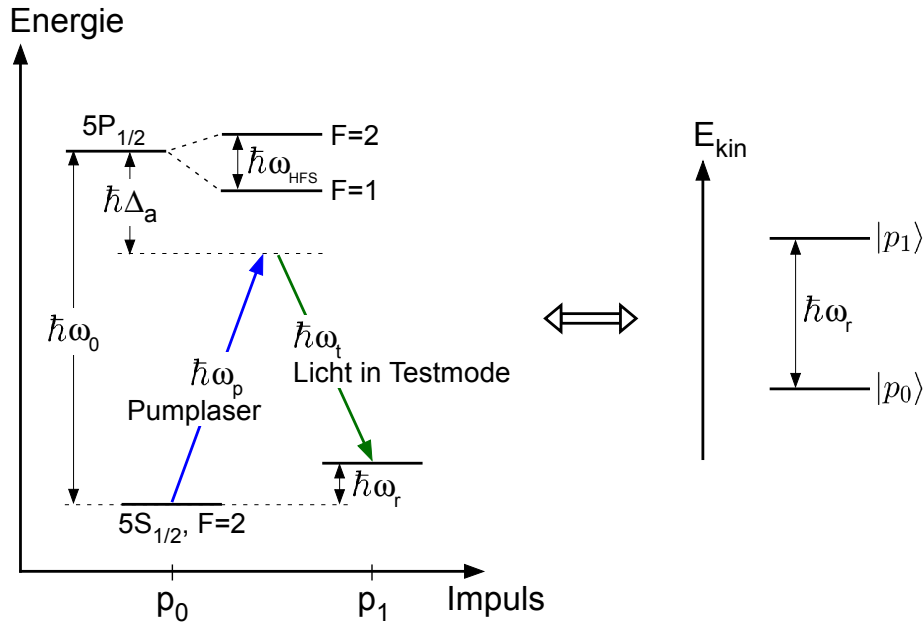


Abbildung 5.3.: Ein Zweiphotonen Raman Übergang, der mit einem fernverstimmen-ten Pumplaser angeregt wird, kann als effektives Zweiniveausystem beschrieben werden. Die elektronische Konfiguration des Atoms ist nach dem Streuprozess unverändert, die Impulszustände unterscheiden sich nur durch ihre kinetische Energie $\Delta E_{kin} = E_r = \hbar\omega_r$.

	Symbol	Wert
Atomare Übergangsfrequenz	ω_0	$2\pi \cdot 377,11$ THz
Frequenz des Pumplasers	ω_p	$2\pi \cdot 377,02$ THz
Verstimmung zur atomaren Resonanz	$ \Delta_a = \omega_p - \omega_0 $	$2\pi \cdot 91,64$ GHz
Maximale, resonante Rabi-Frequenz	Ω_{max}	$2\pi \cdot 3,4$ GHz
Frequenzdifferenz der Hyperfeinniveaus	ω_{HFS}	$2\pi \cdot 814,5$ MHz
Spontane Zerfallsrate des $5P_{1/2}$ Niveaus	γ	$2\pi \cdot 5,75$ MHz
Rückstoßfrequenz	ω_r	$2\pi \cdot 14,51$ kHz

Tabelle 5.1.: Experimentell relevante Frequenzen.

Tabelle 5.1 zeigt eine Übersicht der im Experiment auftretenden Frequenzen. Für die Verstimmung des Pumplasers zur atomaren Resonanz gilt $|\Delta_a| \gg \omega_{HFS}$. Das

Lichtfeld interagiert demnach mit beiden angeregten Hyperfeinniveaus des $5P_{1/2}$ Zustands, der somit effektiv als ein einziger Zustand beschrieben werden kann. Die Verstimmung Δ_a wird deshalb relativ zur Energie des $5P_{1/2}$ ohne Hyperfeinstrukturaufspaltung angegeben. Das in Abb. 5.3 im linken Teilbild gezeigte Schema vereinfacht sich somit zu einem Dreiniveausystem, bestehend aus den beiden Impulszuständen $|p_0\rangle$ und $|p_1\rangle$, beide mit der elektronischen Konfiguration $5S_{1/2}, F=2$ und dem $5P_{1/2}$ Zustand, der im Folgenden mit $|a\rangle$ bezeichnet wird.

In Analogie zu den optischen Blochgleichungen für ein Zweiniveausystem kann die Schrödingergleichung für ein Dreiniveausystem mit dem Ansatz

$$|\Psi(t)\rangle = c_0(t)|p_0\rangle + c_a(t)|a\rangle + c_1(t)|p_1\rangle \quad (5.34)$$

gelöst werden. In der Rechnung treten Terme auf, die mit der Differenz zwischen Pumplichtfrequenz und atomarer Übergangsfrequenz oszillieren (Δ_a) und Terme, die mit der Summenfrequenz ($\omega_p + \omega_0$) oszillieren. Letztere spielen für die Besetzungsdynamik keine Rolle, da sie im zeitlichen Mittel verschwinden, und werden deshalb vernachlässigt⁸. Mit der Annahme, dass zur Zeit $t = 0$ nur der Zustand $|p_0\rangle$ besetzt ist und mit der Näherung $\Delta_a^2 \gg \Omega_{0a}^2, \Omega_{a1}^2$, erhält man für die Besetzungen der einzelnen Niveaus:

$$\begin{aligned} |c_0(t)|^2 &= 1 - \left[\frac{\Omega_{eff}}{\tilde{\Omega}} \right]^2 \sin^2\left(\frac{1}{2}\tilde{\Omega}t\right) \\ |c_a(t)|^2 &= 0 \\ |c_1(t)|^2 &= \left[\frac{\Omega_{eff}}{\tilde{\Omega}} \right]^2 \sin^2\left(\frac{1}{2}\tilde{\Omega}t\right). \end{aligned} \quad (5.35)$$

Wobei

$$\tilde{\Omega} = \sqrt{\Omega_{eff}^2 + \delta_{korr}^2} \quad \text{mit} \quad \Omega_{eff} = \frac{\Omega_{0a}\Omega_{a1}}{2\Delta_a} \quad \text{und} \quad \delta_{korr} = \frac{\Omega_{a1}^2 - \Omega_{0a}^2}{4\Delta_a} \quad (5.36)$$

gilt⁹. Die zeitliche Dynamik des angeregten atomaren Zustandes kann somit für große Verstimmungen vernachlässigt werden und man erhält, für einen einzelnen Streuprozess, ein effektives Zweiniveausystem, bestehend aus den Impulszuständen $|p_0\rangle$ und $|p_1\rangle$. Eine ausführliche Rechnung zur sogenannten „adiabatischen Eliminierung des angeregten Niveaus“ ist bspw. in [62] zu finden.

Auch Atome im Zustand $|p_1\rangle$ können erneut Licht in die Resonatormoden umstreuen. Bei einer weiteren Umstreuung von der Pumpmode in die Testmode wird nochmals ein Impuls von $q = 2\hbar k$ auf die bereits bewegten Atome übertragen. Allgemein ist der Betrag des Impulses der Atome nach n Streuprozessen durch

$$p_n = nq \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (5.37)$$

gegeben. Abbildung 5.4 zeigt ein Termschema für die Impulszustände $|p_0\rangle, |p_1\rangle, |p_2\rangle$. Jeder einzelne Streuprozess ist ein Zweiphotonenprozess. Höhere Ordnungen, wie z.B. Vierphotonenprozesse, die den Übergang $|p_0\rangle \rightarrow |p_2\rangle$ direkt anregen könnten,

⁸Man spricht in diesem Zusammenhang von der sogenannten „rotating wave approximation“.

⁹ Ω_{0a} und Ω_{a1} bezeichnen die resonanten Einphotonenrabifrequenzen der Übergänge $|p_0\rangle \rightarrow |a\rangle$, bzw. $|a\rangle \rightarrow |p_1\rangle$. Beide Rabifrequenzen sind abhängig von der Pumpleistung und erreichen im Experiment einen Maximalwert von Ω_{max} (vgl. Tab. 5.1).

werden vernachlässigt. Diese Näherung ist zulässig solange das Dipolmoment des Atoms linear auf die Anregung durch das Lichtfeld reagiert, was aufgrund der großen Verstimmung zur atomaren Resonanz gut erfüllt ist. Dies spiegelt sich auch in Gl. (5.29) wieder, in der das Dipolpotential linear von der Intensität abhängt. Für zu große Intensitäten und/oder kleinere Verstimmungen Δ_a , muss diese Näherung allerdings zusammenbrechen, da das Atom kein unbegrenzt großes Dipolmoment ausbilden kann.

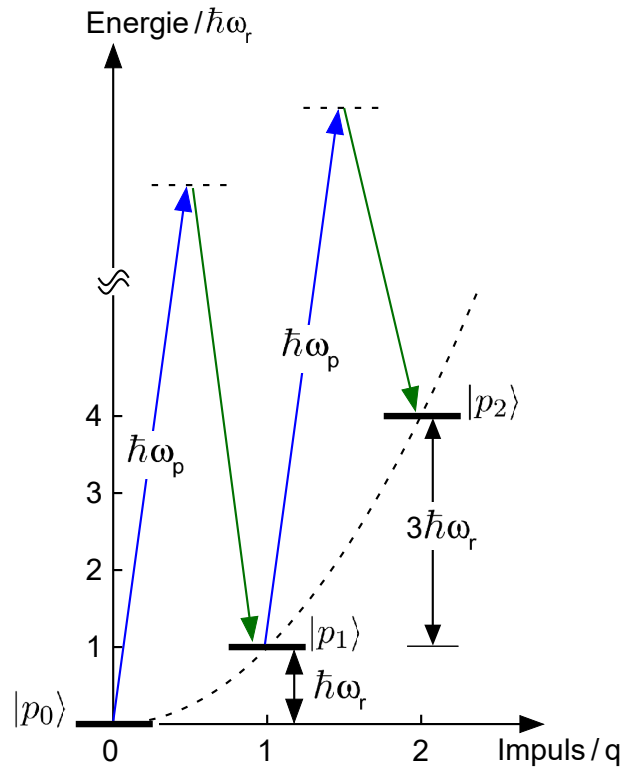


Abbildung 5.4.: Termschema für die ersten drei Impulszustände. Die kinetische Energie ist in Einheiten der Rückstoßenergie $\hbar\omega_r$ angegeben, der Impuls in Einheiten von $q = 2\hbar k$. Ein einzelner Zweiphotonenübergang erfolgt über ein virtuelles Niveau (vgl. Abb. 5.3), das nicht maßstabsgetreu eingezeichnet werden kann. Die quadratische Energie-Impuls Relation ist gestrichelt dargestellt.

Die kinetische Energie hängt quadratisch vom atomaren Impuls ab

$$E_n = \frac{(nq)^2}{2m} \quad (5.38)$$

wobei der Energienullpunkt auf die im Laborsystem ruhenden Atome im Zustand $|p_0\rangle$ gesetzt wurde. Die Frequenzdifferenz zwischen benachbarten Zuständen ist demnach

$$\Delta\omega(n) = \frac{E_{n+1} - E_n}{\hbar} = (2n+1)\omega_r \quad (5.39)$$

Mit zunehmendem $\Delta\omega$ wird der Streuprozess in die Resonatormode immer stärker unterdrückt, da die Frequenz des in die Testmode gestreuten Lichts einer Resonanzfrequenz des Resonators entsprechen muss. Ist die Linienbreite des Resonators

kleiner als die doppelte Rückstoßfrequenz, so kann bereits die Übergangswahrscheinlichkeit von $|p_1\rangle \rightarrow |p_2\rangle$ stark reduziert werden. In zukünftigen Messungen kommt ein Resonator zum Einsatz, der diese Anforderungen erfüllt (siehe Kapitel 3). Mit diesem sollte es möglich sein, gezielt einzelne Impulszustände miteinander zu koppeln, was die Möglichkeit der Untersuchung von Mehrniveausystemen mit wählbarer Niveauanzahl eröffnet. Da die Frequenzabstände nur im Bereich ω_r liegen (Gl. (5.39)), können die nötigen Lichtfrequenzen von einem einzigen Laser bereitgestellt werden¹⁰.

Die Messungen, die in Kapitel 6.7 vorgestellt werden, wurden jedoch mit einem Resonator mit einer Linienbreite von 1,3 MHz aufgenommen. Der Resonator unterstützt demnach eine Vielzahl von Streuprozessen. Insbesondere kann Licht aus der Testmode auch zurück in die Pumpmode gestreut werden. Da die Leistung des Pumplichts deutlich höher als die Leistung in der Testmode ist, sind diese Übergänge zwar unwahrscheinlicher, sie können jedoch nicht gänzlich vernachlässigt werden. Insbesondere muss der $|p_0\rangle \rightarrow |p_{-1}\rangle$ Übergang berücksichtigt werden, um die Messergebnisse korrekt zu beschreiben (siehe Kapitel 6).

Zusammenfassend kann somit festgehalten werden: Für jeden Streuprozess kann ein einzelnes Atom als Zweiniveausystem, bestehend aus den Zuständen $5S_{1/2}, F = 2$ und $5P_{1/2}$, in der Dipolnäherung beschrieben werden. Jeder Streuprozess ändert den Impuls des betreffenden Atoms um $\pm q = \pm 2\hbar k$, unabhängig vom Bewegungszustand des Atoms. Je kleiner die Linienbreite des Resonators ist, desto stärker wird die Besetzung höherer Impulszustände unterdrückt, da das gestreute Lichtfeld die Resonanzbedingung des Resonators, für zu große Frequenzverschiebungen $\Delta\omega(n)$, nicht mehr erfüllt.

Wie der Name schon vermuten lässt, reicht die Betrachtung eines einzelnen Atoms im Ringresonator zum Verständnis des kollektiven atomaren Rückstoßlasers nicht aus. Ein Kondensat in einem Ringresonator stellt ein rückgekoppeltes System dar, da die Lichtfelder die Schwerpunktsbewegung der Atome beeinflussen, wobei die relativen Abstände der Atome zueinander wiederum entscheidend für das rückgestreute Lichtfeld sind. Dieses ergibt sich aus der Summe aller gestreuten, miteinander interferierenden Felder. Durch die Überlagerung des Lichts in Pump- und Testmode bildet sich ein eindimensionales optisches Gitter aus, in dem sich die Atome aufgrund der Dipolkraft anordnen können. Dies erinnert an ein Kristallgitter bei dem es unter bestimmten Winkeln zu konstruktiver Interferenz der gestreuten Lichtfelder kommt. Im Gegensatz dazu sind im Falle von Atomen im Resonator die bevorzugten Streurichtungen durch die Resonatormoden definiert. Die Atome ordnen sich demnach gerade so in einem eindimensionalen Gitter an, dass sie die Braggbedingung für Umstreuung zwischen den Resonatormoden erfüllen. Dies hat eine Erhöhung der Lichtleistung in der Testmode zur Folge und erhöht somit den Kontrast des optischen Gitters, was wiederum eine stärker lokalisierende Dipolkraft nach sich zieht. Es handelt sich somit um einen selbstverstärkenden Prozess, der ein instabiles Verhalten des Systems zur Folge hat. Dieser Selbstverstärkung wirkt jedoch die bereits erläuterte Unterdrückung des gestreuten Lichtfeldes für hochangeregte Impulszustände entgegen. Wie sich in den folgenden Kapiteln herausstellen wird, legt die Verstimmung

$$\Delta = \omega_c - \omega_p \tag{5.40}$$

¹⁰Der relevante Frequenzbereich kann leicht mittels eines AOM abgedeckt werden.

der Resonanzfrequenz des Resonators ω_c relativ zur Pumplichtfrequenz ω_p fest, ob selbstverstärkende Streuprozesse in Gang gesetzt werden, die zu einem dynamisch instabilen Verhalten des Systems führen, oder nicht.

Im Sinne von Abb. 5.4 kann der erste Streuprozess, der überhaupt stattfindet und als Startpunkt für den oben beschriebenen selbstverstärkenden Prozess angesehen werden kann, als „spontane Emission“ in die noch unbesetzte Testmode verstanden werden¹¹. Auch diese findet bevorzugt in die Moden des Resonators statt, aufgrund des sogenannten Purcell Effektes [48, 64]. Das Verhältnis der Lichtleistung, die in den Resonator gestreut wird (P_c), zur Leistung, die in alle Raumrichtungen gestreut wird ($P_{4\pi}$) hängt von der Verstimmung Δ , der Feldzerfallsrate κ und dem sogenannten Kooperativitätsparameter η ab¹²:

$$\frac{P_c}{P_{4\pi}} = \eta \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + 4\Delta^2}. \quad (5.41)$$

Entspricht die Frequenz des gestreuten Lichts der Resonanzfrequenz des Resonators ($\Delta = 0$), so ist das Leistungsverhältnis nur durch

$$\eta = \frac{6F/\pi}{k^2 w_x w_y} \quad (5.42)$$

gegeben. Ausdruck (5.42) gilt für die Laufwelle eines Ringresonators (vgl. [48]). Eine hohe Finesse hat eine lange Zerfallszeit des Lichts zur Folge. In diesem Zeitraum interferiert das Licht im Resonator konstruktiv, im Gegensatz zu dem Anteil der nicht in den Resonator gestreut wird. Es kommt somit zu einer Leistungserhöhung im Resonator. Da diese zusätzliche Lichtleistung nur aus dem Pumplicht bezogen werden kann, muss es zu einer Überhöhung der Streurrate in die Resonatormode kommen¹³. Diese Überhöhung der Streurrate gilt auch für ein einzelnes Atom im Resonator und ist somit unabhängig von der nachfolgenden Strukturierung der atomaren Dichteverteilung. Trotzdem ist nach Ingangsetzung der Streuprozesse die Strukturierung der atomaren Dichteverteilung der dominierende Effekt, sodass auch mit Resonatoren mit relativ kleinen Purcellfaktoren gearbeitet werden kann (vgl. Tabellen 2.2 und 3.1).

Bemerkung:

Für einen linearen Resonator ist die Intensität im Bauch der Stehwelle viermal höher als die einer Laufwelle. Dementsprechend ist der Kooperativitätsparameter $\eta_s = \frac{24F/\pi}{k^2 w_x w_y}$, was äquivalent zur ursprünglichen Definition $f_P = \frac{3Q\lambda^3}{4\pi^2 V_M}$ von E. Purcell ist [64], wobei V_M das Modenvolumen des Resonators bezeichnet (Kap. 7.1.2). Die Güte Q des Resonators ist über die Umlauflänge L mit der Finesse F verknüpft: $Q = LF/\lambda$.

¹¹Möglicherweise trägt auch die sogenannte „Mie-Streuung“ am Kondensat zu den ersten Streuprozessen bei [63].

¹² η wird auch als Purcellfaktor bezeichnet.

¹³Eine alternative Beschreibung kann auch über Fermis goldene Regel gegeben werden, die besagt, dass die Übergangsrate von Energiequanten vom Atom in die Resonatormode proportional zur Modendichte ist. Letztere ist für einen Resonator im Resonanzfall höher als die Modendichte des Vakuums.

6. Stabilitätsdiagramm eines Bose-Einstein Kondensats in einem Ringresonator

Im vorigen Abschnitt wurde das Grundprinzip der selbstverstärkenden Strukturierung der atomaren Dichteverteilung erläutert. Frühere Experimente [31, 37, 47, 65, 66], welche die Dynamik ultrakalter Atome in einem Ringresonator untersuchten, wurden mit einer bestimmten Pumplaserfrequenz ω_p vorgenommen, die meistens möglichst genau der Resonatorresonanzfrequenz ω_c entsprechen sollte. Bei dieser Frequenz ist die Leistungseinkopplung in den Resonator am effektivsten. Eine systematische Untersuchung der Abhängigkeit der atomaren Dynamik von der Verstimmung $\Delta = \omega_c - \omega_p$ wurde erstmals im Rahmen der vorliegenden Arbeit vorgenommen. Insbesondere sollte die Frage beantwortet werden, welche Pumpleistungen¹ bei definierter Verstimmung Δ benötigt werden, um den selbstverstärkenden Strukturierungsprozess in Gang zu setzen. Der hierfür verwendete Versuchsaufbau ist in Abb. 2.9 dargestellt. Ein akusto-optischer Modulator erlaubt sowohl eine präzise Kontrolle der Pumplaserfrequenz, als auch der Laserleistung. Darüber hinaus kann der Modulator verwendet werden, um den Pumplaser für eine bestimmte Zeit, die aus technischen Gründen zu $T_{ww} = 50 \mu\text{s}$ gewählt wurde, einzustrahlen. T_{ww} wird im Folgenden als „Wechselwirkungszeit“ bezeichnet.

Ob der Strukturierungsprozess innerhalb der fixen Wechselwirkungszeit gestartet wird, kann mit Absorptionsabbildungen der atomaren Verteilung festgestellt werden.

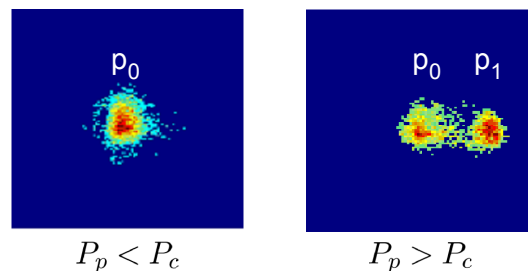


Abbildung 6.1.: Absorptionsabbildungen des BEC bei einer positiven Verstimmung $\Delta > 0$ nach einer Wechselwirkungszeit von $T_{ww} = 50 \mu\text{s}$. Die Pumpleistung P_p , muss einen bestimmten kritischen Wert P_c überschreiten, damit es zur Besetzung des $|p_1\rangle$ Zustandes kommt. Zur Übersichtlichkeit wurden die Bilder vom thermischen Untergrund bereinigt.

¹Der Begriff „Pumpleistung“ bezeichnet hier die Lichtleistung *im Resonator*, nicht die direkte Leistung des Pumplasers. Für einen Resonator mit angepasster Impedanz und hoher Finesse F ist die umlaufende Leistung um den Faktor $\approx F/\pi$ relativ zur Eingangsleistung überhöht [67].

Bei dieser Methode wird die Magnetfalle, in der die Atome präpariert werden, nach der Wechselwirkung mit dem Lichtfeld, abgeschaltet. Die Atome befinden sich für ca. $15 \mu\text{s}$ im freien Fall, bevor sie, mittels eines Abbildungslasers und einer CCD Kamera, detektiert werden. Diejenigen Atome, die Licht in die Resonatormoden gestreut haben, tragen einen Impuls, der sich während der Fallzeit in eine räumliche Separation übersetzt. Zwei derartige Absorptionsbilder sind in Abb. 6.1 dargestellt. Beide wurden bei identischer Verstimmung $\Delta > 0$ und Wechselwirkungszeit T_{ww} , jedoch mit unterschiedlicher Pumpleistung P_p aufgenommen und repräsentieren die Impulsverteilung der Atome. Mit Hilfe solcher Absorptionsabbildungen können die normierten Besetzungen der einzelnen Impulsmoden, im Folgenden mit $|c_n|^2$ bezeichnet, berechnet werden (siehe Kap. 2.5). Ist die Pumpleistung zu gering, so kann keine Veränderung der Kondensatsbesetzung festgestellt werden. Erst ab einem kritischen Wert $P_p = P_c$ ist eine Besetzung des ersten Impulszustandes ($|c_1|^2 \neq 0$) nachweisbar. Aufgrund der begrenzten Nachweisempfindlichkeit der Absorptionsabbildung wurde die kritische Pumpleistung als diejenige Leistung definiert, bei der die Besetzung der Kondensatsmode² noch $70\% \pm 5\%$ der Gesamtatomzahl beträgt. Für verschiedene Verstimmungen Δ kann so, mit Hilfe von Absorptionsabbildungen, die jeweilige kritische Pumpleistung bestimmt werden³.

Die Ergebnisse sind in Abb. 6.2 dargestellt. Die Zunahme der kritischen Pumpleistung mit dem Betrag der Verstimmung, ist nicht verwunderlich, da das gestreute Testlicht die Resonanzbedingung mit zunehmendem $|\Delta|$ immer schlechter erfüllt. Bemerkenswerterweise ist das Stabilitätsdiagramm aber stark asymmetrisch. Die Verstimmung der Pumplichtfrequenz zur Resonanzfrequenz der Resonatormode hat demnach einen entscheidenden Einfluss auf die atomare Dynamik. Für große positive Verstimmungen scheint die kritische Leistung linear anzusteigen, auch für Werte, die größer als die Linienbreite des Resonators sind⁴. Für negative Δ steigt die kritische Pumpleistung auf der Skala der Resonatorlinienbreite stark an.

Für Pumpleistungen $P_p < P_c$ kann das System während der Wechselwirkungszeit als stabil angesehen werden. Für Pumpleistungen $P_p > P_c$ beginnt eine komplizierte, nichtlineare Dynamik. Beide Regime können mit den sogenannten „CARL Gleichungen“ (6.7) beschrieben werden, die in den folgenden Kapiteln näher behandelt werden.

²Diese wird mit $|c_0|^2$ bezeichnet.

³Die Umrechnung der außerhalb des Resonators gemessenen Lichtleistung in Pumpleistung im Resonator wird mittels der Transmissionswerte der Spiegel vorgenommen (siehe Tabelle 2.2).

⁴Diese liegt bei 1,3 MHz und entspricht somit ca. $90 \omega_r$.

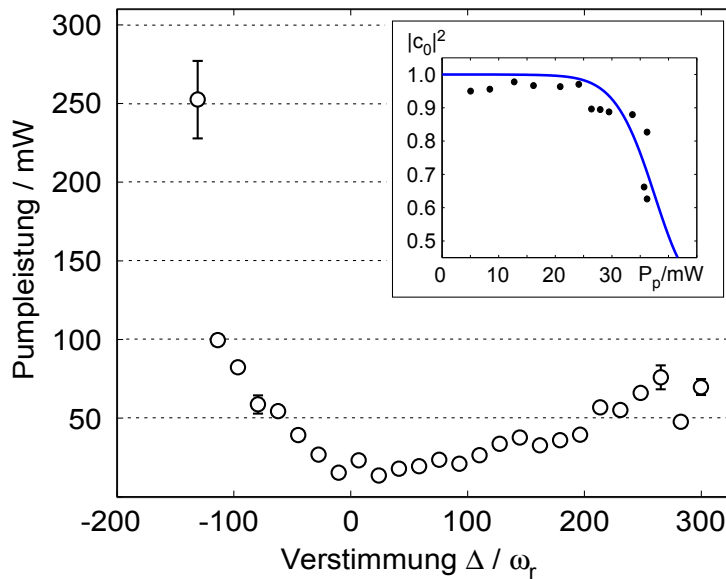


Abbildung 6.2.: *Stabilitätsdiagramm:*

Die Datenpunkte geben die kritische Pumpleistung P_c im Resonator, bei gegebener Verstimmung $\Delta = \omega_c - \omega_p$ in Einheiten der Rückstoßfrequenz ($\omega_r = 2\pi \cdot 14,5 \text{ kHz}$) an. Jeder Messpunkt stellt den Mittelwert von drei Messungen dar. Die Standardabweichungen sind eingezeichnet, verschwinden jedoch meist hinter den Datenpunkten. Oben rechts ist die normierte Besetzung der Kondensatsmode für verschiedene Pumpleistungen bei einer Verstimmung von $\Delta = 120 \omega_r$ zusammen mit dem nach Gl. (6.7) simulierten Verlauf (blaue Kurve) dargestellt. Die Messungen wurden mit einer mittleren Anzahl von $(34\,000 \pm 6560)$ kondensierten Atomen durchgeführt.

6.1. Quantenmechanisches Modell

Wie in Kapitel 5.3 gezeigt wurde, können sowohl der Einfluss des Strahlungsdrucks, als auch die inneren Freiheitsgrade der Atome in guter Näherung vernachlässigt werden, sofern die Pumplichtfrequenz weit verstimmt zur atomaren Resonanz ist⁵. Des Weiteren wird die interatomare Wechselwirkung durch s -Wellen Stöße, sowie der Einfluss der magnetischen Falle vernachlässigt. Eine theoretische Beschreibung, die die interatomare Wechselwirkung berücksichtigt, ist in [68] zu finden. Der energetische Beitrag der Magnetfalle kann als konstant angenommen werden und beeinflusst die atomare Dynamik somit nicht⁶.

Mit diesen Näherungen nimmt der Hamiltonoperator des Systems, in zweiter Quantisierung, die einfache Form

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{ww} \quad (6.1)$$

⁵Es muss $\Delta_a \gg \gamma, \Omega_{max}$ gelten, vgl. Tabelle 5.1.

⁶Atome, die Licht in die Testmode umstreuen, bewegen sich mit Geschwindigkeiten auf der Größenordnung $\approx 1 \text{ cm/s}$. Die während der Wechselwirkungszeit ($50 \mu\text{s}$) zurückgelegten Strecken sind demnach $\approx 0,5 \mu\text{m}$. Auf dieser Skala kann das magnetische Potential (um sein Minimum) als konstant betrachtet werden.

an. Der Operator \hat{H}_0 ist hierbei durch

$$\hat{H}_0 = \int \left[\hat{\Psi}^\dagger \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} \right) \hat{\Psi} + \hbar \Delta \left(\hat{A}_p^\dagger \hat{A}_p + \hat{A}^\dagger \hat{A} \right) \right] dV \quad (6.2)$$

gegeben. Der erste Term ist die Operatordarstellung der kinetischen Energie der Atome, der zweite beschreibt die Beiträge von Pump- und Testlicht. Der Energienullpunkt wurde hierbei auf die Energie des Pumplichtfeldes gesetzt. Das Materiefeld wird durch den Operator $\hat{\Psi}$ repräsentiert, der Feldoperator des Pumplichts wird im Folgenden mit \hat{A}_p , der des Testlichts mit \hat{A} bezeichnet.

Der zweite Term in Gl. (6.1) beinhaltet die Dipolwechselwirkung, die nach Gl. (5.29) proportional zur Intensität im Ringresonator ist⁷.

$$\hat{H}_{ww} = \hbar U_0 \int \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \left(\hat{A}_p + \hat{A} \right) \left(\hat{A}_p^\dagger + \hat{A}^\dagger \right) dV \quad (6.3)$$

Die Lichtfelder werden als ebene Wellen angesetzt und dementsprechend gilt für die Operatoren in der Heisenbergdarstellung:

$$\hat{A}_p = \hat{a}_p(t) e^{ikz} \quad \text{und} \quad \hat{A} = \hat{a}(t) e^{-ikz} \quad (6.4)$$

mit

$$\hat{a}_p(t) = \hat{a}_p(0) e^{-i\omega_p t} \quad \text{und} \quad \hat{a}(t) = \hat{a}(0) e^{-i\omega_t t} \quad (6.5)$$

wobei ω_t die Lichtfrequenz der Testmode bezeichnet.

Mittels der Heisenberg-Gleichungen kann ein Gleichungssystem in zweiter Quantisierung aufgestellt werden, das die Dynamik des Systems beschreibt (siehe Gl. (7.65)). Die vollständige quantenmechanische Behandlung, bei der sowohl die Amplitude des Materiefeldes, als auch die des Lichtfeldes quantisiert ist, ist nur dann sinnvoll, wenn in den zu beschreibenden Messungen einzelne Photonen und einzelne Atome (Zustandsselektiv) detektiert werden. Der experimentelle Aufbau ist für Messungen dieser Art nicht ausgelegt, deshalb kann die Beschreibung in der sogenannten „mean field“ Näherung vorgenommen werden. In der mean field Näherung werden die Operatoren des Lichtfeldes durch komplexe Zahlen und die Materiefeldoperatoren $\hat{\Psi}$ durch eine makroskopische, komplexe Wellenfunktion ψ ersetzt⁸. Die Wellenfunktion wird als Linearkombination aus Impulseigenzuständen angesetzt

$$\psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t) e^{2inkz} \quad (6.6)$$

Die Besetzung eines bestimmten Impulszustandes $|p_n\rangle$ ist demnach durch $|c_n|^2$ gegeben. Benachbarte Impulszustände unterscheiden sich um $2\hbar k$.

In dieser Näherung erhält man ein Gleichungssystem für die Koeffizienten $c_n(t)$ und die komplexe Größe $a(t)$, deren Betragsquadrat proportional zur Intensität in der Testmode ist:

$$\begin{aligned} \dot{c}_n(t) &= -in^2 \omega_r c_n - iU_0 a_p (c_{n-1} a^* + c_{n+1} a) \\ \dot{a}(t) &= [-i(\Delta + U_0 N_a) - \kappa] a - iU_0 a_p \sum_n c_n^* c_{n-1} \end{aligned} \quad (6.7)$$

⁷Diese ergibt sich im klassischen Bild aus dem Betragsquadrat der Summe der Felder und wird in zweiter Quantisierung in einen Term der Form $(\hat{A}_p + \hat{A}) \cdot (\hat{A}_p + \hat{A})^\dagger$ übersetzt.

⁸In der mean field Näherung wird das gesamte atomare Ensemble durch *eine einzige* Wellenfunktion beschrieben. Effekte, wie Quantenfluktuationen, Korrelationen und Verschränkungen werden vernachlässigt, siehe auch Kap. 7.2.1.

Das Pumpfeld wurde hierbei als zeitlich konstant und reell angenommen und stellt somit die Phasenreferenz dar. Da die Einschwingzeit des Pumpfeldes im Resonator klein ist im Vergleich zur Wechselwirkungszeit und stets $|a_p|^2 \gg |a|^2$ gilt, kann die Dynamik des Pumplichts vernachlässigt werden. Außerdem sind die Gleichungen in einem Bezugssystem angegeben, das mit der optischen Frequenz ω mitrotiert. Eine ausführliche Herleitung der Gleichungen (6.7) ist in Kapitel 7.2 zu finden. N_a gibt die Zahl der kondensierten Atome an. Die Atome beeinflussen die optische Weglänge des Lichts im Resonator. Dies wird über den Faktor $U_0 N_a$ berücksichtigt, der die Frequenzverschiebung des Lichts im Resonator aufgrund der Atome angibt. Die Rückstoßfrequenz ist durch $\omega_r = \frac{4\hbar k^2}{2m}$ gegeben. Der Zerfall des Lichtfeldes in der Testmode wird durch den zusätzlich eingefügten Term $(-\kappa a)$ berücksichtigt, wobei κ die Zerfallsrate des Feldes bezeichnet.

Die Konstante

$$U_0 = \frac{g^2}{\Delta_a} \quad (6.8)$$

setzt sich aus der Dipol-Kopplungskonstanten g und der Verstimmung zur atomaren Resonanz Δ_a zusammen. In die Dipol-Kopplungskonstante g geht sowohl das effektive Dipolmatrixelement \tilde{d} , als auch die Standardabweichung des Vakuumfeldes E_{Vak} für einen Ringresonator ein:

$$g = \frac{\tilde{d} \cdot E_{Vak}}{\hbar} \quad (6.9)$$

Da die Verstimmung der Frequenz des Pumpaserlichts zur D_1 -Übergangsfrequenz größer als die Hyperfeinstrukturaufspaltung des $5P_{1/2}$ Zustandes ist und das Licht im Resonator eine lineare Polarisation aufweist, gilt für das effektive Dipolmatrixelement [69]:

$$|\tilde{d}|^2 = \frac{1}{3} |d_{ij}|^2 = \frac{1}{3} \frac{3\pi\hbar\gamma\varepsilon_0}{k_{D_1}^3} \quad (6.10)$$

wobei $d_{ij} = \sqrt{\frac{3\pi\hbar\gamma\varepsilon_0}{k_{D_1}^3}}$ für das Dipolmatrixelement⁹ des $5S_{1/2} \rightarrow 5P_{1/2}$ Übergangs steht. Hierbei bezeichnet ε_0 die Dielektrizitätskonstante des Vakuums, $k_{D_1} = 2\pi/\lambda_{D_1}$ die Wellenzahl und $\gamma = 2\pi \cdot 5,75$ MHz die Zerfallsrate des D_1 -Übergangs. Somit folgt:

$$\tilde{d} = \sqrt{\frac{\pi\hbar\gamma\varepsilon_0}{k_{D_1}^3}} \quad (6.11)$$

Die Standardabweichung des Vakuumfeldes eines Ringresonators ergibt sich zu:

$$E_{Vak} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_c}{2\varepsilon_0 V_M}} \quad (6.12)$$

ω_c bezeichnet die Resonanzfrequenz- und $V_M = \frac{\pi}{2} w_x w_y L$ das Modenvolumen des Resonators. Damit folgt eine Dipol-Kopplungskonstante von¹⁰:

$$g = \sqrt{\frac{\omega \tilde{d}^2}{\hbar\varepsilon_0 V_M}} = 2\pi \cdot 70,0 \text{ kHz} \quad (6.13)$$

⁹Dieses wird verwendet, um die Wechselwirkung eines Zweiniveausystems mit unpolarisiertem Licht zu beschreiben. In [69] wird es als „reduziertes Matrixelement“ bezeichnet.

¹⁰Die Laserfrequenz ω entspricht praktisch der Resonanzfrequenz ω_c des Resonators. Für die Berechnung von g ist die Verstimmung Δ irrelevant.

Nähere Erläuterungen zum effektiven Dipolmoment, dem Vakuumfeld und dem Modenvolumen sind in Kapitel 7.1 zu finden.

Experimentell kann die Konstante U_0 bei bekannter Teilchenzahl N_a aus der Verschiebung der Resonanzfrequenz des Resonators bestimmt werden. Derartige Messungen wurden bereits in früheren Experimenten mit demselben Resonator durchgeführt. Die Ergebnisse sind in [70] zu finden. Die experimentell bestimmte Dipol-Kopplungskonstante beträgt¹¹

$$g_{mess} = 2\pi \cdot 116,5 \text{ kHz} \quad (6.14)$$

Damit ergibt sich:

$$U_0^{mess} = \frac{g_{mess}^2}{\Delta_a} = -2\pi \cdot 0,15 \text{ Hz} \quad (6.15)$$

für $\Delta_a = -2\pi \cdot 91,64 \text{ GHz}$. Dieser Wert wurde für alle numerischen Simulationen, die in Kapitel 6.2 vorgestellt werden, verwendet. Das Verhältnis der Dipol-Kopplungskonstanten g_{mess} zu g beträgt

$$\frac{g_{mess}}{g} = 1,66 \quad (6.16)$$

Das Verhältnis liegt nahe am Faktor $\sqrt{3} \approx 1,73$, der im Dipolmoment d_{ij} für unpolarisiertes Licht auftaucht. Wie in Kapitel 7.1 jedoch dargelegt wird, ist eine Korrektur des Dipolmoments (Gl. (6.10)) aufgrund des linear polarisierten Lichts im Resonator unumgänglich. Die Abweichung zwischen der theoretisch zu erwartenden (6.13) und gemessenen Dipol-Kopplungskonstanten (6.14) bleibt somit Gegenstand weiterer Untersuchungen.

6.2. Numerische Simulationen der CARL Gleichungen

Zum Vergleich des quantenmechanischen Modells mit dem in Abb. 6.2 gezeigten Datensatzes wurden numerische Simulationen der Carl Gleichungen (6.7) durchgeführt. Die Leistungserfallszeit der verwendeten Low Finesse Mode beträgt $T_{res} = 0,1 \mu\text{s}$. Das Feld im Resonator benötigt auch beim Einschalten des Lasers eben diese Zeit, um einen Gleichgewichtszustand im Resonator zu erreichen, unabhängig von den Atomen. Da T_{res} jedoch deutlich kleiner als die Einstrahldauer des Pumpfeldes ist ($T_{ww} = 50 \mu\text{s}$), sind Einschalteneffekte im Gleichungssystem (6.7) nicht berücksichtigt. Wie in Abschnitt 6.1 dargelegt wurde, werden sowohl Laser- als auch Materiewellen als ebene Wellen angesetzt. Das Pumplicht ist jedoch ein Gaußstrahl in dessen Zentrum das Kondensat präpariert wird. Da das Kondensat einen Thomas Fermi Radius aufweist, der deutlich kleiner als der Durchmesser des Pumpstrahles¹² ist, ist eine Beschreibung des Pumplichts als ebene Welle zulässig. Jedoch ist darauf zu achten, dass die gemessene Lichtleistung der mittleren Leistung des Gaußstrahles entspricht. Das Kondensat interagiert jedoch mit dem Licht im Zentrum der TEM_{00} Mode, dessen Leistung nach Gl. (7.28) gerade doppelt so groß ist, wie die gemessene Lichtleistung. Diese Korrektur wurde in den numerischen Simulationen berücksichtigt.

¹¹In [70] wurde eine Frequenzverschiebung von $NU_0 \approx 2\pi \cdot 30 \text{ kHz}$ gemessen. Mit einer Atomzahl von $N = 1,9 \cdot 10^6$ und einer Verstimmung von $\Delta'_a = -0,86 \text{ THz}$ relativ zur $D1$ -Linie folgt (6.14).

¹²Der Thomas Fermi Radius des Kondensats beträgt in der x, y -Ebene ca. $7 \mu\text{m}$ (vgl. Abb. 2.9), der mittlere Pumpstrahlradius am Ort des Kondensats ca. $100 \mu\text{m}$.

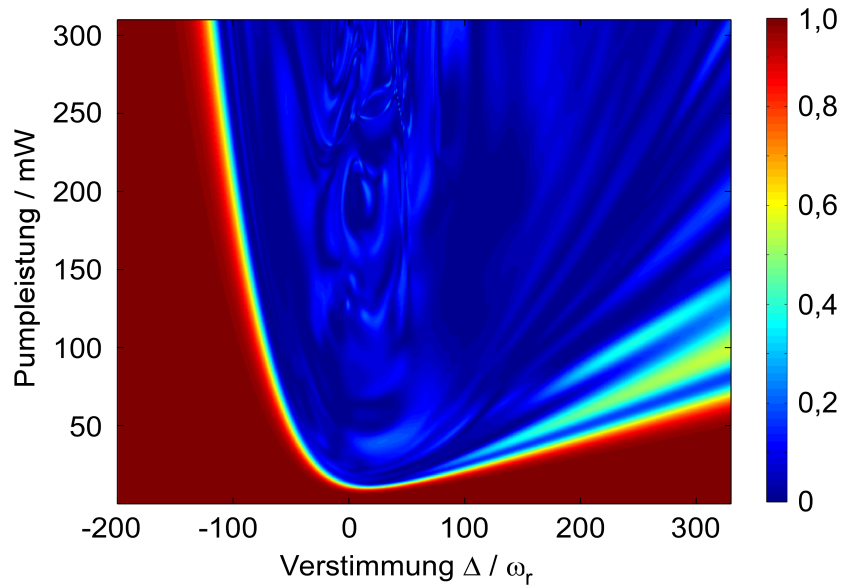


Abbildung 6.3.: Die Farbkodierung zeigt die berechnete Besetzung der Kondensatsmode $|c_0|^2$ nach einer Wechselwirkungszeit von $50 \mu\text{s}$.

Simulationsparameter: Gesamtatomzahl: $N_{ges} = 85\,000$, Anzahl kondensierter Atome: $N_a = 34\,000$, Startbesetzung der Testmode: $|a(0)|^2 = 1$. Die Simulation wurde mit 12 dynamischen Variablen und einer Auflösung von 600×600 Punkten durchgeführt.

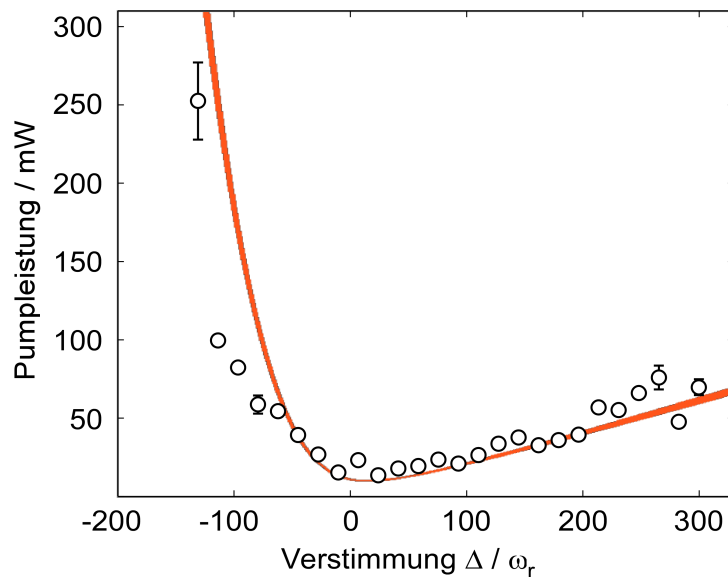


Abbildung 6.4.: Innerhalb des orange gefärbten Bandes liegt die simulierte Besetzung der Kondensatsmode Bereich $0,65 - 0,75$. Dies entspricht dem Kriterium der kritischen Pumpleistung, welches bei den Messungen angewendet wurde. Die Abweichungen sind hauptsächlich auf die stark schwankenden Atomzahlen (im Bereich $\pm 19\%$) während der Messung zurückzuführen. Die Simulationsparameter entsprechen denen von Abb. 6.3.

Die Summe in Gl. (6.7) berücksichtigt prinzipiell Impulsmoden von $n = -\infty$ bis $+\infty$. Für eine numerische Simulation kann nur mit einer endlichen Anzahl von Impulsmoden gerechnet werden. Abbildung 6.3 zeigt das Ergebnis einer Simulation, bei der 11 Impulsmoden ($n = -5$ bis $+5$) berücksichtigt wurden. Gezeigt ist die relative Besetzung der Kondensatsmode $|c_0|^2$ nach einer Wechselwirkungszeit von $50 \mu\text{s}$ für verschiedene Pumpleistungen in Abhängigkeit der Verstimmung Δ . Das simulierte Stabilitätsdiagramm zeigt ebenfalls einen stark asymmetrischen Verlauf in Bezug auf Δ .

Die Atomzahlen wurden mittels Absorptionsabbildungen bestimmt (vgl. Abb. 2.13). Für die Berechnung der Startbesetzungen der Impulszustände wurde die energetische Verteilung der thermischen Atome in der Magnetfalle nach der Maxwell-Boltzmann-Verteilung berechnet. Die hierfür benötigte Anzahl thermischer Atome kann durch $N_{th} = N_{ges} - N_a$ bestimmt werden. Es zeigt sich, dass die Startbesetzungen der Impulszustände mit $n \neq 0$ sehr klein sind ($< 0,3\%$).

Als einziger freier Parameter wurde die Startbesetzung der Testmode derart gewählt, dass eine möglichst gute Übereinstimmung mit den Messdaten erreicht wird. Die beste Übereinstimmung wird mit $|a(t=0)|^2 = 1$ erreicht. Der Bereich, in dem die Besetzung der Kondensatsmode laut Simulation 0,65 bis 0,75 beträgt, ist in Abb. 6.4 zusammen mit den Messergebnissen dargestellt.

6.2.1. Simulation mit vier dynamischen Variablen

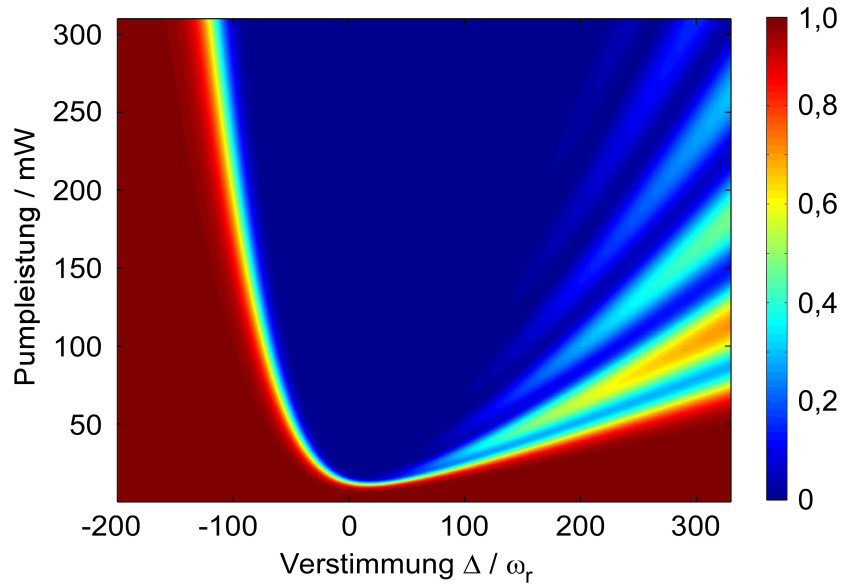


Abbildung 6.5.: Die Farbkodierung zeigt die berechnete Besetzung der Kondensatsmode $|c_0|^2$ nach einer Wechselwirkungszeit von $50 \mu\text{s}$.

Simulationsparameter: $N_{ges} = 85\,000$, $N_a = 34\,000$, $|a(0)|^2 = 10$. Die Simulation wurde mit vier dynamischen Variablen und einer Auflösung von 800×800 Punkten durchgeführt.

Die durchgeführten Experimente wurden mit relativ kurzen Wechselwirkungszeiten durchgeführt, sodass nur die Besetzung des Kondensats sowie des ersten Impulszustandes detektiert werden konnte. Es liegt somit nahe, die Gleichungen (6.7) für

$n = 0, 1$ zu betrachten. Die dynamischen Variablen sind dementsprechend durch c_0, c_1 und a gegeben. Eine Simulation für diesen Fall liefert jedoch ein symmetrisches Stabilitätsdiagramm und ist somit für eine Beschreibung der Messergebnisse nicht geeignet. Ebenso führt ein Modell, das die Variablen c_0, c_1, c_2 und a berücksichtigt, zu einem symmetrischen Diagramm. Wählt man jedoch c_{-1}, c_0, c_1 und a als dynamische Variablen, liefert eine numerische Simulation ein asymmetrisches Stabilitätsdiagramm, das in Abb. 6.5 dargestellt ist.

Ein Vergleich mit dem Simulationsergebnis aus Abb. 6.3 zeigt eine starke Ähnlichkeit im rot gefärbten Bereich, in dem die Besetzung der Kondensatsmode nahezu 1 ist. Erst für Pumpleistungen, bei denen die Besetzung merklich von 1 abweicht, zeigen sich Unterschiede. Insbesondere gibt dieses vereinfachte Modell nicht die komplizierten Strukturen aus Abb. 6.3 wieder und die Besetzungssoszillationen für positive Verstimmungen sind stärker ausgeprägt. Außerdem wurde eine Startbesetzung der Testmode von $|a(t=0)|^2 = 10$ gewählt, um eine möglichst gute Übereinstimmung mit den Messdaten zu erreichen.

Ein Vergleich von Abb. 6.4 mit Abb. 6.6 zeigt, dass auch dieses vereinfachte Modell geeignet ist, um den asymmetrischen Verlauf der Messdaten zu beschreiben. Allerdings taucht hier ein zweiter Bereich auf in dem die berechnete Besetzung zwischen 0,65 und 0,75 liegt, der in Abb. 6.4 nicht existiert.

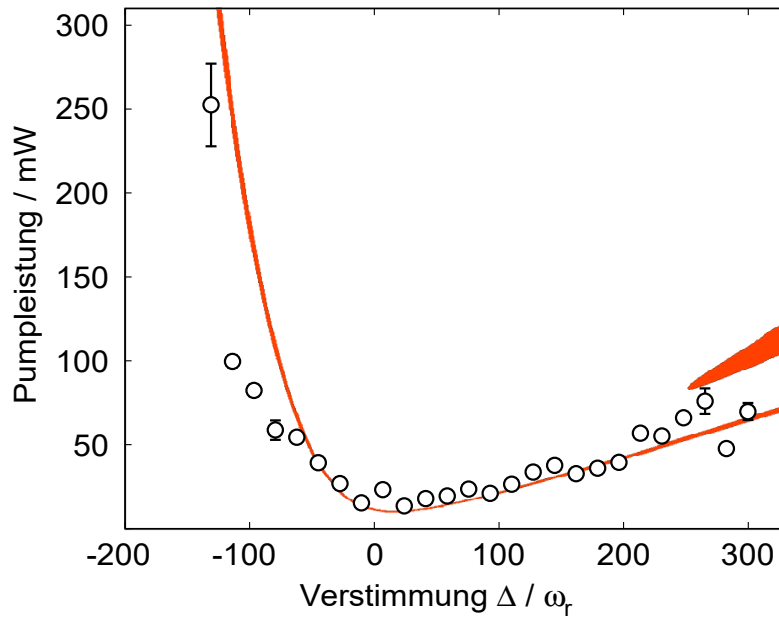


Abbildung 6.6.: Berechnete Besetzung der Kondensatsmode im Bereich 0,65 – 0,75 im Vergleich mit den Messdaten. Die Simulationsparameter entsprechen denen von Abb. 6.5.

Für die Berechnung der in Abb. 6.5 und Abb. 6.6 gezeigten Simulationsergebnisse wurde die mittlere gemessene Atomzahl von $N_a = 34\,000$ verwendet. Die Standardabweichung der kondensierten Atomzahlen für den gezeigten Datensatz beträgt ± 6560 Atome. Um den Einfluss der Atomzahlschwankungen in die Berechnung mit einzubeziehen, wurden dementsprechend Simulationen mit 40 560 und 27 440 kon-

densierten Atomen durchgeführt. Diese legen die Grenzen des zu erwartenden Bereiches fest, in dem die Besetzung der Kondensatsmode 0,65 bis 0,75 beträgt, sofern die jeweilige Atomzahl innerhalb der Standardabweichung liegt. Der gesamte Bereich ist, zusammen mit den Messdaten, in Abb. 6.7 gezeigt. Insbesondere für positive Verstimmungen zeigen die Daten eine gute Übereinstimmung mit dem Ergebnis des Vier-Moden-Modells.

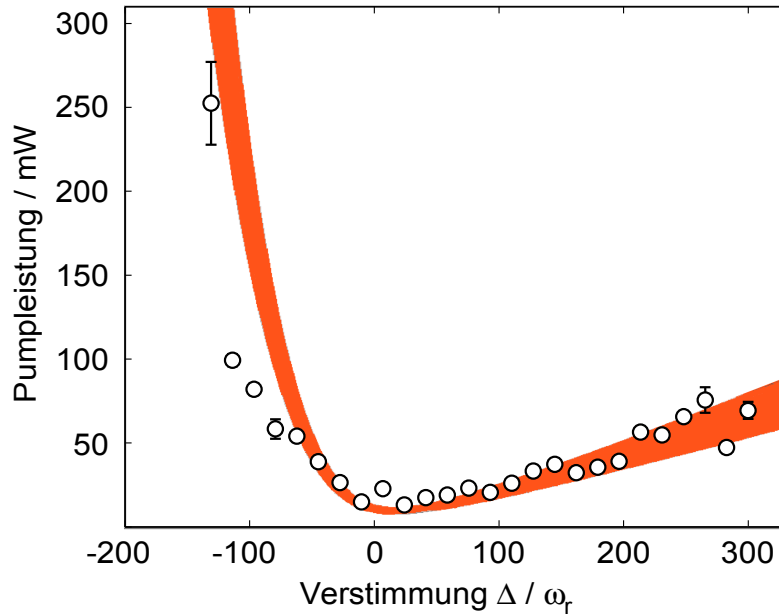


Abbildung 6.7.: Simulierte Besetzung der Kondensatsmode im Bereich 0,65 – 0,75, unter Berücksichtigung der Atomzahlschwankungen. Zur Festlegung der Bandgrenzen wurden Simulationen mit vier dynamischen Variablen und $N_{ges}^{max} = 101\,400$, $N_a^{max} = 40\,560$ und $N_{ges}^{min} = 68\,600$, $N_a^{min} = 27\,440$ durchgeführt. Es wurde stets $|a(0)|^2 = 10$ gesetzt. Zur besseren Übersichtlichkeit ist der zweite Bereich, der nur für positive Verstimmungen bei noch höheren Pumpleistungen auftritt, nicht dargestellt.

6.3. Analytisches 3-Moden-Modell

Um ein tieferes Verständnis für die physikalischen Prozesse zu entwickeln, die zu einer dynamischen Instabilität des Systems führen, soll in diesem Kapitel ein analytisches Modell präsentiert werden, in dem die zugrundeliegenden Kopplungsmechanismen identifiziert werden können. Das Auftreten der dynamischen Instabilität wurde experimentell durch den Besetzungszustand der Kondensatsmode definiert. Aus theoretischer Sicht ist es sinnvoll in den Gleichungen (6.7) alle Terme zu vernachlässigen, die nicht c_0 und/oder a_p beinhalten, da zu Beginn der dynamischen Instabilität sowohl die Pumplichtmode, als auch die Kondensatsmode makroskopisch besetzt sind. Ersetzt man die entsprechenden Operatoren in der mean field Näherung durch ihre zeitlich konstanten Erwartungswerte c_0 und a_p , so folgt aus dem Gleichungssystem

(6.7)

$$\dot{c}_{-1} = -i\omega_r c_{-1} - iU_0 a_p c_0 a \quad (6.17)$$

$$\dot{c}_{+1} = -i\omega_r c_{+1} - iU_0 a_p c_0 a^* \quad (6.18)$$

$$\dot{a} = -i\Delta a - iU_0 a_p c_0 (c_{-1} + c_{+1}^*) \quad (6.19)$$

wobei

$$\dot{c}_0 = 0, \quad \text{und} \quad \kappa = 0 \quad (6.20)$$

verwendet wurde¹³. Somit werden nur das Lichtfeld der Testmode und die Impulsmoden $|p_{-1}\rangle$ und $|p_1\rangle$ als dynamische Variablen berücksichtigt. Dieses Modell ist somit nicht geeignet um die vollständige Dynamik des Systems zu beschreiben, liefert aber, wie sich im Folgenden herausstellen wird, ebenfalls ein asymmetrisches Stabilitätsdiagramm und einen analytischen Ausdruck für die kritische Kopplungsstärke, sofern der Zerfall des Lichtfeldes vernachlässigt wird ($\kappa = 0$).

Der Term $(-iU_0 N_a a)$ in Gl. (6.7) führt lediglich zu einer Verschiebung des Nullpunktes der Verstimmung Δ um ca. 5 kHz und wird im Folgenden vernachlässigt. Mit der Definition der Kopplungsstärke

$$K \equiv U_0 a_p c_0, \quad K \in \mathbb{R} \quad (6.21)$$

und der komplexen Konjugation von Gleichung (6.18) lässt sich das Gleichungssystem (6.17)-(6.19) in der Matrixform

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} c_{-1} \\ a \\ c_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_r & K & 0 \\ K & \Delta & K \\ 0 & -K & -\omega_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{-1} \\ a \\ c_1^* \end{pmatrix} \equiv M \begin{pmatrix} c_{-1} \\ a \\ c_1^* \end{pmatrix} \quad (6.22)$$

darstellen. Aus dieser wird bereits ersichtlich, dass für eine verschwindende Kopplungsstärke K , die Eigenwerte der Impulsmoden $\pm\omega_r$ betragen müssen und der Eigenwert der Testlichtmode Δ . Berücksichtigt man Kopplungseffekte, so ist anhand von Gl. (6.22) eine konventionelle Kopplung der mit c_{-1} und a korrespondierenden Zustände zu erwarten. Die zugehörigen Eigenwerte sollten sich für wachsendes K immer weiter voneinander entfernen. Die Kopplung der Zustände, die durch c_1^* und a repräsentiert werden, wird jedoch durch die Untermatrix

$$\begin{pmatrix} \Delta & K \\ -K & -\omega_r \end{pmatrix} \quad (6.23)$$

beschrieben, die *nicht hermitesch* ist. Somit sind auch die Eigenwerte, der in Gleichung (6.22) auftretenden Matrix M , im Allgemeinen komplexwertig. Diese unkonventionelle Kopplung ist für das Auftreten der dynamischen Instabilität verantwortlich, wie die Berechnung der Eigenwerte zeigt. Der Ansatz

$$\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_\varepsilon e^{-i\varepsilon t} \quad (6.24)$$

löst das Gleichungssystem (6.22), wobei für $K = 0$ die Eigenwerte ε der Matrix M reell und die zugehörigen Eigenzustände durch

$$\vec{\varphi}_{\varepsilon=\omega_r} = \begin{pmatrix} c_{-1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\varphi}_{\varepsilon=\Delta} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\varphi}_{\varepsilon=-\omega_r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1^* \end{pmatrix} \quad (6.25)$$

gegeben sind. Die Abhängigkeit der Real- und Imaginärteile der Eigenwerte von der Kopplungsstärke ist in Abb. 6.8 für unterschiedliche Verstimmungen Δ dargestellt.

¹³ c_0 kann in dieser Näherung als konstant und reell angenommen werden.

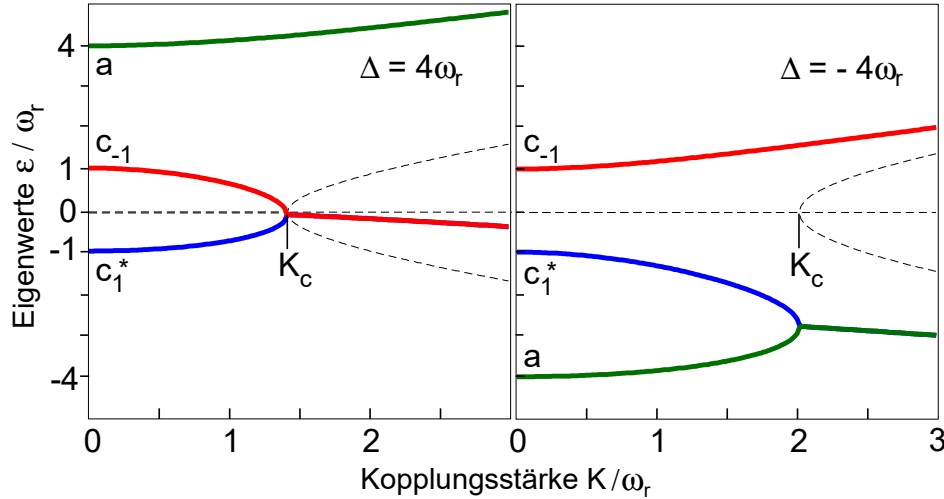


Abbildung 6.8.: Eigenwerte der Matrix M aus Gl. (6.22) in Einheiten der Rückstoßfrequenz für $\Delta = \pm 4\omega_r$. Realteile sind mit durchgezogenen, Imaginärteile mit gestrichelten Linien dargestellt. Nähere Erläuterungen: siehe Text.

Für positive Δ sind die Realteile der Eigenwerte der Zustände, die für $K = 0$ den reinen Materiezuständen entsprechen, ab einer kritischen Kopplungsstärke $K = K_c$ identisch. Zudem tauchen positive und negative Imaginärteile auf (gestrichelte Linien). Der positive Imaginärteil ist für die Instabilität verantwortlich, da ein positiver imaginärer Wert von ε im Ansatz (6.24) zu einer zeitlich exponentiell ansteigenden Wellenfunktion führt. Die kritische Kopplungsstärke ist demnach durch das Erscheinen nichtverschwindender Imaginärteile definiert. An Abb. 6.8 wird relativ anschaulich klar, wie es zu einem asymmetrischen Verlauf der kritischen Kopplungsstärke bzw. der kritischen Pumpleistung (siehe Gl. (6.29)) kommt: Für $\Delta > (+\omega_r)$ ist der Abstand der Eigenwerte, die durch die rote und die blaue Kurve dargestellt werden für $K = 0$ stets durch $2\omega_r$ gegeben, unabhängig von Δ . Die Wechselwirkung findet zwar mittels des dritten Zustandes statt (grüne Eigenwertskurve), jedoch ist der Einfluss der Verstimmung auf die kritische Kopplungsstärke deutlich geringer als für $\Delta < (-\omega_r)$. In diesem Fall hängt der Wert von K_c empfindlich von der Verstimmung ab. Je größer die Separation der grünen und blauen Eigenwertskurven bei $K = 0$ ist¹⁴, desto mehr Pumpleistung wird benötigt, um die kritische Kopplungsstärke zu erreichen. Wie in Kapitel 7.3 gezeigt wird, gilt:

$$\tilde{K}_c^2 = \frac{1}{27} \left[9\tilde{\Delta} - \tilde{\Delta}^3 + (3 + \tilde{\Delta}^2)^{3/2} \right] \quad (6.26)$$

wobei die Kopplungsstärke $\tilde{K}_c \equiv \frac{K_c}{\omega_r}$, sowie die Verstimmung $\tilde{\Delta} \equiv \frac{\Delta}{\omega_r}$ in Einheiten der Rückstoßfrequenz angegeben sind. Nach Gleichung (6.21) gilt:

$$\tilde{K} = \frac{1}{\omega_r} U_0 a_p c_0 = \frac{1}{\omega_r} U_0 \sqrt{\frac{P_p}{\hbar \omega_p \nu_0}} \sqrt{N_a} \quad (6.27)$$

wobei P_p die Pumpleistung, ω_p die Pumplaserfrequenz und ν_0 den freien Spektralbe-

¹⁴Die Separation, für $K = 0$, ist stets durch $|\Delta - (-\omega_r)|$ gegeben.

reich des Ringresonators bezeichnet. Setzt man die experimentellen Parameter ein¹⁵, folgt:

$$\tilde{K} = \left(-64,19 \frac{1}{\sqrt{W}} \right) \cdot \sqrt{P_p} \equiv F \sqrt{P_p} \quad (6.28)$$

Der Faktor F besitzt die Einheit $\left[\frac{1}{\sqrt{W}} \right]$, \tilde{K} ist eine dimensionslose Größe. Die kritische Pumpleistung ist demnach durch

$$P_c = \frac{1}{F^2} \tilde{K}_c^2 \quad (6.29)$$

gegeben und ist zusammen mit den experimentellen Daten in Abbildung 6.9 dargestellt.

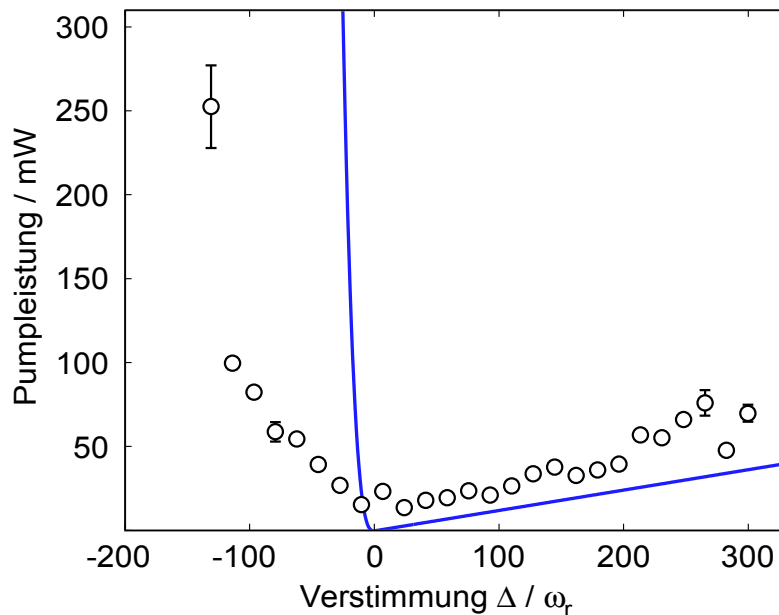


Abbildung 6.9.: Kritische Pumpleistung nach Gl. (6.29) im Vergleich mit den experimentellen Daten. Für positive Werte von Δ zeigen die Daten und die analytische Kurve einen linearen Verlauf. Die starke Abweichung der Daten für $\Delta < 0$ ist durch die endliche Linienbreite des Resonators bedingt.

Wie die experimentellen Daten, zeigt auch die analytische Lösung einen linearen Anstieg der kritischen Pumpleistung mit wachsender positiver Verstimmung Δ . Die Abweichung ist auf die unterschiedlichen Definitionen der kritischen Pumpleistung zurückzuführen. Während nach experimenteller Definition die kritische Pumpleistung erreicht ist sobald die Besetzung der Kondensatsmode um $30\% \pm 5\%$ abgenommen hat, kennzeichnet die analytische Kurve den eigentlichen Beginn der dynamischen Instabilität. Somit ist es nicht verwunderlich, dass die analytische Kurve für $\Delta > \omega_r$, im Vergleich mit den Messpunkten, kleinere Leistungen vorhersagt. Für negative Verstimmungen $\Delta < (-\omega_r)$ kann keine quantitative Übereinstimmung erwartet werden, da der Zerfall des Lichtfeldes im Resonator zu einer endlichen Linienbreite des Resonators führt. Diese verhindert eine genaue Messung des steilen

¹⁵Für U_0 wird der Wert $(-2\pi \cdot 0,15 \text{ Hz})$ verwendet, siehe Gl. (6.15).

Anstieges, da dieser, im experimentell zugänglichen Bereich, auf der Frequenzskala von wenigen ω_r stattfindet und die Linienbreite deutlich größer als ω_r ist. Dass der Verlauf der kritischen Pumpleistung für große positive Verstimmungen tatsächlich linear verläuft, kann mittels des analytischen Ausdrucks (6.26) gezeigt werden. Es gilt:

$$\tilde{K}_c^2 = \frac{1}{27} \left[9\tilde{\Delta} - \tilde{\Delta}^3 + |\tilde{\Delta}|^3 \left(\sqrt{\frac{3}{\tilde{\Delta}^2} + 1} \right)^3 \right] \quad (6.30)$$

Entwickelt man die Wurzel für kleine $\frac{1}{\tilde{\Delta}^2}$ folgt

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{\frac{3}{\tilde{\Delta}^2} + 1} \right)^3 &\approx \left(1 + \frac{3}{2} \frac{1}{\tilde{\Delta}^2} \right)^3 \\ &= 1 + \frac{9}{2} \frac{1}{\tilde{\Delta}^2} + \frac{27}{4} \frac{1}{\tilde{\Delta}^4} + \frac{27}{8} \frac{1}{\tilde{\Delta}^6} \\ &\approx 1 + \frac{9}{2} \frac{1}{\tilde{\Delta}^2} \end{aligned} \quad (6.31)$$

und somit gilt näherungsweise

$$\tilde{K}_c^2 \approx \frac{1}{27} \left[9\tilde{\Delta} - \tilde{\Delta}^3 + |\tilde{\Delta}|^3 + \frac{9}{2} |\tilde{\Delta}| \right] \quad (6.32)$$

Für positive $\tilde{\Delta}$ folgt der lineare Zusammenhang

$$\tilde{K}_{c,+}^2 = \frac{1}{27} \left[9\tilde{\Delta} + \frac{9}{2}\tilde{\Delta} \right] = \frac{1}{2}\tilde{\Delta} \quad (6.33)$$

Der steile Anstieg für negative $\tilde{\Delta}$ kann durch

$$\tilde{K}_{c,-}^2 = \frac{1}{27} \left[2|\tilde{\Delta}|^3 - \frac{9}{2}|\tilde{\Delta}| \right] \approx \frac{2}{27}|\tilde{\Delta}|^3 \quad (6.34)$$

approximiert werden.

Es sei angemerkt, dass es sich beim Punkt der kritischen Kopplungsstärke um einen sogenannten „exzeptionellen Punkt“ (EP) handelt. In diesem Punkt nehmen sowohl zwei Realteile als auch die zugehörigen Imaginärteile jeweils identische Werte an. Dies ist auch bei einer gewöhnlichen Entartung der Fall, bei der identische Eigenwerte zu verschiedenen Eigenvektoren vorliegen. An einem EP stimmen jedoch nicht nur die Eigenwerte, sondern auch die Eigenvektoren überein, siehe Kap. 7.3. An diesem ausgezeichneten Punkt liegt somit eine reduzierte Dimensionalität des Systems vor, was von besonderem theoretischem Interesse ist. In diesem analytischen Modell ohne Feldzerfallsrate wird das Auftauchen der Instabilität demnach unmittelbar mit der Existenz von exzeptionellen Punkten verknüpft. Exzeptionelle Punkte sind seit geraumer Zeit Gegenstand theoretischer Betrachtungen und bis heute Thema aktueller Forschungen [71–82].

6.4. Eigenwerte des 3-Moden-Modells unter Berücksichtigung des Feldzerfalls

In Kapitel 6.3 wurde ein Modell präsentiert, das einen analytischen Ausdruck für die kritische Kopplungsstärke für den Fall einer vernachlässigbaren Feldzerfallsrate

liefert. Der Einfluss der Feldzerfallsrate kann im Gleichungssystem (6.22) durch die Ersetzung $\Delta \rightarrow \Delta - i\kappa$ berücksichtigt werden. Die Eigenwerte der Matrix

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{K} & 0 \\ \tilde{K} & \tilde{\Delta} - i\tilde{\kappa} & \tilde{K} \\ 0 & -\tilde{K} & -1 \end{pmatrix}, \quad (6.35)$$

wobei alle auftretenden Größen auf ω_r normiert sind, sind in den Abbildungen 6.10 bis 6.13 für verschiedene Verstimmungen dargestellt. Alle Simulationen wurden mit $\kappa = 5\omega_r$ durchgeführt. Ein Vergleich von Abb. 6.8 mit 6.10 zeigt, dass es unter Berücksichtigung des Feldzerfalls keine klar definierbare kritische Kopplungsstärke mehr gibt. Die Realteile zweier Eigenwerte nähern sich zwar an, werden aber nicht identisch¹⁶.

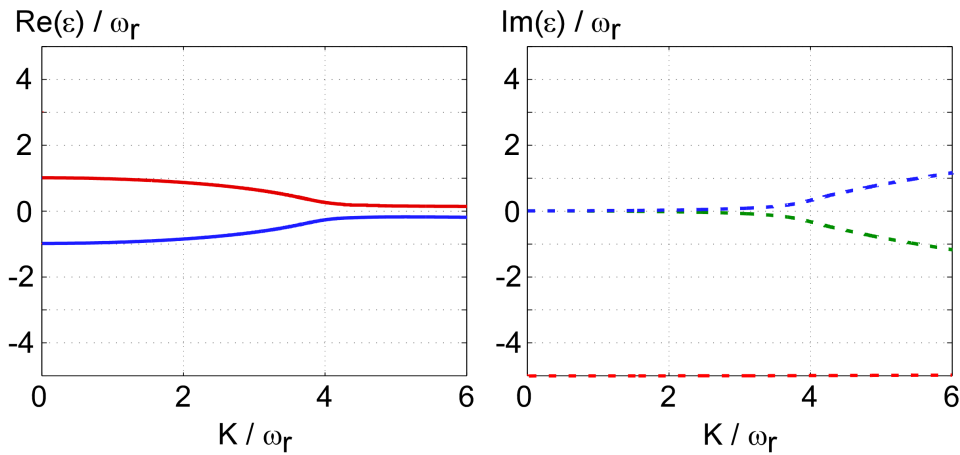


Abbildung 6.10.: Real- und Imaginärteile der Eigenwerte der Matrix (6.35) für $\Delta = 30\omega_r$. Für eine verschwindende Pumpleistung ($K = 0$) sind die Realteile stets durch $(\Delta, +\omega_r, -\omega_r)$, die Imaginärteile durch $(0, -\kappa, 0)$ gegeben.

Interessanterweise existiert allerdings auch im Fall $\kappa \neq 0$ für eine bestimmte Verstimmung Δ_{EP} ein exzeptioneller Punkt, siehe Abb. 6.12. Die in rot und grün dargestellten Eigenwerte sind im EP identisch. Man spricht auch von einer Koaleszenz der Eigenwerte. In Abb. 6.11 und 6.13 ist der Verlauf der Eigenwerte, in Abhängigkeit von der Kopplungsstärke, für Verstimmungen dargestellt, die etwas größer bzw. kleiner als Δ_{EP} sind. Für $\Delta > \Delta_{EP}$ kommt es zur sogenannten „Abstoßung“ der Realteile der Eigenwerte, während sich die Imaginärteile schneiden. Im Fall $\Delta < \Delta_{EP}$ ist es umgekehrt.

¹⁶Im Grenzfall $|\Delta| \gg |\kappa|$ kann κ gegen Δ vernachlässigt werden und die Abweichung zwischen den Realteilen geht gegen Null.

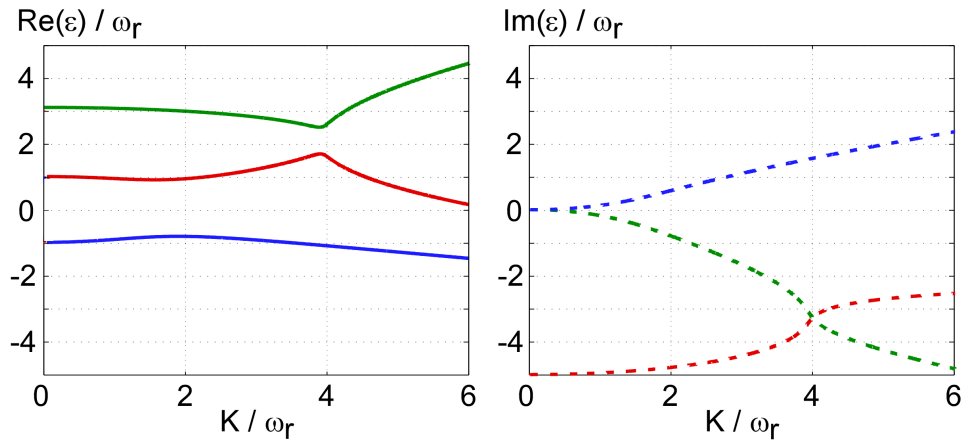


Abbildung 6.11.: $\Delta = 3,1\omega_r$. Bei einer bestimmten Kopplungsstärke K nehmen zwei reelle Eigenwertskurven einen minimalen Abstand an, während sich die entsprechenden Verläufe der Imaginärteile überkreuzen.

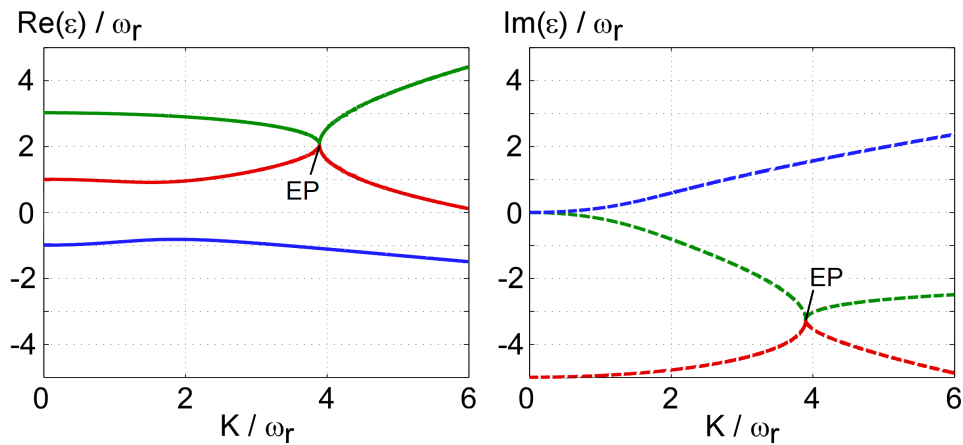


Abbildung 6.12.: $\Delta_{EP} = 3,0165\omega_r$. Am exzeptionellen Punkt nehmen zwei Real- und die zugehörigen Imaginärteile jeweils denselben Wert an.

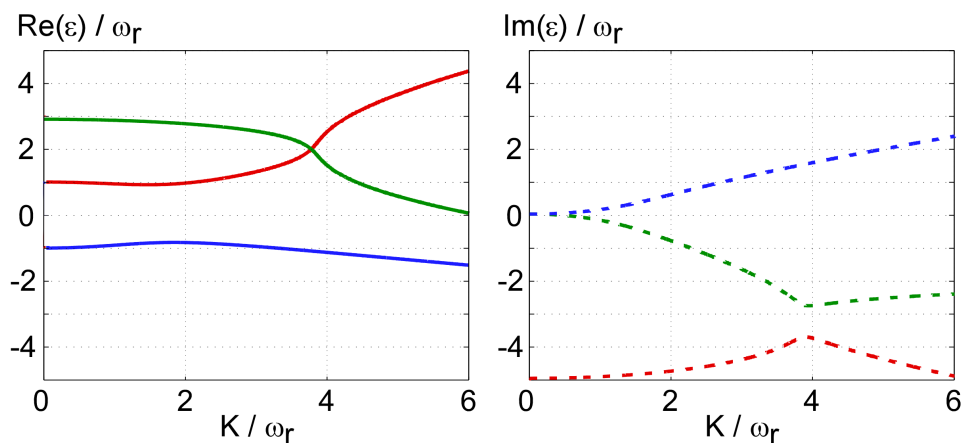


Abbildung 6.13.: $\Delta = 2,9\omega_r$. Die Verläufe der reellen Eigenwerte überkreuzen sich und die entsprechenden Imaginärteile nehmen einen minimalen Abstand an.

Nähere Zusammenhänge von exzeptionellen Punkten mit dem Effekt der „Resonanzabstoßung“ sind in [77, 78] zu finden. Ein weiterer Aspekt ist das Auftreten von exzeptionellen Punkten bei Systemen, die einen Phasenübergang durchlaufen. Hier sei [76] zur weiteren Lektüre empfohlen.

Eine Möglichkeit den Verlauf der Realteile der Eigenwerte in Abhängigkeit von der Pumpleistung¹⁷ experimentell zu bestimmen, bietet die sogenannte Bragg-Spektroskopie. Mittels eines zweiten Lasers, der gegenläufig zum Pumplaser in den Ringresonator eingestrahlt wird, werden, je nach Frequenzdifferenz der beiden Laser, verschiedene Zustände miteinander gekoppelt. Die Pumplaserfrequenz ist hierbei konstant und definiert die Verstimmung Δ . Der Testlaser wird mit variabler Frequenz eingestrahlt und sollte eine möglichst geringe Intensität aufweisen, um das System nicht zu beeinflussen. Mit dieser Spektroskopiemethode wurde die Besetzung der Impulsmoden $|p_{\pm 1}\rangle$ für $\Delta \approx 265 \omega_r$ bei einer konstanten Pumpleistung¹⁸, in Abhängigkeit der Frequenzdifferenz zwischen den Lasern vermessen. Für eine Pumpleistung, die weit unterhalb des kritischen Werts liegt, ist ein Frequenzabstand der Besetzungsmaxima von $2\omega_r = 29 \text{ kHz}$ zu erwarten, siehe Abb. 6.14 rechts. Die an die Daten angepassten Kurven liefern jedoch eine Frequenzdifferenz von $33,3 \text{ kHz}$. Dies spricht dafür, dass der Testlaser trotz möglichst gering gewählter Intensität das System empfindlich beeinflusst hat.

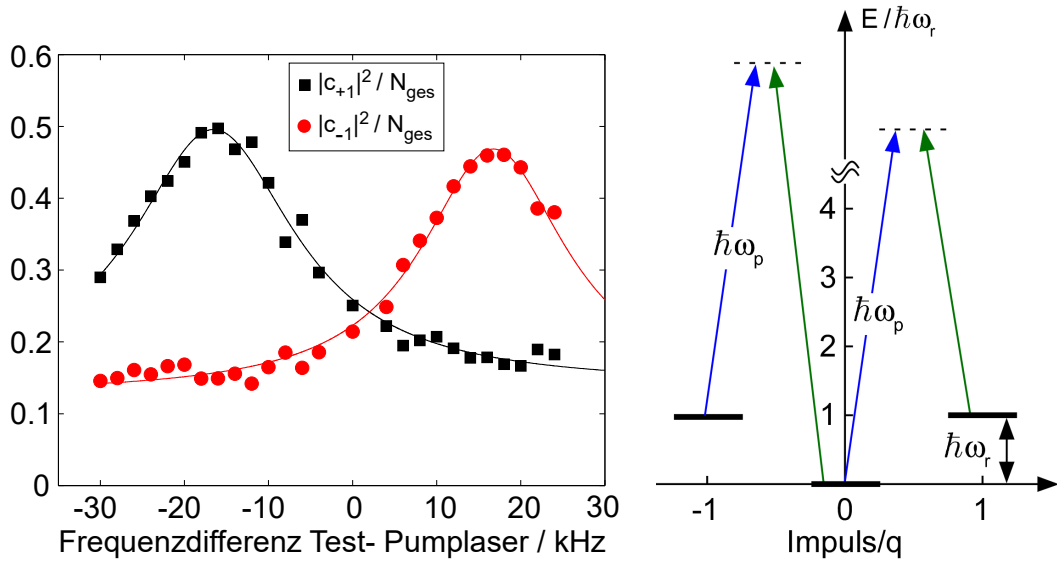


Abbildung 6.14.: *Links*: Normierte Besetzung der Impulsmoden $|p_{\pm 1}\rangle$ mit angepassten Lorentzkurven.

Rechts: Termschema mit fixem ω_p und variabler Frequenz des Testlasers (grüner Pfeil). Der Impuls ist in Einheiten von $q = 2\hbar k$ angegeben.

¹⁷Mit Gl. (6.29) kann diese in eine Kopplungsstärke umgerechnet werden.

¹⁸Diese betrug ca. $1/4$ der kritischen Pumpleistung.

6.5. Stabilitätsdiagramm mit thermischen Atomen

Neben den Messungen mit einem Bose-Einstein Kondensat wurden auch Messungen mit thermischen Atomwolken im Temperaturbereich von $400 \text{ nK} - 9 \mu\text{K}$ durchgeführt¹⁹. Das Ergebnis einer Messung ist in Abb. 6.15 im Vergleich mit den Kondensatsdaten dargestellt. Beide Datensätze zeigen denselben asymmetrischen Verlauf.

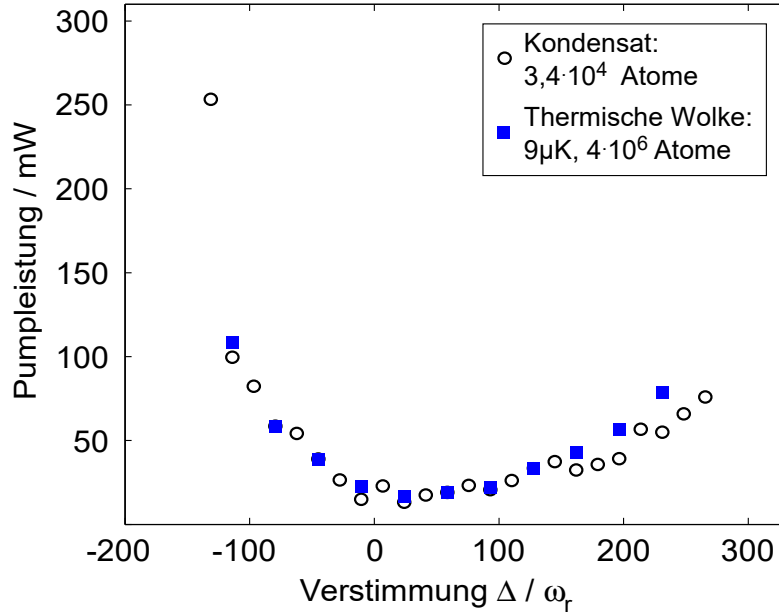


Abbildung 6.15.: Stabilitätsdiagramme mit kondensierten und thermischen Atomen. Auch die Messung mit einer thermischen Wolke zeigt einen asymmetrischen Verlauf.

Da die de Broglie Wellenlänge der thermischen Atome kleiner als $\lambda_p/2 \approx 400 \text{ nm}$ ist²⁰, sind keine quantenmechanischen Effekte zu erwarten und das Stabilitätsdiagramm kann in der Tat auch mittels der klassischen CARL Gleichungen [37, 42] beschrieben werden:

$$m\ddot{z}_j = 2i\hbar k U_0 \left(a_p^* a e^{-2ikz_j} - a_p a^* e^{2ikz_j} \right)$$

$$\dot{a} = [-i(\Delta + U_0 N) - \kappa] a - iU_0 a_p \sum_{j=1}^N e^{2ikz_j} \quad (6.36)$$

z_j bezeichnet die Position des j -ten Atoms entlang der z -Achse, vgl. Abb. 5.2. Eine ausführliche Darstellung der thermischen Messungen und Simulationsergebnissen der klassischen Gleichungen (6.36) ist in [42] und [43] zu finden. Demnach kann der asymmetrische Verlauf des Stabilitätsdiagramms nicht auf quantenmechanischen Effekten beruhen.

¹⁹Die kritische Temperatur, bei der die Atome anfangen zu kondensieren und nicht mehr als „thermisch“ bezeichnet werden können, liegt für $8 \cdot 10^4$ Atome bei ca. 125 nK.

²⁰Die de Broglie Wellenlänge $\lambda_{dB} = \frac{h}{p}$ für ^{87}Rb Atome der Temperatur $9 \mu\text{K}$ beträgt ca. 156 nm.

6.6. Qualitatives 3-Atom-Modell

Wie die Messungen mit thermischen Atomen gezeigt haben, ist die asymmetrische Form des Stabilitätsdiagramms nicht auf quantenmechanische Effekte zurückzuführen und auch mit klassischen Bewegungsgleichungen modellierbar.

Da die Messungen mit einer Low Finesse Mode durchgeführt wurden, deren Leistungszerfallszeit nur $T_{res} = 0,1 \mu\text{s}$ beträgt, kann man annehmen, dass das Lichtfeld im Resonator der atomaren Dynamik adiabatisch folgt²¹. Man vernachlässigt damit Verzögerungseffekte, die durch Einschwingvorgänge des Lichtfeldes bei Änderung der Lichtleistung im Resonator zustande kommen²² und betrachtet nur den Gleichgewichtszustand der Amplitude des Feldes:

$$\dot{a} = 0 \quad (6.37)$$

Um ein qualitatives Verständnis für die Ursache der Asymmetrie zu erhalten, betrachtet man zunächst nur ein einziges Atom im Ringresonator. Für die komplexe Amplitude des gestreuten Feldes ergibt sich mit der Näherung (6.37) und Gl. (6.36) für $N = 1$:

$$a = \frac{iU_0 a_p}{-i(\Delta + U_0) - \kappa} e^{2ikz_1} \equiv \tilde{a}(\Delta) e^{2ikz_1} \quad (6.38)$$

Demnach kann das gestreute Lichtfeld eines einzelnen Atoms durch

$$A_1 = \tilde{a}(\Delta) e^{-i(k(z-2z_1)+\omega t)} \quad (6.39)$$

beschrieben werden. Die Frequenzverschiebung des gestreuten Lichtfeldes relativ zur Pumplichtfrequenz wird in diesem qualitativen Modell vernachlässigt und es gilt $\omega = ck = c\frac{2\pi}{\lambda}$. Das Pumplichtfeld ist durch

$$A_p = a_p e^{i(kz-\omega t)} \quad \text{mit} \quad a_p \in \mathbb{R} \quad (6.40)$$

gegeben, wobei a_p als konstant angenommen wird, da $|a|^2 \ll |a_p|^2$ gilt.

Das Dipolpotential ist proportional zur Intensität im Resonator und allgemein durch

$$U_{dip}(z, \Delta) \propto -\left| A_p + \sum_{j=1}^N A_j \right|^2 \quad (6.41)$$

gegeben. Die Abhängigkeit des Dipolpotentials von der Verstimmung Δ ist über Gl. (6.38) und Gl. (6.39) definiert und ist für $N = 1$ in Abbildung 6.16 (a) dargestellt. Für $\Delta = 0$ hat das resultierende Dipolpotential seine größte negative Steigung am Ort des Atoms²³. Die Dipolkraft zeigt in diesem Fall nach rechts²⁴ und beschleunigt das Atom. Das selbstgenerierte Dipolpotential „folgt“ dieser Bewegung²⁵, so dass

²¹Da die Rückstoßgeschwindigkeiten von der Größenordnung $\approx 1 \text{ cm/s}$ sind, bewegen sich die Atome während der Zeit T_{res} nur im 1 nm Bereich, was deutlich kleiner als eine optische Wellenlänge $\lambda \approx 794 \text{ nm}$ ist.

²²Diese finden auf der Zeitskala von T_{res} statt. Effekte wie das optische Kühlen von Atomen in Resonatoren, beruhen auf eben diesen Verzögerungsmechanismen und werden in diesem Modell somit nicht berücksichtigt.

²³Das Dipolpotential weist eine Periodizität von $\lambda/2$ auf.

²⁴Der Pumplaser propagiert in positive, die Testmode in negative z -Richtung.

²⁵Nach Gl. (6.37) ohne Änderung der Amplitude.

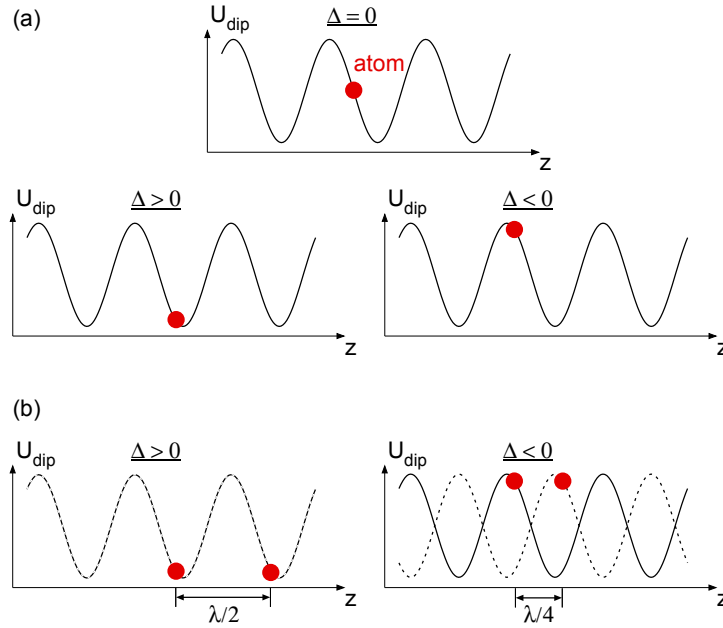


Abbildung 6.16.: (a): Dipolpotential eines einzelnen Atoms für verschiedene Verstimmungen.

(b): Mögliche Relativabstände zweier Atome mit minimaler Gesamtenergie. Nähere Erläuterungen: siehe Text.

sich das Atom immer an einem Ort mit maximaler Dipolkraft befindet²⁶. Für $\Delta > 0$ ist die Atomposition relativ zum Dipolpotential näher an einem Minimum, im Fall $\Delta < 0$ näher an einem Maximum des Potentialverlaufs. Daraus folgt anschaulich wie sich ein zweites Atom relativ zum ersten positionieren muss, damit die Gesamtenergie minimiert wird: Ein Atom, dessen Relativposition zum eigenen Dipolpotential fixiert ist, muss sich möglichst nah am Minimum des Dipolpotentials des anderen Atoms aufhalten²⁷. Für $\Delta > 0$ ist dies der Fall für einen relativen atomaren Abstand von $n(\lambda/2)$, wobei $n \in \mathbb{N}_0$ ist. Für $\Delta < 0$ wird die Gesamtenergie für interatomare Abstände von $(2n + 1)(\lambda/4)$ minimal, siehe Abb. 6.16 (b) und Abb. 6.17 (a).

Die Gültigkeit dieses anschaulichen Bildes kann bestätigt werden, indem man den Ausdruck (6.41) für zwei Atome, an den Orten z_1 und z_2 , auswertet. Die resultierende potentielle Gesamtenergie zweier Atome im Ringresonator ist dann durch $U_{pot} = U_{dip}(z_1) + U_{dip}(z_2)$ gegeben²⁸ und man erhält:

$$U_{pot}(\Delta, \delta z) \propto -a_p^2 - 2 \left(|\tilde{a}|^2 + a_p \operatorname{Re}(\tilde{a}) \right) [1 + \cos(2k \delta z)] \quad (6.42)$$

²⁶Dies ist auf den Phasenschub bei der Umstreuung zwischen den Moden zurückzuführen, der in $\tilde{a}(\Delta)$ (Gl. (6.38)) enthalten ist. Man könnte sagen, das Atom „surft“ auf seiner selbstgenerierten „Dipolpotentialwelle“.

²⁷Man könnte annehmen, es sei energetisch am günstigsten wenn sich z.B. das linke Atom in Abb. 6.16 (b) genau im Minimum des Dipolpotentials des rechten Atoms befindet. Damit erhöht sich aber zwangsläufig die potentielle Energie des rechten Atoms im Potential des linken. Nur für $\Delta = \pm\infty$ können die Atome zur Minimierung der Gesamtenergie exakt im Minimum des jeweils anderen Potentials sitzen.

²⁸Es handelt sich hierbei *nicht* um die Summe zweier Potentiale, sondern um die Summe der potentiellen Energien von zwei Atomen, die sich im gemeinsamen Potential U_{dip} an verschiedenen Positionen befinden.

mit $\delta z = z_2 - z_1$. Der Verlauf von $U_{pot}(\Delta, \delta z)$ ist in Abb. 6.17 (a) in Abhängigkeit von δz für den Fall einer positiven und einer negativen Verstimmung gezeigt. Nehmen die Atome einen Relativabstand von $\delta z = (2n + 1)(\lambda/4)$ zueinander ein, so interferiert das gestreute Licht destruktiv und es gilt: $\cos(2k \delta z) = -1$. Die potentielle Energie ist in diesem Fall nur durch den Pump laser gegeben: $U_{pot} \propto -a_p^2$. Dieser Wert ist in Abb. 6.17 (a) als gestrichelte Linie eingezeichnet²⁹. Für $\Delta < 0$ ist dies der energetische Idealfall. Jede Abweichung des relativen Abstandes von $(2n + 1)(\lambda/4)$ stört die destruktive Interferenz und erhöht die potentielle Gesamtenergie der Atome. Für negative Verstimmungen sind die Atome demnach bestrebt kein Licht in die Testmode umzustreuen. Für positive Verstimmungen ist das Gegenteil der Fall: die potentielle Energie nimmt ihre Minimalwerte für $\delta z = n(\lambda/2)$ an, die gestreuten Lichtfelder interferieren in diesem Fall konstruktiv, eine Umstreuung des Lichts von der Pump- in die Testmode ist somit energetisch bevorzugt.

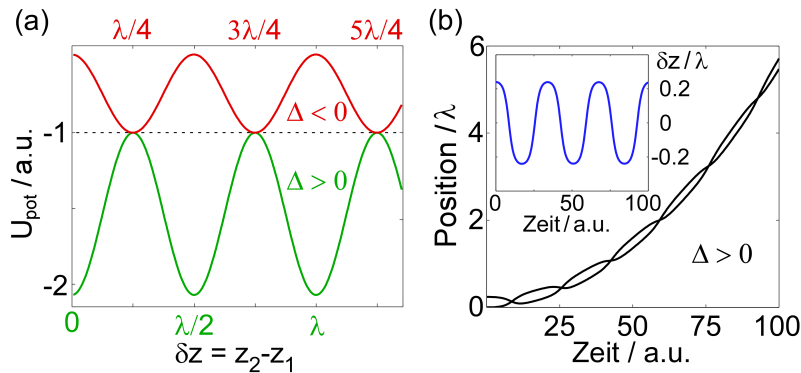


Abbildung 6.17.: (a): Potentielle Gesamtenergie zweier Atome für positive und negative Verstimmung in Abhängigkeit ihres relativen Abstandes δz . (b): Zeitentwicklung der atomaren Positionen (in Einheiten der optischen Wellenlänge λ). Die blaue Kurve zeigt den relativen Abstand zwischen den beiden Atomen, der um Null oszilliert. Nähere Erläuterungen: siehe Text.

Eine Simulation der zeitlichen Dynamik zweier Atome ist für den Fall $\Delta > 0$ in Abb. 6.17 (b) dargestellt. Der Startabstand wurde zu $\delta z = 0,24\lambda$ gewählt, die Startgeschwindigkeit der Atome beträgt $v_0 = 0$. Beide Atome werden beschleunigt und oszillieren umeinander. Der optimale Abstand von $\delta z = 0$ ist unerreichbar, da in diesem Modell keinerlei Dämpfungseffekte berücksichtigt werden. Die Oszillationsamplitude von δz bleibt zeitlich konstant. Zur Berechnung der Dynamik wurde die Bewegungsgleichung für jedes Atom

$$m\ddot{z}_j = F_{dip}(z_j) = -\left. \frac{dU_{dip}}{dz} \right|_{z=z_j} \quad (6.43)$$

numerisch gelöst. In diesem Modell, das von zwei Atomen ohne Dämpfung ausgeht, kommt es somit nicht zur Anordnung der Atome im eindimensionalen Dipolpotentialgitter. Nimmt man jedoch ein drittes Atom hinzu, so kann es auch ohne Dämpfung zu einer teilweisen Strukturierung der Atome kommen. Dieses Verhalten ist in Abb. 6.18 gezeigt.

²⁹Für die Berechnung wurde $a_p = 1$ gesetzt.

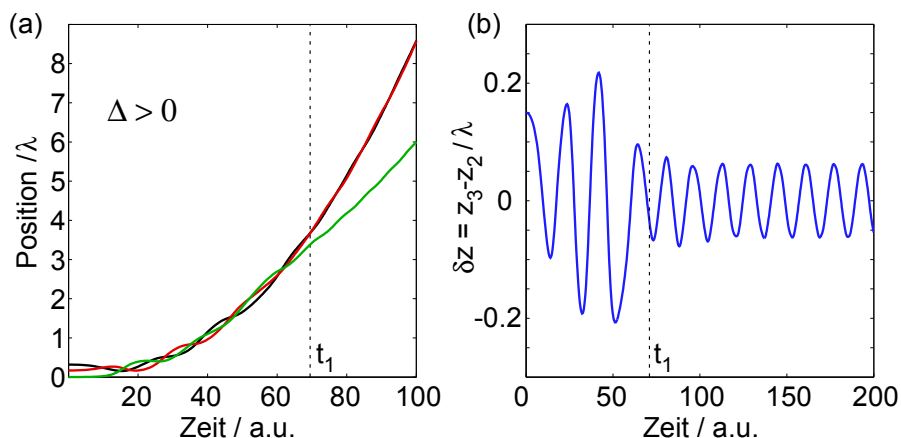


Abbildung 6.18.: Simulation der atomaren Dynamik für drei Atome.

- (a): Die grüne Kurve (Koordinate z_1) separiert sich zum Zeitpunkt t_1 vom Verlauf der roten (z_2) und schwarzen Kurve (z_3).
- (b): Die Amplitude der Oszillation des relativen Abstands $\delta z = z_3 - z_2$ reduziert und stabilisiert sich für Zeiten $t > t_1$.

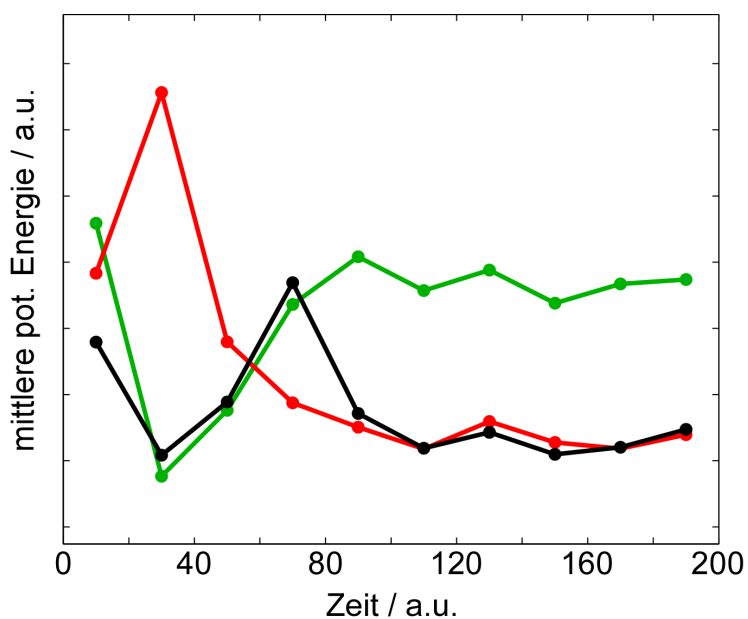


Abbildung 6.19.: Jeder Punkt stellt den über 20 Zeiteinheiten gemittelten Wert der jeweiligen potentiellen Energie dar. Die Farbkodierung entspricht Abb. 6.18 (a). Durch die Separation des „grünen“ Atoms reduzieren sich die potentiellen Energien der beiden anderen.

Für Zeiten $t < t_1$ oszillieren die drei Atome umeinander und werden beschleunigt. Zum Zeitpunkt $t = t_1$ separiert sich jedoch ein Atom (grüne Kurve in Abb. 6.18 (a)) von den beiden anderen. Interessanterweise geht mit dieser Separation eine Reduktion und Stabilisation der Oszillationsamplitude des Relativabstandes der beiden anderen Atome einher, wie in Abb. 6.18 (b) dargestellt ist. Die Separation eines Atoms ermöglicht demnach eine teilweise Anordnung der beiden anderen Atome, die zur Reduktion ihrer potentiellen Energie führen. Diese ist in Abb. 6.19, über einen Zeitraum von 200 Zeiteinheiten, aufgetragen.

Durch die langreichweitige Wechselwirkung, die über das Lichtfeld vermittelt wird, können zwei Atome Energie an ein drittes transferieren. Es wird demnach kein äußerer Dämpfungsmechanismus benötigt, um eine Strukturierung von Atomen im Dipolpotentialgitter zu erreichen. Zur weiteren Veranschaulichung ist in Abb. 6.20 das Dipolpotential für zwei verschiedene Zeitpunkte dargestellt. Die atomare Dynamik entspricht der aus Abb. 6.18. Für Zeiten $t < t_1$ sind die Atome noch nicht voneinander separiert und oszillieren mit stark variierenden Amplituden umeinander. Ist $t > t_1$ oszillieren das „schwarze“ und das „rote“ Atom nur noch mit geringer Amplitude um dasselbe Minimum des mitbewegten Dipolpotentials. Das „grüne“

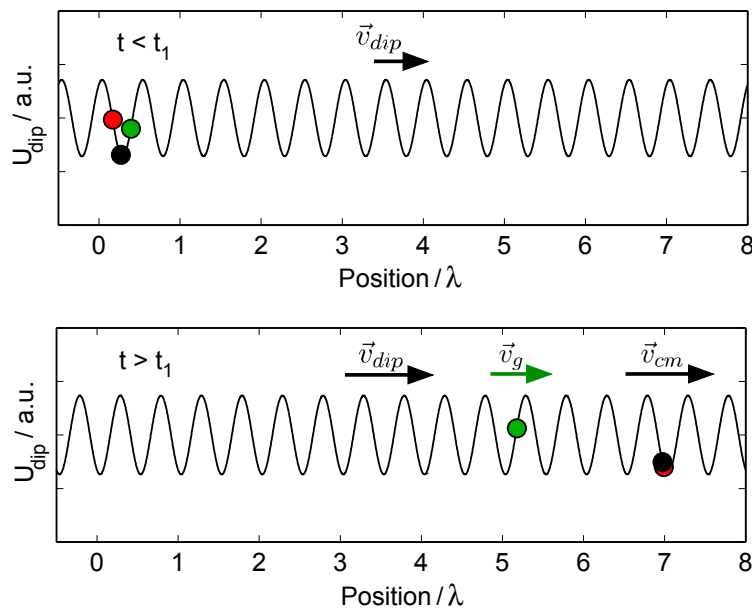


Abbildung 6.20.: Räumliche Struktur des Dipolpotentials für drei Atome zu verschiedenen Zeitpunkten:

Für Zeiten, die kleiner als t_1 sind, liegen die Positionen der Atome alle innerhalb eines Bereichs der Größe $\approx \frac{\lambda}{2}$. Das Dipolpotential läuft mit der Geschwindigkeit v_{dip} nach rechts.

Für Zeiten, die größer als t_1 sind, synchronisiert sich die Laufgeschwindigkeit des Dipolpotentials mit der Schwerpunktschwindigkeit v_{cm} des roten und schwarzen Atoms. Das grüne Atom fällt immer weiter zurück ($v_g < v_{dip}$) und durchläuft die volle Modulation des Potentials, was zu einer Stabilisierung der potentiellen Energien aller Atome führt (vgl. Abb. 6.19).

Atom bleibt zurück und durchläuft den vollen Modulationshub des Potentials, da seine Geschwindigkeit kleiner als die der beiden anderen Atome und somit auch des Dipolpotentials ist.

Dieses stark vereinfachte, vollständig klassische Modell kann nicht direkt mit den Messdaten verglichen werden. Insbesondere kann keine Aussage über die Besetzung einzelner Impulszustände getroffen werden, da eine Quantisierung des Impulses nicht im Modell enthalten ist. Dennoch liefert es eine Art Stabilitätsdiagramm: Man betrachtet, statt der Impulszustände, eine willkürlich wählbare, aber fixe Geschwindigkeit v_{krit} und definiert diese als „kritische“ Geschwindigkeit. Erreicht der Mittelwert der Geschwindigkeiten der drei Atome innerhalb einer festen Wechselwirkungszeit die Geschwindigkeit $\bar{v} = v_{krit}$, so wird die zugehörige Pumpleistung als die kritische Pumpleistung definiert. Bei allen Simulationen wurde die Startgeschwindigkeit der Atome zu $v_0 = 0$ gewählt, die Startpositionen wurden durch Zufallszahlen generiert³⁰. In Abb. 6.21 wurde v_{krit} auf 5 Einheiten festgelegt. Für eine positive Verstimmung wird die kritische Geschwindigkeit nach 100 Zeiteinheiten bereits für ein Pumpfeld von $a_{p,krit} = 5$ erreicht. Für eine betragsmäßig identische, aber negative Verstimmung wird hingegen ein Pumpfeld von $a_{p,krit} = 8$ benötigt.

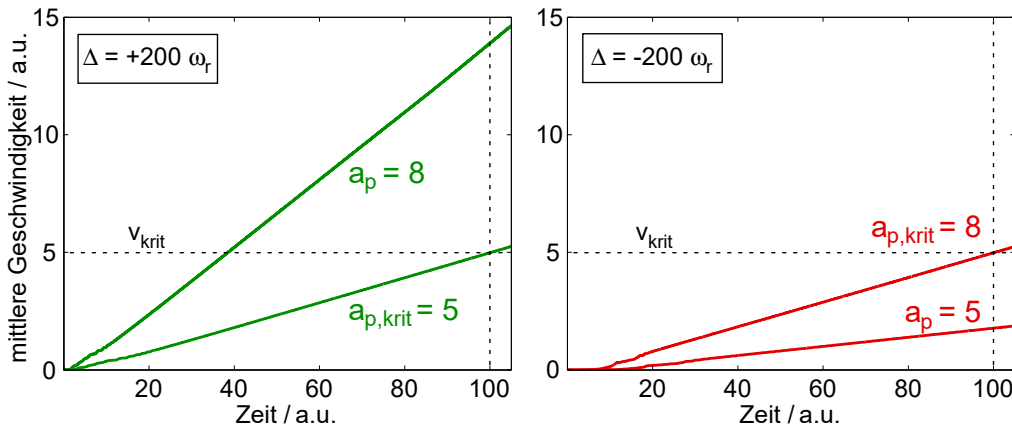


Abbildung 6.21.: Gemittelte Geschwindigkeit dreier Atome für positive und negative Verstimmung Δ und unterschiedliche Pumpfeldamplituden a_p . Für eine positive Verstimmung reicht eine vergleichsweise kleine Pumpfeldamplitude aus, um in derselben Wechselwirkungszeit (100 Zeiteinheiten) die kritische Geschwindigkeit v_{krit} zu erreichen.

Die zugehörigen kritischen Pumpleistungen sind durch $P_{krit} \propto |a_{p,krit}|^2$ gegeben und in Abb. 6.22 in Abhängigkeit von Δ dargestellt. Das Stabilitätsdiagramm zeigt ebenfalls einen stark asymmetrischen Verlauf. Zum prinzipiellen Verständnis der Ursache der Asymmetrie ist dieses qualitative Bild demnach ausreichend. Außerdem zeigt es, wie es auch ohne optische Kühleffekte im Resonator zur Strukturierung der Atome kommen kann.

³⁰Sämtliche Simulationen wurden mit MATLAB[®] durchgeführt. Die integrierte „random“ Funktion generiert eine Zufallszahl im Intervall $[0, 1]$ und fand hier Verwendung.

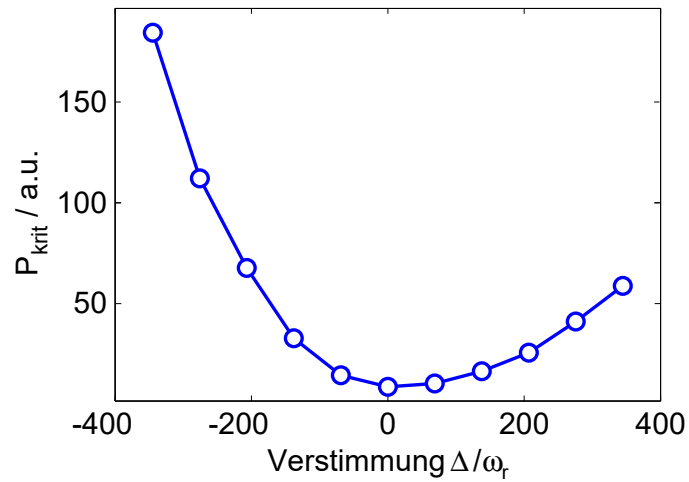


Abbildung 6.22.: Qualitatives Stabilitätsdiagramm für drei Atome. Um für eine gegebene Verstimmung die zugehörige kritische Pumpleistung $P_{krit} \propto |a_{p,krit}|^2$ zu ermitteln, wurden jeweils 300 Simulationsdurchläufe mit zufälligen Startverteilungen durchgeführt, wie sie exemplarisch in Abb. 6.21 dargestellt sind.

Es bleibt allerdings zu beachten, dass das hier gezeigte Modell auf der Näherung (6.37) beruht, die nur für kleine Leistungszerfallszeiten des Resonators gültig ist. Insbesondere bei zukünftigen Messungen, die mit einer High Finesse Mode durchgeführt werden sollen, ist diese Näherung nicht mehr erfüllt.

7. Anhang II

7.1. Zur Berechnung der Dipol-Kopplungskonstanten von ⁸⁷Rubidium in einem Ringresonator

Die für die quantenmechanischen Simulationen verwendete Dipol-Kopplungskonstante ist definiert als:

$$g = \frac{d_{eff} E_{Vak}}{\hbar} \quad (7.1)$$

In den folgenden Kapiteln sollen das effektive Dipolmoment d_{eff} und das Vakuumfeld E_{Vak} näher erläutert werden.

7.1.1. Effektives Dipolmoment

Für eine Laserverstimmung Δ_a , die groß im Vergleich zur Hyperfeinstrukturaufspaltung des angeregten Niveaus ($5P_{1/2}$) ist, interagiert der Laser mit mehreren Hyperfeinniveaus des angeregten Zustands, vgl. [69]. Für unpolarisiertes Licht, welches σ^\pm und π -Übergänge anregen kann, erhält man folgendes Dipolmoment:

$$d = \sqrt{\frac{3\pi\hbar\gamma\varepsilon_0}{k_{D1}^3}} \quad (7.2)$$

Im Ringresonator kann in einer bestimmten Mode allerdings nur linear polarisiertes Licht existieren. Der Resonator definiert somit sowohl die Polarisation des Pumplichts, als auch die des gestreuten Lichts. Wählt man die Quantisierungsachse (QA) wie üblich parallel zur Richtung des lokalen Magnetfeldes am Ort der Atome, so sind diese im Grundzustand $5S_{1/2}$, $F = 2$, $m_F = 2$ präpariert. Zur Berechnung des effektiven Dipolmoments ist es allerdings zweckmäßig die QA parallel zur Polarisationsrichtung des Lichts zu legen. Somit werden nur noch π -Übergänge angeregt, es ändert sich jedoch die Besetzungsverteilung der m_F Unterzustände¹. Jedem Übergang wird eine „Kopplungsstärke“² zugeordnet und jeweils mit seiner Besetzung gewichtet. Da man allerdings für die Summe der Kopplungsstärken aller möglichen π -Übergänge, ausgehend von einem bestimmten m_F Startzustand, jeweils 1/3 erhält, siehe Abbildung 7.1, ist die Besetzungsverteilung auf die verschiedenen m_F Grundzustände unerheblich für das resultierende effektive Dipolmoment³:

$$|d_{eff}|^2 = \frac{1}{3}|d|^2 = \frac{\pi\hbar\gamma\varepsilon_0}{k_{D1}^3} \quad (7.3)$$

$$d_{eff} = \sqrt{\frac{\pi\hbar\gamma\varepsilon_0}{k_{D1}^3}} \quad (7.4)$$

¹ m_F ist in Bezug auf die gewählte QA keine gute Quantenzahl mehr.

²Das Betragsquadrat des jeweiligen Clebsch-Gordan Koeffizienten.

³Die Summe der Besetzungswahrscheinlichkeiten über alle Grund-Unterzustände muss 1 ergeben.

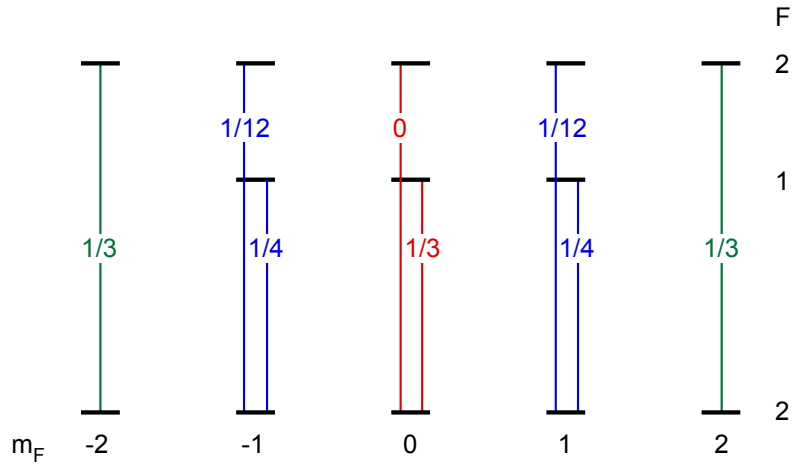


Abbildung 7.1.: Termschema des $5S_{1/2}, F=2 \rightarrow 5P_{1/2}, F'=1, 2$ Übergangs. Eingezeichnet sind alle möglichen π -Dipolübergänge mit jeweiligem Betragsquadrat des Clebsch-Gordan Koeffizienten. Energetische Differenzen der m_F Unterzustände aufgrund des Zeemaneffektes werden vernachlässigt. Nähere Erläuterungen: siehe Text.

7.1.2. Vakuumfluktuationen einer Ring- und Stehwellenresonatormode

Einer der bemerkenswertesten Aspekte der Quantenfeldtheorie ist die Voraussage von Vakuumfluktuationen: Auch wenn eine elektromagnetische Mode unbesetzt ist, verschwindet die Standardabweichung des Feldes nicht, wohl aber der Erwartungswert. Das Feld fluktuiert um den Nullpunkt⁴ mit einer nicht verschwindenden mittleren Fluktuationsamplitude⁵. Mit dieser ist eine Energie von $\frac{1}{2}\hbar\omega$ verknüpft, die als Nullpunktsenergie bezeichnet wird. Die Berechnung der Vakuumfluktuationen des elektrischen Feldes soll in den folgenden Abschnitten kurz skizziert werden.

Die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes ist nach Maxwell durch

$$\rho_{el} = \frac{1}{2} \left[\varepsilon_0 E^2(\vec{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} B^2(\vec{r}, t) \right] \quad (7.5)$$

gegeben. Entsprechend ist die klassische Hamiltonfunktion des elektromagnetischen Feldes in einem Resonator durch das Integral über das Modenvolumen V_M definiert:

$$H = \frac{1}{2} \int_{V_M} \left[\varepsilon_0 E^2(\vec{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} B^2(\vec{r}, t) \right] d^3r \quad (7.6)$$

Sowohl das elektrische, als auch das magnetische Feld können aus einem Vektorpotential \vec{A} abgeleitet werden. In der Coulomb Eichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = 0 \quad (7.7)$$

folgt für den ladungsfreien Raum:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (7.8)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (7.9)$$

⁴Es nimmt somit auch negative Werte an.

⁵Diese entspricht der Standardabweichung des Vakuumfeldes.

Das Vektorpotential erfüllt hierbei die Wellengleichung

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (7.10)$$

Die Quantisierung des elektromagnetischen Feldes kann nun auf verschiedene Weisen geschehen: Man betrachtet das Feld in einer Box mit den Kantenlängen L_x, L_y, L_z und führt somit Randbedingungen ein⁶. Ist man an stehenden Wellen interessiert, wie sie in einem linearen Resonator auftauchen, so fordert man, dass die Wände eine unendlich hohe Leitfähigkeit besitzen und dementsprechend die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes und die senkrechte Komponente des Magnetfeldes an denselbigen verschwinden. Nach Gl. (7.8) verschwinden somit auch die Tangentialkomponenten des Vektorpotentials an den Wänden.

Für den Fall von laufenden Wellen fordert man lediglich die Selbstkonsistenz der Felder, nach einem Umlauf im Ringresonator. Man wählt dementsprechend *periodische Randbedingungen*:

$$\begin{aligned} \vec{A}(x=0, y, z) &= \vec{A}(x=L_x, y, z) \\ \vec{A}(x, y=0, z) &= \vec{A}(x, y=L_y, z) \\ \vec{A}(x, y, z=0) &= \vec{A}(x, y, z=L_z) \end{aligned} \quad (7.11)$$

Die Berechnung des Vektorpotentials und der zugehörigen Felder ist für stehende Wellen ausführlich in [83] und für Laufwellen beispielsweise in [84–86] zu finden. Hier seien nur die Ergebnisse angegeben.

Stehende Wellen

$$\hat{A}(\vec{r}, t) = \sum_l \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_l V_l}} \vec{u}_l(\vec{r}) \left(\hat{a}_l(t) + \hat{a}_l^\dagger(t) \right) \quad (7.12)$$

wobei $l \in \mathbb{N}$ den Modenindex und ω_l die zugehörige Eigenfrequenz angibt. Die gesamte Ortsabhängigkeit, inklusive der Polarisation, ist in der dimensionslosen Modenfunktion $\vec{u}_l(\vec{r})$ enthalten für die folgende Normierung gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{V_l V_{l'}}} \int d^3r \vec{u}_l(\vec{r}) \vec{u}_{l'}(\vec{r}) = \delta_{l,l'} \quad (7.13)$$

Für den Fall der Box ist $V_l = \frac{L_x L_y L_z}{8}$. Der Wellenvektor \vec{k} taucht nur in den Modenfunktionen auf. Aufgrund der Randbedingungen gilt stets:

$$k_x = l_x \frac{\pi}{L_x}, \quad k_y = l_y \frac{\pi}{L_y}, \quad k_z = l_z \frac{\pi}{L_z} \quad \text{wobei } l_x, l_y, l_z \in \mathbb{N} \quad (7.14)$$

Die Zeitabhängigkeit ist im Erzeugungs- und Vernichtungsoperator enthalten:

$$\hat{a}_l^\dagger(t) = \hat{a}_l^\dagger(0) e^{i\omega_l t} \quad \text{und} \quad \hat{a}_l(t) = \hat{a}_l(0) e^{-i\omega_l t} \quad (7.15)$$

Aus Gl. (7.8) und (7.9) ergeben sich die Felder:

$$\begin{aligned} \hat{E}(\vec{r}, t) &= i \sum_l \sqrt{\frac{\hbar \omega_l}{2\varepsilon_0 V_l}} \vec{u}_l(\vec{r}) \left(\hat{a}_l(t) - \hat{a}_l^\dagger(t) \right) \\ \hat{B}(\vec{r}, t) &= \sum_l \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_l V_l}} \left(\vec{\nabla} \times \vec{u}_l(\vec{r}) \right) \left(\hat{a}_l(t) + \hat{a}_l^\dagger(t) \right) \end{aligned} \quad (7.16)$$

⁶Eine Ecke der Box wird auf den Ursprung des Koordinatensystems gelegt.

Laufende Wellen

Die Randbedingungen (7.11) können beispielsweise mit dem Ansatz $e^{i\vec{k}\vec{r}}$ erfüllt werden, sofern $e^{ik_x(x+L_x)} = e^{ik_x x}$ und Entsprechendes für die y - und z -Komponente gilt. Für die Komponenten von \vec{k} folgt:

$$k_x = l_x \frac{2\pi}{L_x}, \quad k_y = l_y \frac{2\pi}{L_y}, \quad k_z = l_z \frac{2\pi}{L_z} \quad \text{wobei } l_x, l_y, l_z \in \mathbb{N} \quad (7.17)$$

Das Vektorpotential kann in folgender Form dargestellt werden:

$$\hat{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \sum_{\sigma=1,2} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_{\vec{k}}V}} \vec{e}_{\vec{k},\sigma} \left(\hat{a}_{\vec{k},\sigma}(t)e^{i\vec{k}\vec{r}} + \hat{a}_{\vec{k},\sigma}^\dagger(t)e^{-i\vec{k}\vec{r}} \right) \quad (7.18)$$

Wobei die Moden über ihren Wellenvektor \vec{k} und ihre Polarisation σ definiert sind. Das Volumen der Box beträgt: $V = L_x L_y L_z$. Für die Felder ergibt sich:

$$\hat{E}(\vec{r}, t) = i \sum_{\vec{k}} \sum_{\sigma=1,2} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2\varepsilon_0V}} \vec{e}_{\vec{k},\sigma} \left(\hat{a}_{\vec{k},\sigma}(t)e^{i\vec{k}\vec{r}} - \hat{a}_{\vec{k},\sigma}^\dagger(t)e^{-i\vec{k}\vec{r}} \right) \quad (7.19)$$

$$\hat{B}(\vec{r}, t) = i \sum_{\vec{k}} \sum_{\sigma=1,2} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_{\vec{k}}V}} (\vec{k} \times \vec{e}_{\vec{k},\sigma}) \left(\hat{a}_{\vec{k},\sigma}(t)e^{i\vec{k}\vec{r}} - \hat{a}_{\vec{k},\sigma}^\dagger(t)e^{-i\vec{k}\vec{r}} \right) \quad (7.20)$$

Nach den Korrespondenzregeln der Quantenmechanik erhält man den Hamiltonoperator des elektromagnetischen Feldes aus Gl. (7.6), indem man die Felder durch ihre zugehörigen Operatoren ersetzt:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int_{V_M} \left[\varepsilon_0 \hat{E}^2(\vec{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} \hat{B}^2(\vec{r}, t) \right] d^3r \quad (7.21)$$

Man kann zeigen [83, 84], dass man sowohl für stehende als auch für laufende Wellen den Hamiltonoperator für eine einzelne Mode mit einer definierten Polarisation in der Form

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\hbar\omega}{2} \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger \right) \quad (7.22)$$

schreiben kann. Wobei $\hat{a} \equiv \hat{a}(0)$ und $\hat{a}^\dagger \equiv \hat{a}^\dagger(0)$ gesetzt wurde, vgl. Gl. (7.15).

Die gesuchten Vakuumfluktuationen E_{Vac} ergeben sich aus der Varianz des elektrischen Feldoperators:

$$\left(\Delta \hat{E}(\vec{r}, t) \right)^2 = \langle \hat{E}^2(\vec{r}, t) \rangle - \langle \hat{E}(\vec{r}, t) \rangle^2 = \langle \hat{E}^2(\vec{r}, t) \rangle \quad (7.23)$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt nur für eine Modenbesetzung mit Null Photonen. In diesem Fall verschwindet der Erwartungswert des elektrischen Feldoperators. Für eine laufende Welle erhält man die Varianz des Vakuumfeldes einer einzelnen Mode der Frequenz ω_c (vgl. [84]) aus

$$\begin{aligned} \left(\Delta \hat{E}(\vec{r}, t) \right)^2 &= \langle \hat{E}(\vec{r}, t) \hat{E}(\vec{r}, t) \rangle \\ &= \frac{\hbar\omega_c}{2\varepsilon_0V_M} \left(\langle 0|\hat{a}^2|0\rangle e^{2i(\vec{k}\vec{r}-\omega_c t)} + \langle 0|(\hat{a}^\dagger)^2|0\rangle e^{-2i(\vec{k}\vec{r}-\omega_c t)} + \langle 0|\hat{a}\hat{a}^\dagger|0\rangle + \langle 0|\hat{a}^\dagger\hat{a}|0\rangle \right) \\ &= \frac{\hbar\omega_c}{2\varepsilon_0V_M} (0 + 0 + 1 + 0) \end{aligned} \quad (7.24)$$

Und somit

$$E_{Vak} \equiv \sqrt{(\Delta\hat{E})^2} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_c}{2\varepsilon_0 V_M}} \quad (7.25)$$

Für den Fall einer stehenden Welle erhält man analog [11, 83]:

$$E_{Vak} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_c}{2\varepsilon_0 V_M}} \vec{u}(\vec{r}) \quad (7.26)$$

Ein realer optischer Resonator besteht aus zwei oder mehr Spiegeln, die die Randbedingungen für das Lichtfeld festlegen. In den folgenden Abschnitten wird das Modenvolumen der TEM_{00} Gaußmode eines Ringresonators und eines Stehwellenresonators berechnet. Die Gaußstrahlen beider Resonatoren sollen hierbei nur einen Fokus aufweisen.

Berechnung des Modenvolumens eines Ringresonators

Der für die Messungen verwendete Ringresonator weist einen Fokus in der Symmetrieebene zwischen den beiden Hochreflektoren auf, vgl. Abb. 2.6. Für diesen Fall kann die Berechnung des Modenvolumens V_M der TEM_{00} Mode mit Hilfe der Intensität eines einfachen Gaußstrahls berechnet werden:

$$V_M = \int \frac{I(r, z)}{I_{max}} dV \quad (7.27)$$

wobei für die Intensität in Zylinderkoordinaten

$$I(r, z) = \frac{2P}{\pi w^2(z)} e^{-2r^2/w^2(z)} \quad \text{mit} \quad w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)^2} \quad (7.28)$$

gilt. P bezeichnet die mittlere Leistung, die im Experiment gerade der Pumpleistung entspricht und $w(z)$ den Strahlradius. w_0 wird als Strahltaile bezeichnet und entspricht dem Strahlradius im Fokus bei $z = 0$.

Die maximale Intensität ist durch

$$I_{max} = I(r = 0, z = 0) = \frac{2P}{\pi w_0^2} \quad (7.29)$$

gegeben. Für das Modenvolumen folgt somit:

$$V_M = \int \frac{w_0^2}{w^2(z)} e^{-2r^2/w^2(z)} dV = \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^L dz \frac{w_0^2}{w^2(z)} e^{-2r^2/w^2(z)} \quad (7.30)$$

wobei L die Umlauflänge des Ringresonators bezeichnet. Mit der Substitution

$$\rho^2 = \frac{r^2}{w^2(z)} \quad \text{und} \quad r dr = w^2(z) \rho d\rho \quad (7.31)$$

und der Ausführung der Integration über den Winkel φ folgt:

$$V_M = 2\pi w_0^2 \int_0^L dz \int_0^\infty d\rho \rho e^{-2\rho^2} \quad (7.32)$$

$$= 2\pi w_0^2 L \left[-\frac{1}{4} e^{-2\rho^2} \right]_0^\infty = \frac{\pi}{2} w_0^2 L \quad (7.33)$$

Bei einem elliptischen Strahlquerschnitt im Fokus wird die Kreisfläche πw_0^2 durch die Ellipsenfläche $\pi w_x w_y$ ersetzt:

$$V_M = \frac{\pi}{2} w_x w_y L \quad (7.34)$$

wobei w_x, w_y die Strahltaillen in vertikaler und horizontaler Richtung angeben.

Modenvolumen eines Stehwellenresonators

Im Falle eines Stehwellenresonators gilt für das Modenvolumen:

$$V_S = \int \sin^2(2kz) \frac{w_0^2}{w^2(z)} e^{-2r^2/w^2(z)} dV \quad (7.35)$$

Mit der Substitution (7.31) und der Ausführung der Integration über φ folgt:

$$V_S = 2\pi w_0^2 \int_0^L \sin^2(2kz) dz \int_0^\infty d\rho \rho e^{-2\rho^2} \quad (7.36)$$

$$= 2\pi w_0^2 \left(\frac{L}{2}\right) \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{4} w_0^2 L \quad (7.37)$$

Da für die Wellenlänge im Resonator stets $n \cdot \frac{\lambda}{2} = L$, $n \in \mathbb{N}$ gilt, wobei L den Abstand der Spiegel bezeichnet, folgt für das Integral über $\sin^2(2kz)$ der Wert $\frac{L}{2}$.

7.2. Herleitung der CARL Gleichungen

Der Hamiltonoperator des Systems, das aus einem BEC in einem Ringresonator besteht, ist durch

$$\begin{aligned} \hat{H}(\vec{r}, t) = & \int \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}, t) \left(-\frac{\hbar^2 \nabla_r^2}{2m} + \hat{U}_{dip}(\vec{r}, t) \right) \hat{\Psi}(\vec{r}, t) dV \\ & + \int \hbar \Delta \left(\hat{A}_+^\dagger(\vec{r}, t) \hat{A}_+(\vec{r}, t) + \hat{A}_-^\dagger(\vec{r}, t) \hat{A}_-(\vec{r}, t) \right) dV \end{aligned} \quad (7.38)$$

gegeben. Hierbei wurden die in Kapitel 5.3 erläuterten Näherungen verwendet. Das Lichtfeld in der Pumpmode wird in zweiter Quantisierung mit \hat{A}_+ , das Lichtfeld in der Testmode mit \hat{A}_- bezeichnet. Als Energienullpunkt wurde $\hbar\omega_p$ gewählt. Die Verstimmung ist über

$$\Delta = \omega_c - \omega_p \quad (7.39)$$

definiert, wobei ω_c eine Resonanzfrequenz des Ringresonators bezeichnet. Die Lichtfelder beinhalten die Modenfunktionen $v_\pm(\vec{r})$, sowie die bosonischen Operatoren a_\pm und lauten in der Heisenberg Darstellung:

$$\begin{aligned} \hat{A}_+(\vec{r}, t) &= \hat{a}_+(t) v_+(\vec{r}) \\ \hat{A}_-(\vec{r}, t) &= \hat{a}_-(t) v_-(\vec{r}) \end{aligned} \quad (7.40)$$

Dementsprechend gelten die bosonischen Kommutatorrelationen (siehe Kapitel 7.5):

$$\left[\hat{a}_i, \hat{a}_j \right] = \left[\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger \right] = 0, \quad \text{und} \quad \left[\hat{a}_\pm, \hat{a}_\pm^\dagger \right] = 1 \quad (7.41)$$

wobei $i, j = \{+, -\}$ gilt. Für die Modenfunktionen der Lichtfelder gilt die Normierung

$$\int v_{\pm}^*(\vec{r}) v_{\pm}(\vec{r}) dV = 1 \quad (7.42)$$

wobei das Integral über das Modenvolumen des Resonators auszuführen ist.

Da es sich bei ^{87}Rb um Bosonen handelt, gelten für die Materiefeldoperatoren die Vertauschungsrelationen:

$$[\hat{\Psi}(\vec{r}), \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}')] = \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \quad (7.43)$$

und

$$[\hat{\Psi}(\vec{r}), \hat{\Psi}(\vec{r}')] = [\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}), \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}')] = 0 \quad (7.44)$$

Materie- und Lichtfelder kommutieren außerdem untereinander.

Die Bewegungsgleichung des Materiefeldes erhält man aus der Heisenberg Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\vec{r}', t) &= \frac{i}{\hbar} [\hat{H}(\vec{r}, t), \hat{\Psi}(\vec{r}', t)] \\ &= \frac{i}{\hbar} \int dV \left[\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \left(-\frac{\hbar^2 \nabla_r^2}{2m} \right) \hat{\Psi}(\vec{r}), \hat{\Psi}(\vec{r}') \right] \\ &\quad + \frac{i}{\hbar} \int dV \left[\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}), \hat{\Psi}(\vec{r}') \right] \hat{U}_{dip}(\vec{r}) \end{aligned} \quad (7.45)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{i}{\hbar} \int dV \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \right) \left(\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \nabla_r^2 \hat{\Psi}(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}') - \hat{\Psi}(\vec{r}') \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \nabla_r^2 \hat{\Psi}(\vec{r}) \right) \\ &\quad + \frac{i}{\hbar} \int dV \left(\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}') - \hat{\Psi}(\vec{r}') \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}) \right) \hat{U}_{dip}(\vec{r}) \end{aligned} \quad (7.46)$$

$$= \frac{i}{\hbar} \int dV \left(\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}') - \hat{\Psi}(\vec{r}') \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \right) \left(-\frac{\hbar^2 \nabla_r^2}{2m} + \hat{U}_{dip}(\vec{r}) \right) \hat{\Psi}(\vec{r}) \quad (7.47)$$

$$= -\frac{i}{\hbar} \int dV \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \left(-\frac{\hbar^2 \nabla_r^2}{2m} + \hat{U}_{dip}(\vec{r}) \right) \hat{\Psi}(\vec{r}) \quad (7.48)$$

$$= -\frac{i}{\hbar} \left(-\frac{\hbar^2 \nabla_{r'}^2}{2m} + \hat{U}_{dip}(\vec{r}') \right) \hat{\Psi}(\vec{r}') \quad (7.49)$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde hier die Abhängigkeit von t nicht durchgehend ausgeschrieben. Im Folgenden werden auch die Abhängigkeiten von \vec{r} nicht mehr durchgehend ausgeschrieben.

Für das Materiefeld gilt demnach

$$i\hbar \partial_t \hat{\Psi}(\vec{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + \hat{U}_{dip}(\vec{r}, t) \right) \hat{\Psi}(\vec{r}, t) \quad (7.50)$$

Die Heisenberg Gleichung für das Lichtfeld in der Testmode enthält nur zwei Terme, da Materie- und Lichtfeld kommutieren.

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{A}_- &= \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{A}_-] \\ &= i\Delta \left[\int (\hat{A}_-^\dagger \hat{A}_- + \hat{A}_+^\dagger \hat{A}_+) dV, \hat{A}_- \right] + \frac{i}{\hbar} \left[\int \hat{\Psi}^\dagger \hat{U}_{dip} \hat{\Psi} dV, \hat{A}_- \right] \end{aligned} \quad (7.51)$$

Für den ersten Term erhält man unter Benutzung von (7.41) und (7.42)

$$i\Delta \left[\int (\hat{A}_-^\dagger \hat{A}_- + \hat{A}_+^\dagger \hat{A}_+) dV, \hat{A}_- \right] = -i\Delta \hat{A}_- \quad (7.52)$$

Somit gilt

$$\partial_t \hat{A}_- = -i\Delta \hat{A}_- + \frac{i}{\hbar} \left[\int \hat{\Psi}^\dagger \hat{U}_{dip} \hat{\Psi} dV, \hat{A}_- \right] \quad (7.53)$$

und entsprechend für das Pumplichtfeld

$$\partial_t \hat{A}_+ = -i\Delta \hat{A}_+ + \frac{i}{\hbar} \left[\int \hat{\Psi}^\dagger \hat{U}_{dip} \hat{\Psi} dV, \hat{A}_+ \right] \quad (7.54)$$

Zur weiteren Auswertung dieser Ausdrücke muss das Dipolpotential eingesetzt werden. Dieses ist proportional zur Intensität im Resonator

$$\hat{U}_{dip} = \hbar U_0 |\hat{A}_+ + \hat{A}_-|^2 = \hbar U_0 (\hat{A}_+ + \hat{A}_-) (\hat{A}_+^\dagger + \hat{A}_-^\dagger) \quad (7.55)$$

Setzt man (7.55) in Gl. (7.53) und Gl. (7.54) ein, taucht in beiden Fällen das Integral

$$\int \hat{\Psi}^\dagger (\hat{A}_+ + \hat{A}_-) (\hat{A}_+^\dagger + \hat{A}_-^\dagger) \hat{\Psi} dV \equiv \hat{I} \quad (7.56)$$

auf. Für dieses gilt:

$$\begin{aligned} \hat{I} &= \int \hat{\Psi}^\dagger (\hat{A}_+^\dagger \hat{A}_+ + \hat{A}_+^\dagger \hat{A}_- + \hat{A}_-^\dagger \hat{A}_+ + \hat{A}_-^\dagger \hat{A}_-) \hat{\Psi} dV \\ &= \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+ K_{++} + \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_- K_{--} + \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_- K_{+-} + \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_+ K_{-+} \end{aligned} \quad (7.57)$$

wobei

$$\begin{aligned} K_{++} &\equiv \int \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} v_+^* v_+ dV \\ K_{--} &\equiv \int \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} v_-^* v_- dV \\ K_{+-} &\equiv \int \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} v_+^* v_- dV \\ K_{-+} &\equiv \int \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} v_-^* v_+ dV \end{aligned} \quad (7.58)$$

gesetzt wurde. Somit folgt für den Kommutator von \hat{I} mit dem Pumpfeld \hat{A}_+ :

$$\begin{aligned} [\hat{I}, \hat{A}_+] &= v_+ K_{++} [\hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+, \hat{a}_+] + v_+ K_{--} [\hat{a}_-^\dagger \hat{a}_-, \hat{a}_+] \\ &\quad + v_+ K_{+-} [\hat{a}_+^\dagger \hat{a}_-, \hat{a}_+] + v_+ K_{-+} [\hat{a}_-^\dagger \hat{a}_+, \hat{a}_+] \\ &= -v_+ K_{++} \hat{a}_+ - v_+ K_{+-} \hat{a}_- \\ &= -v_+ \hat{a}_+ \int \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} v_+^* v_+ dV - v_+ \hat{a}_- \int \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} v_+^* v_- dV \end{aligned} \quad (7.59)$$

wobei

$$\begin{aligned} [\hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+, \hat{a}_+] &= -\hat{a}_+ \\ [\hat{a}_-^\dagger \hat{a}_-, \hat{a}_+] &= 0 \\ [\hat{a}_+^\dagger \hat{a}_-, \hat{a}_+] &= -\hat{a}_- \\ [\hat{a}_-^\dagger \hat{a}_+, \hat{a}_+] &= 0 \end{aligned} \quad (7.60)$$

verwendet wurde. Für das Pumplichtfeld (7.54) gilt somit:

$$\partial_t \hat{A}_+ = -i\Delta \hat{a}_+ v_+ - v_+ \hat{a}_+ iU_0 \int \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} v_+^* v_+ dV - v_+ \hat{a}_- iU_0 \int \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} v_+^* v_- dV \quad (7.61)$$

Da $\hat{A}_+ = \hat{a}_+ v_+$ gilt, folgt:

$$\partial_t \hat{a}_+ = \left(-i\Delta - iU_0 \int \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} v_+^* v_+ dV \right) \hat{a}_+ - \left(iU_0 \int \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} v_+^* v_- dV \right) \hat{a}_- \quad (7.62)$$

In analoger Vorgehensweise berechnet man den Kommutator $[\hat{I}, \hat{A}_-]$ und erhält letztlich:

$$\partial_t \hat{a}_- = \left(-i\Delta - iU_0 \int \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} v_-^* v_- dV \right) \hat{a}_- - \left(iU_0 \int \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} v_-^* v_+ dV \right) \hat{a}_+ \quad (7.63)$$

Mit (7.55) und (7.40) folgt für die Bewegungsgleichung des Materiefeldes (7.50)

$$\begin{aligned} i\hbar \partial_t \hat{\Psi}(\vec{r}, t) &= \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + \hbar U_0 |\hat{A}_+ + \hat{A}_-|^2 \right) \hat{\Psi}(\vec{r}, t) \\ &= \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + \hbar U_0 |\hat{a}_+ v_+ + \hat{a}_- v_-|^2 \right) \hat{\Psi}(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (7.64)$$

Das physikalische System wird demnach, in zweiter Quantisierung, durch folgendes gekoppeltes Gleichungssystem beschrieben:

$$\begin{aligned} i\hbar \partial_t \hat{\Psi}(\vec{r}, t) &= \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + \hbar U_0 |\hat{a}_+ v_+ + \hat{a}_- v_-|^2 \right) \hat{\Psi}(\vec{r}, t) \quad (7.65) \\ \partial_t \hat{a}_+(t) &= \left(-i\Delta - iU_0 \int \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} v_+^* v_+ dV \right) \hat{a}_+(t) - iU_0 \left(\int \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} v_+^* v_- dV \right) \hat{a}_-(t) \\ \partial_t \hat{a}_-(t) &= \left(-i\Delta - iU_0 \int \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} v_-^* v_- dV \right) \hat{a}_-(t) - iU_0 \left(\int \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} v_-^* v_+ dV \right) \hat{a}_+(t) \end{aligned}$$

Dieses kann als Ausgangspunkt theoretischer Beschreibungen für zukünftige Messungen mit Einzelatom und Einzelphoton Nachweisgenauigkeit angesehen werden, sofern die in Kap. 5.3 dargelegten Näherungen erfüllt sind.

7.2.1. Mean field Näherung

Zur Beschreibung der experimentellen Daten ist eine Beschreibung in zweiter Quantisierung nicht notwendig, da eine Messung von Fluktuationen auf der Skala einzelner Licht- und Materiequanten mit dem derzeitigen Aufbau nicht möglich ist. Die Gleichungen (7.65) vereinfachen sich erheblich, wenn man die sogenannte „mean field“ Näherung verwendet, die auf den russischen Physiker und Mathematiker N. Bogoljubow zurückgeht. Die Grundidee besteht darin, dass für große Teilchenzahlen⁷, einzelne Quantenfluktuationen den physikalischen Zustand des Systems nicht maßgeblich verändern können. Wirkt beispielsweise der Erzeugungsoperator auf das Lichtfeld, so wird ein Photon in der entsprechenden Lichtmode erzeugt. Der Gesamtzustand enthält dann $(N_{ph} + 1)$ Photonen. Im Grenzwert großer Photonenzahlen sind aber

⁷Es kann sich hierbei um die Atomzahl im Kondensat (N_a) oder auch um die Photonenzahl N_{ph} in einer Lichtmode handeln.

die Zustände mit N_{ph} und $(N_{ph} + 1) \approx N_{ph}$ praktisch identisch⁸ und die Operatoren können durch komplexe Zahlen ersetzt werden:

$$[\hat{a}_\pm, \hat{a}_\pm^\dagger] \approx 0 \rightarrow \hat{a}_\pm \approx a_\pm \quad \text{und} \quad \hat{a}_\pm^\dagger \approx a_\pm^*; \quad \text{mit} \quad \{a_\pm, a_\pm^*\} \in \mathbb{C} \quad (7.66)$$

Die Photonenzahl N_{ph} in den Lichtmoden des Resonators

$$N_{ph}^\pm = \int \langle \hat{A}_\pm^\dagger \hat{A}_\pm \rangle \approx a_\pm^* a_\pm \int v_\pm^* v_\pm dV = a_\pm^* a_\pm \quad (7.67)$$

ist dann einfach durch $|a_\pm|^2$ gegeben. Die elektromagnetischen Moden werden für die Beschreibung des Experiments als

$$v_+(\vec{r}) = M(r)e^{ikz} \quad \text{und} \quad v_-(\vec{r}) = M(r)e^{-ikz} \quad (7.68)$$

angesetzt. Hierbei wird angenommen, dass die z -Abhängigkeit des Strahlprofils am Ort des Kondensats vernachlässigt werden kann. Die Normierung der Modenfunktion wird für gewöhnlich derart gewählt, dass im Zentrum der Mode

$$|M(r=0)|^2 = M(0)M(0)^* = 1 \quad (7.69)$$

gilt.

Für die Materiefeldoperatoren besteht die mean field Näherung in einer Aufspaltung des Feldoperators in einen komplexen Erwartungswert⁹ und einen Operatoranteil $\hat{\Psi}'$, der vernachlässigt wird. Sämtliche Effekte, die von Quantenfluktuationen herrühren, werden somit nicht mehr berücksichtigt.

$$\hat{\Psi}(\vec{r}, t) = \langle \hat{\Psi}(\vec{r}, t) \rangle + \hat{\Psi}'(\vec{r}, t) \equiv \psi(\vec{r}, t) + \hat{\Psi}'(\vec{r}, t) \approx \psi(\vec{r}, t) \quad (7.70)$$

Die sogenannte Kondensats-Wellenfunktion $\psi(\vec{r}, t)$ wird als eindimensionale Linearkombination von Impulszuständen angesetzt.

$$\begin{aligned} \psi(z, t) &= \sum_n c_n(t) e^{2inkz} \\ \psi^*(z, t) &= \sum_n c_n^*(t) e^{-2inkz}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned} \quad (7.71)$$

Die mittlere Atomzahl N_a ergibt sich aus dem Erwartungswert des Teilchenzahloperators (vgl. Gl. (7.139)) zu

$$\begin{aligned} N_a &= \langle \int \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} dV \rangle = \int \psi^* \psi dV \\ &= \int \left(\sum_n c_n^* e^{-2inkz} \sum_m c_m e^{2imkz} \right) dV \\ &= \int \sum_{n,m} c_n c_m^* e^{2i(n-m)kz} dV = \sum_{n,m} c_n^* c_m \int e^{2i(m-n)kz} dV \\ &= \sum_n c_n^* c_n \end{aligned} \quad (7.72)$$

⁸Zumindest für den Fall von kohärenten Zuständen. Betrachtet man beispielsweise Nummernzustände, so ist der Zustand mit $N + 1$ Energiequanten sogar orthogonal zum Zustand mit Quantenzahl N . Diese Zustände können demnach nie als identisch angesehen werden.

⁹Bei diesem handelt es sich um eine komplexwertige Funktion, die nicht mit dem Erwartungswert einer Messreihe verwechselt werden darf.

Die Wellenfunktion ist somit auf die Gesamtzahl der kondensierten Atome normiert:

$$\int \psi^* \psi dV = N_a \quad (7.73)$$

Setzt man (7.68) und (7.71) in das Gleichungssystem (7.65) ein, erhält man für die Wellenfunktion

$$i\hbar \sum_n \dot{c}_n e^{2inkz} = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + \hbar U_0 \left| a_+ M(0) e^{ikz} + a_- M(0) e^{-ikz} \right|^2 \right) \sum_n c_n e^{2inkz} \quad (7.74)$$

Da das Kondensat typischerweise eine deutlich kleinere Ausdehnung als das Modenprofil hat, wurde hier die Näherung $M(r) \approx M(r=0)$ verwendet. Auswertung des Betragsquadrates unter Verwendung von Gl. (7.69) und anschließendem Koeffizientenvergleich liefert:

$$i\hbar \dot{c}_n = n^2 \hbar \omega_r c_n + \hbar U_0 (a_+ a_+^* + a_- a_-^*) c_n + \hbar U_0 (c_{n-1} a_+ a_-^* + c_{n+1} a_- a_+^*) \quad (7.75)$$

$$= n^2 \hbar \omega_r c_n + \hbar U_0 (c_{n-1} a_+ a_-^* + c_{n+1} a_- a_+^*) \quad (7.76)$$

wobei $\omega_r = \frac{4\hbar k^2}{2m}$ gilt. Der zweite Term in Gl. (7.75) führt lediglich zu einem globalen Phasenfaktor, der vor der Gesamtwellenfunktion auftritt. Da, wie sich gleich zeigen wird, in den Feldgleichungen der Lichtfelder die Koeffizienten nur in der Kombination $c_n c_m^*$ auftreten, hat dieser globale Phasenfaktor keine Auswirkungen auf die Vorhersage von Messergebnissen und kann deshalb weggelassen werden.

Mit (7.68) und (7.71) folgt für das Lichtfeld der Pumpmode (Gl. (7.65)):

$$\begin{aligned} \dot{a}_+ &= \left(-i\Delta - iU_0 \int \sum c_n^* e^{-2inkz} \sum c_m e^{2imkz} |M(0)|^2 dV \right) a_+ \\ &\quad - iU_0 \left(\int \sum c_n^* e^{-2inkz} \sum c_m e^{2imkz} |M(0)|^2 e^{-2ikz} dV \right) a_- \\ &= \left(-i\Delta - iU_0 \sum_{n,m} c_n^* c_m \int e^{2i(m-n)kz} dV \right) a_+ \\ &\quad - iU_0 \sum_{n,m} c_n^* c_m \left(\int e^{2i(m-(n+1))kz} dV \right) a_- \\ &= (-i\Delta - iU_0 N_a) a_+ - iU_0 a_- \sum_n c_n^* c_{n+1} \end{aligned} \quad (7.77)$$

Wobei (7.69),

$$\int e^{2i(m-n)kz} dV = \delta_{m,n} \quad \text{und} \quad \int e^{2i(m-(n+1))kz} dV = \delta_{m,(n+1)} \quad (7.78)$$

verwendet wurde. Für die Testmode erhält man analog:

$$\dot{a}_- = (-i\Delta - iU_0 N_a) a_- - iU_0 a_+ \sum_n c_n^* c_{n-1} \quad (7.79)$$

Zusammenfassend geht das Gleichungssystem (7.65) in der mean field Näherung in

$$\begin{aligned} \dot{c}_n(t) &= -in^2 \omega_r c_n - iU_0 (c_{n-1} a_+ a_-^* + c_{n+1} a_- a_+^*) \\ \dot{a}_+(t) &= (-i\Delta - iU_0 N_a) a_+ - iU_0 a_- \sum_n c_n^* c_{n+1} \\ \dot{a}_-(t) &= (-i\Delta - iU_0 N_a) a_- - iU_0 a_+ \sum_n c_n^* c_{n-1} \end{aligned} \quad (7.80)$$

über. Diese entsprechen den Gleichungen (6.7), wobei noch der Term $-\kappa a_{\pm}$ zu berücksichtigen ist, um den Zerfall der Lichtfelder im Resonator zu beschreiben.

7.3. Eigenwerte und Eigenvektoren des analytischen 3-Moden Modells

Das Gleichungssystem

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} c_{-1} \\ a \\ c_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_r & K & 0 \\ K & \Delta & K \\ 0 & -K & -\omega_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{-1} \\ a \\ c_1^* \end{pmatrix} \quad (7.81)$$

wird mit dem Ansatz

$$\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_{\varepsilon} e^{-i\varepsilon t} \quad (7.82)$$

$$\rightarrow i \frac{d}{dt} \vec{\varphi} = \varepsilon \vec{\varphi}_{\varepsilon} e^{-i\varepsilon t} \quad (7.83)$$

zum Eigenwertproblem

$$\begin{pmatrix} \omega_r & K & 0 \\ K & \Delta & K \\ 0 & -K & -\omega_r \end{pmatrix} \vec{\varphi}_{\varepsilon} = \varepsilon \vec{\varphi}_{\varepsilon} \quad (7.84)$$

Oder in Einheiten von ω_r :

$$\begin{pmatrix} 1 & \tilde{K} & 0 \\ \tilde{K} & \tilde{\Delta} & \tilde{K} \\ 0 & -\tilde{K} & -1 \end{pmatrix} \vec{\varphi}_{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon} \vec{\varphi}_{\varepsilon} \quad (7.85)$$

Die Eigenvektoren und Eigenwerte sind durch

$$\begin{aligned} \vec{\varphi}_{\tilde{\varepsilon}_1} &= \begin{pmatrix} -\tilde{\varepsilon}_1^2 - Q + \frac{2}{3}\tilde{\Delta} + \tilde{\varepsilon}_1\tilde{\Delta} - \tilde{K}^2 \\ -\tilde{K}(\tilde{\varepsilon}_1 + 1) \\ \tilde{K}^2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \varphi_{1x} \\ \varphi_{1y} \\ \varphi_{1z} \end{pmatrix} \\ \vec{\varphi}_{\tilde{\varepsilon}_2} &= \begin{pmatrix} -\tilde{\varepsilon}_2^2 + \frac{P}{2} + \frac{2}{3}\tilde{\Delta} - i\frac{\sqrt{3}}{2}Q + \tilde{\varepsilon}_2\tilde{\Delta} - \tilde{K}^2 \\ -\tilde{K}(\tilde{\varepsilon}_2 + 1) \\ \tilde{K}^2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \varphi_{2x} \\ \varphi_{2y} \\ \varphi_{2z} \end{pmatrix} \\ \vec{\varphi}_{\tilde{\varepsilon}_3} &= \begin{pmatrix} -\tilde{\varepsilon}_3^2 + \frac{P}{2} + \frac{2}{3}\tilde{\Delta} + i\frac{\sqrt{3}}{2}Q + \tilde{\varepsilon}_3\tilde{\Delta} - \tilde{K}^2 \\ -\tilde{K}(\tilde{\varepsilon}_3 + 1) \\ \tilde{K}^2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \varphi_{3x} \\ \varphi_{3y} \\ \varphi_{3z} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.86)$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_1 &= P + \frac{1}{3}\tilde{\Delta} \\ \tilde{\varepsilon}_2 &= -\frac{1}{2}P + \frac{1}{3}\tilde{\Delta} + i\frac{\sqrt{3}}{2}Q \\ \tilde{\varepsilon}_3 &= -\frac{1}{2}P + \frac{1}{3}\tilde{\Delta} - i\frac{\sqrt{3}}{2}Q \end{aligned} \quad (7.87)$$

gegeben, wobei

$$W \equiv \sqrt[3]{-9\tilde{\Delta} + 27\tilde{K}^2 + \tilde{\Delta}^3 + 3\sqrt{-3 + 6\tilde{\Delta}^2 - 3\tilde{\Delta}^4 - 54\tilde{\Delta}\tilde{K}^2 + 81\tilde{K}^4 + 6\tilde{K}^2\tilde{\Delta}^3}} \quad (7.88)$$

$$P \equiv \frac{1}{3}W + \frac{1}{W} \left(1 + \frac{1}{3}\tilde{\Delta}^2\right)$$

$$Q \equiv \frac{1}{3}W - \frac{1}{W} \left(1 + \frac{1}{3}\tilde{\Delta}^2\right) \quad (7.89)$$

gilt. Die Eigenwerte weisen nur dann nichtverschwindende Imaginärteile auf, wenn der Ausdruck unter der Quadratwurzel in (7.88) kleiner Null wird. Die kritische Kopplungsstärke erhält man somit aus

$$0 = -3 + 6\tilde{\Delta}^2 - 3\tilde{\Delta}^4 - 54\tilde{\Delta}\tilde{K}_c^2 + 81\tilde{K}_c^4 + 6\tilde{K}_c^2\tilde{\Delta}^3 \quad (7.90)$$

$$\rightarrow \tilde{K}_c^2 = \frac{1}{27}[9\tilde{\Delta} - \tilde{\Delta}^3 + (3 + \tilde{\Delta}^2)^{3/2}] \quad (7.91)$$

Für $\tilde{K} = \tilde{K}_c$ sind die Eigenzustände $\vec{\varphi}_{\tilde{\varepsilon}_2}$ und $\vec{\varphi}_{\tilde{\varepsilon}_3}$ identisch, da offensichtlich

$$\varphi_{2z} = \varphi_{3z}, \quad \forall \tilde{K} \quad (7.92)$$

gilt (vgl. Gl. (7.86)) und aus Abb. 7.2 ersichtlich ist, dass außerdem sowohl für die Real- als auch für die Imaginärteile

$$\varphi_{2x} = \varphi_{3x} \quad \text{und} \quad \varphi_{2y} = \varphi_{3y}, \quad \tilde{K} = \tilde{K}_c \quad (7.93)$$

gilt. Somit liegt für $\tilde{K} = \tilde{K}_c$ ein exzeptioneller Punkt vor.

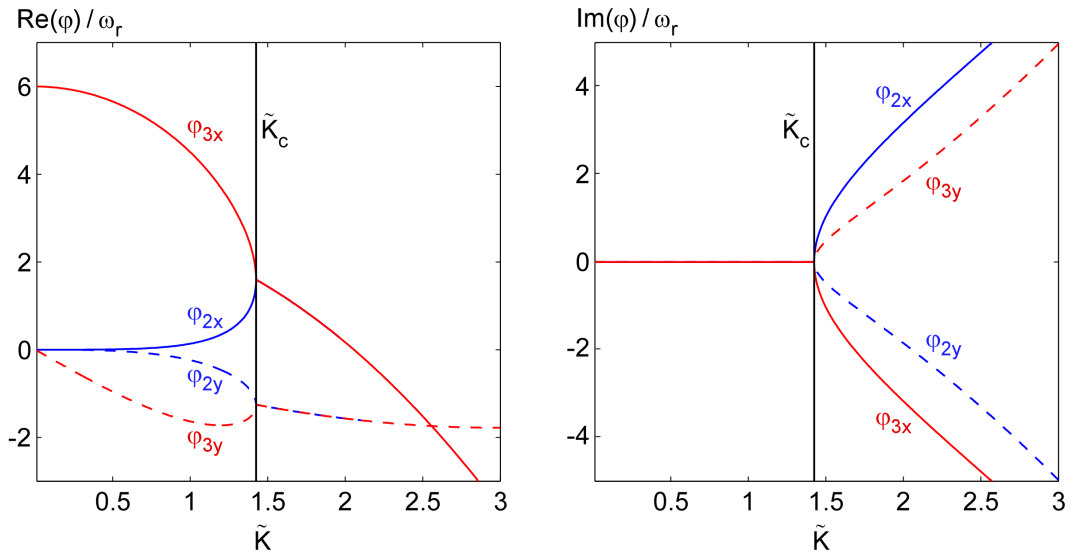


Abbildung 7.2.: Real- und Imaginärteile der Komponenten von $\vec{\varphi}_{\tilde{\varepsilon}_2}$ und $\vec{\varphi}_{\tilde{\varepsilon}_3}$ für $\Delta = 4\omega_r$. Für $\tilde{K} = \tilde{K}_c$ sind $\vec{\varphi}_{\tilde{\varepsilon}_2}$ und $\vec{\varphi}_{\tilde{\varepsilon}_3}$ Komponentenweise gleich und somit identisch. Diese Aussage gilt auch für negative Δ .

7.4. Abstände der Impulsmoden im Flugzeitbild

Ein bisher nur unvollständig verstandener Effekt spiegelt sich in den Abständen der Impulsmoden $|p_0\rangle$ und $|p_1\rangle$ im Flugzeitbild wieder. An die Dichteverteilungen, die nach 9 ms freier Fallzeit detektiert wurden, wurden jeweils zwei Gaußkurven angepasst. Die Abstände der Maximalwerte dieser Gaußkurven, im Folgenden mit D bezeichnet, sind in Abb. 7.3, in Abhängigkeit der Verstimmung, dargestellt.

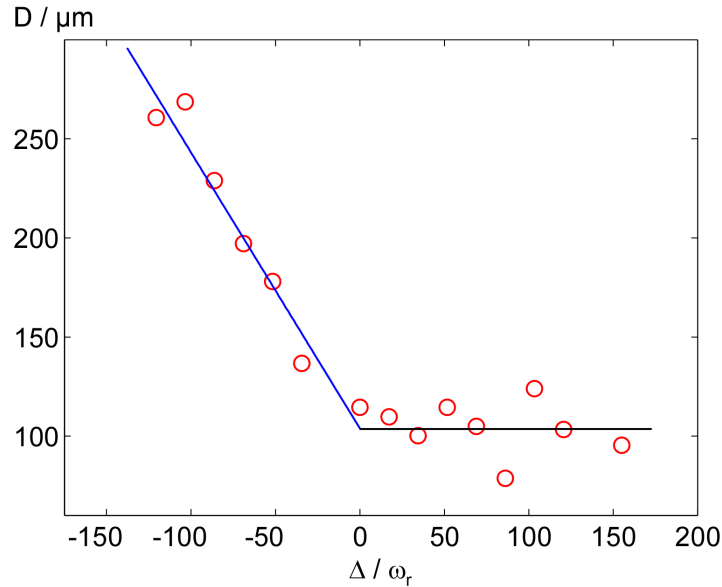


Abbildung 7.3.: Abstände der Maximalwerte der angepassten Gaußkurven in Abhängigkeit der Verstimmung. Der Datenverlauf für negative Δ scheint der Annahme eines quantisierten Impulsübertrages zu widersprechen.

Mit der kinetischen Energie $\hbar\omega_r$, die der Zustand $|p_1\rangle$ besitzen sollte, ergibt sich eine Geschwindigkeit der bewegten Atome von

$$v_r = \sqrt{\frac{2\hbar\omega_r}{m}} = 1,2 \frac{\text{cm}}{\text{s}}. \quad (7.94)$$

Der Abstand der Maximalwerte der Gaußkurven sollte demnach

$$D_0 = v_r \cdot 9 \text{ ms} = 104 \mu\text{m} \quad (7.95)$$

betragen. Unter der Annahme, dass für positive Verstimmung der mittlere Abstand dem erwartenden Wert von D_0 entspricht¹⁰, kann ein Umrechnungsfaktor für die Absorptionsabbildung angegeben werden, der $4,77 \mu\text{m}/\text{Pixel}$ beträgt.

Für negative Verstimmungen ist zusätzlich zu den Datenpunkten, ein angepasster, linearer Verlauf mit einer Steigung von $-1,4 \mu\text{m}/\omega_r$ dargestellt. Die Absorptionsabbildungen wurden zwar mit verschiedenen Pumpleistungen aufgenommen, die, bei gegebener Verstimmung, gerade der kritischen Pumpleistung entsprach, trotzdem

¹⁰Die Abweichungen sind vermutlich auf Positionsschwankungen der thermischen Hintergrundatome zurückzuführen.

sind die Datenpunkte für negative Δ damit nicht erklärbar. Unabhängig von der Intensität und der Verstimmung Δ , sollte der Impulsübertrag auf die Atome ein ganzzahliges Vielfaches von $2\hbar k$ sein. Der Ansatz des quantisierten Impulsübertrages scheint für negative Δ nicht mehr anwendbar zu sein. Trotzdem liefert dieser Ansatz eine relativ gute Übereinstimmung mit den beobachteten kritischen Pumpleistungen, auch für negative Verstimmungen, siehe Abb. 6.7.

7.5. Vielteilchenphysik und zweite Quantisierung

Betrachtet man ein quantenmechanisches System, das aus mehreren Teilchen besteht, so stößt man auf das Problem der sogenannten Austauschentartung. Diese tritt immer dann auf, wenn man ein System aus identischen Teilchen betrachtet. Zwei Teilchen werden als identisch bezeichnet, wenn sie sich in allen inneren Eigenschaften wie Ladung, Masse, Spin etc. gleichen. Ist dies der Fall, kann ein Vertauschen zweier Teilchen keinen Einfluss auf das physikalische Verhalten des Systems haben und die Teilchen können nur als identisch und damit ununterscheidbar angesehen werden. Diese Ununterscheidbarkeit führt zu Schwierigkeiten in der physikalischen Beschreibung des Systems: Betrachtet man beispielsweise zwei Teilchen, die quantenmechanisch durch Wellenpakete beschrieben werden und zu einem beliebigen Zeitpunkt der Dynamik einen Überlappungsbereich aufweisen, so ist anschließend keine eindeutige Zuordnung von Teilchen und Wellenpaket mehr möglich. Man kann dem System demnach mehrere mathematische Zustände (Ket Vektoren) zuweisen, die alle denselben physikalischen Zustand beschreiben. Diese Austauschentartung führt zu einem grundlegenden Problem, da die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten von Messergebnissen von der Wahl des Ket Vektors zur Zeit der Messung abhängt. Gelöst wird es durch das Symmetrisierungspostulat, welches alle bisher bekannten Teilchen in zwei Klassen unterteilt: Bosonen und Fermionen. Bosonen weisen einen symmetrischen und Fermionen einen antisymmetrischen physikalischen Zustandsvektor auf. Ein Zustandsvektor wird als symmetrisch bezeichnet, wenn sich unter Austausch zweier Teilchen sein Vorzeichen nicht ändert und als antisymmetrisch, sofern sich das Vorzeichen ändert. Betrachtet man ein System aus N Teilchen, so weisen die symmetrischen/antisymmetrischen Zustandsvektoren stets $N!$ verschiedene Terme auf, die im Fall von Fermionen auch noch mit dem richtigen Vorzeichen versehen werden müssen. Das Rechnen mit derartigen Vektoren wird somit schon für geringe Teilchenzahlen recht aufwendig¹¹. Eine elegantere physikalische Beschreibung eines N -Teilchen Systems ist im Formalismus der zweiten Quantisierung möglich, der hier kurz vorgestellt werden soll. Für diesen benötigt man Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, die auf die physikalischen Zustände wirken und sich für Fermionen und Bosonen unterscheiden. Die folgenden Kapitel basieren auf [87].

¹¹Eine ausführliche Beschreibung der Austauschentartung, des Symmetrisierungspostulates und der resultierenden Konsequenzen ist beispielsweise in [59] Kap. 14 zu finden.

7.5.1. Fermionen

Der fermionische Erzeugungs-Operator¹² a_i^\dagger ist über

$$\begin{aligned} A|i_1, i_2, \dots, i_N\rangle &= a_{i_1}^\dagger a_{i_2}^\dagger \dots a_{i_N}^\dagger |0\rangle \\ A|i_2, i_1, \dots, i_N\rangle &= a_{i_2}^\dagger a_{i_1}^\dagger \dots a_{i_N}^\dagger |0\rangle \end{aligned} \quad (7.96)$$

definiert, wobei A den Antisymmetrisierungs-Operator [59] und $|i_1, i_2, \dots, i_N\rangle$ das Tensorprodukt der Einteilchenzustände $|i\rangle$ bezeichnet. Der Index gibt die Teilchennummer von 1 bis zur Gesamtteilchenzahl N an. Der Ket Vektor $|0\rangle$ steht für das Tensorprodukt der unbesetzten Einteilchenzustände. Der Vektor $A|i_1, i_2, \dots, i_N\rangle$ ist der physikalische Vektor eines fermionischen Vielteilchensystems. Werden zwei Teilchen miteinander vertauscht, z.B. wie in Gl. (7.96) Teilchen Nummer 1 mit Teilchen Nummer 2, so ändert sich laut dem Symmetrisierungspostulat das Vorzeichen des Vektors

$$A|i_1, i_2, \dots, i_N\rangle = -A|i_2, i_1, \dots, i_N\rangle \quad (7.97)$$

Im Formalismus der zweiten Quantisierung soll diese Eigenschaft mit Hilfe von Operatoren repräsentiert werden. Mit Hilfe der Definition (7.96) und Gl. (7.97) folgt:

$$a_{i_1}^\dagger a_{i_2}^\dagger \dots a_{i_N}^\dagger |0\rangle = -a_{i_2}^\dagger a_{i_1}^\dagger \dots a_{i_N}^\dagger |0\rangle \quad (7.98)$$

Da dieser Zusammenhang für beliebige Vektoren gilt, muss

$$a_{i_1}^\dagger a_{i_2}^\dagger + a_{i_2}^\dagger a_{i_1}^\dagger = 0 \quad (7.99)$$

bzw. allgemein

$$[a_i^\dagger, a_j^\dagger]_+ = 0 \quad (7.100)$$

gelten. Hierbei bezeichnet $[A, B]_+ = AB + BA$ den Antikommutator zweier Operatoren. Die Definition (7.100) beinhaltet das Pauli-Prinzip nachdem eine Doppelbesetzung desselben Zustandes nicht möglich ist, da

$$\left(a_1^\dagger\right)^2 = 0 \quad (7.101)$$

gilt.

Der physikalische Zustand eines Vielteilchensystems kann allein über die Besetzungszahlen n der jeweiligen Einteilchenzustände charakterisiert werden. Hierfür muss man eine bestimmte, willkürliche Reihenfolge der Zustände festlegen, die dann beizubehalten ist. Jeder Vielteilchenzustand kann dann eindeutig mit Hilfe des Vakuumzustandes $|0\rangle \equiv |0_1, 0_2, \dots, 0_N\rangle$ definiert werden¹³, in dem alle Zustände unbesetzt sind:

$$|n_1, n_2, \dots\rangle = \left(a_1^\dagger\right)^{n_1} \left(a_2^\dagger\right)^{n_2} \dots |0\rangle \quad (7.102)$$

Für Fermionen kann die Besetzungszahl n_i nur 0 oder 1 sein. Der Operator a_1^\dagger erzeugt somit genau n_1 Teilchen in Zustand Nummer 1, entsprechend a_2^\dagger usw. In Gleichung (7.102) stimmen der *Index und die Position* der Zustände im Gesamtvektor überein.

¹²Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden die Operatoren im Folgenden mit a, a^\dagger statt mit \hat{a}, \hat{a}^\dagger bezeichnet.

¹³Der Index im Ket Vektor zeigt die Nummer des Zustandes entsprechend der gewählten Reihenfolge an.

Die Operatoren sind ebenfalls in aufsteigender Reihenfolge geordnet.

Allgemein kann die Wirkung des Erzeugungsoperators folgendermaßen definiert werden:

$$a_i^\dagger |\dots, n_i, \dots\rangle = (1 - n_i)(-1)^{\sum_{j<i} n_j} |\dots, n_i + 1, \dots\rangle \quad (7.103)$$

Der Faktor $(1 - n_i)$ garantiert, dass kein Zustand doppelt besetzt werden kann, da er gleich Null ist, falls der Zustand i bereits mit $n_i = 1$ Teilchen besetzt ist. Der Phasenfaktor $(-1)^{\sum_{j<i} n_j}$ ergibt das richtige Vorzeichen, je nachdem wie viele paarweise Vertauschungen vorliegen, siehe folgendes Beispiel.

Die Wirkung des Vernichtungsoperators ist über

$$a_i |\dots, n_i, \dots\rangle = n_i (-1)^{\sum_{j<i} n_j} |\dots, n_i - 1, \dots\rangle \quad (7.104)$$

definiert. Da $n_i = 0$ oder 1 ist, wirkt der Operator nur auf bereits besetzte Zustände.

Beispiel:

Das System bestehe aus 5 Zuständen. Zustand 2 und Zustand 4 seien mit jeweils einem Fermion besetzt. Der Zustandsvektor ist somit durch $|\chi\rangle = |0, 1, 0, 1, 0\rangle$ gegeben. Es soll nun ein Teilchen in Zustand 5 erzeugt und eines in Zustand 4 vernichtet werden. Folgendes Schema liefert dieselben Ergebnisse wie Gl. (7.103) und Gl. (7.104).

a_5^\dagger soll auf Zustand 5 wirken:

$$a_5^\dagger |0, 1, 0, 1, 0\rangle \quad (7.105)$$

Dazu muss Zustand 5 durch paarweises Vertauschen an die erste Stelle im Zustandsvektor gerückt werden:

$$a_5^\dagger |0, 0, 1, 0, 1\rangle \quad (7.106)$$

Da Zustand 5 hierbei unbesetzt ist, werden bei diesem Prozess niemals zwei Fermionen miteinander vertauscht.

Die Anwendung von a_5^\dagger liefert:

$$a_5^\dagger |0, 0, 1, 0, 1\rangle = |1, 0, 1, 0, 1\rangle \quad (7.107)$$

Nun muss, durch erneutes paarweises Vertauschen, Zustand 5 wieder an die richtige Position im Zustandsvektor gebracht werden. Dabei werden zweimal jeweils zwei Fermionen miteinander vertauscht. Jede Vertauschung führt zu einem Vorzeichenwechsel. Somit folgt:

$$(-1)(-1)|0, 1, 0, 1, 1\rangle = +|0, 1, 0, 1, 1\rangle \quad (7.108)$$

Demnach gilt

$$a_5^\dagger |0, 1, 0, 1, 0\rangle = +|0, 1, 0, 1, 1\rangle \quad (7.109)$$

Wendet man nun a_4 auf $|0, 1, 0, 1, 1\rangle$ an, erhält man mit dem selben Schema:

$$a_4 |0, 1, 0, 1, 1\rangle = -|0, 1, 0, 0, 1\rangle \quad (7.110)$$

Beim ersten Vertauschungsprozess, welcher Zustand 4 an die erste Stelle im Vektor transportiert, werden einmal zwei Fermionen vertauscht. Der Zustandsvektor ändert sein Vorzeichen. Beim zweiten Vertauschungsprozess ist Zustand 4 bereits unbesetzt. Es werden folglich keine Fermionen miteinander vertauscht und der Zustandsvektor

behält sein negatives Vorzeichen.

Zusammenfassend erhält man:

$$a_4 a_5^\dagger |0, 1, 0, 1, 0\rangle = -|0, 1, 0, 0, 1\rangle \quad (7.111)$$

Wendet man die Operatoren in umgekehrter Reihenfolge an, ergibt sich:

$$a_5^\dagger a_4 |0, 1, 0, 1, 0\rangle = +|0, 1, 0, 0, 1\rangle \quad (7.112)$$

und damit folgt:

$$-a_4 a_5^\dagger = a_5^\dagger a_4 \rightarrow a_4 a_5^\dagger + a_5^\dagger a_4 \equiv [a_4, a_5^\dagger]_+ = 0 \quad (7.113)$$

Das hier verwendete Schema und die damit verknüpften Vorzeichenwechsel des Zustandsvektors sind in Gl. (7.103) bzw. Gl. (7.104) über den Faktor $(-1)^{\sum_{j<i} n_j}$ enthalten. Mit dem hier gezeigten Schema ergibt sich außerdem unmittelbar $[a_i, a_i^\dagger]_+ = 1$.

Aus den Definitionsgleichungen (7.103) und (7.104) können die allgemeinen Antikommutationsregeln für Fermionen abgeleitet werden [87]:

$$[a_i, a_j]_+ = 0, \quad [a_i^\dagger, a_j^\dagger]_+ = 0, \quad [a_i, a_j^\dagger]_+ = \delta_{ij} \quad (7.114)$$

7.5.2. Bosonen

Im Falle von Bosonen findet kein Vorzeichenwechsel beim Vertauschen zweier Teilchen statt, jedoch kann die Besetzungszahl eines bestimmten Einteilchenzustandes die Werte von Null bis zur Gesamtteilchenzahl N annehmen.

Der Erzeugungsoperator ist über

$$a_i^\dagger |\dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i + 1} |\dots, n_i + 1, \dots\rangle \quad (7.115)$$

und der Vernichtungsoperator über

$$a_i |\dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i} |\dots, n_i - 1, \dots\rangle \quad (7.116)$$

definiert. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} a_i a_j |\dots, n_i, \dots, n_j, \dots\rangle &= \sqrt{n_i} \sqrt{n_j} |\dots, n_i - 1, \dots, n_j - 1, \dots\rangle \\ &= a_j a_i |\dots, n_i, \dots, n_j, \dots\rangle \\ \rightarrow (a_i a_j - a_j a_i) |\dots, n_i, \dots, n_j, \dots\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (7.117)$$

und

$$\begin{aligned} a_i^\dagger a_j^\dagger |\dots, n_i, \dots, n_j, \dots\rangle &= \sqrt{n_i + 1} \sqrt{n_j + 1} |\dots, n_i + 1, \dots, n_j + 1, \dots\rangle \\ &= a_j^\dagger a_i^\dagger |\dots, n_i, \dots, n_j, \dots\rangle \\ \rightarrow (a_i^\dagger a_j^\dagger - a_j^\dagger a_i^\dagger) |\dots, n_i, \dots, n_j, \dots\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (7.118)$$

Die Gleichungen (7.117) und (7.118) gelten offensichtlich auch für $i = j$.

Für die Kombination aus Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren gilt:

$$\begin{aligned} a_i a_j^\dagger |\dots, n_i, \dots, n_j, \dots\rangle &= \sqrt{n_i} \sqrt{n_j + 1} |\dots, n_i - 1, \dots, n_j + 1, \dots\rangle \\ &= a_j^\dagger a_i |\dots, n_i, \dots, n_j, \dots\rangle \\ \rightarrow (a_i a_j^\dagger - a_j^\dagger a_i) |\dots, n_i, \dots, n_j, \dots\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (7.119)$$

Für $i = j$ folgt:

$$\begin{aligned} (a_i a_i^\dagger - a_i^\dagger a_i) |\dots, n_i, \dots, n_j, \dots\rangle &= \sqrt{n_i + 1} \sqrt{n_i + 1} - \sqrt{n_i} \sqrt{n_i} |\dots, n_i, \dots, n_j, \dots\rangle \\ &= |\dots, n_i, \dots, n_j, \dots\rangle \end{aligned} \quad (7.120)$$

Somit können zusammenfassend die Vertauschungsrelationen für Bosonen angegeben werden:

$$[a_i, a_j] = 0, \quad [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0, \quad [a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} \quad (7.121)$$

7.5.3. Ein- und Mehrteilchenoperatoren in zweiter Quantisierung

Die Matrixelemente eines Operators T sind in einer beliebigen Basis gegeben durch

$$T_{ij} = \langle i | T | j \rangle \quad (7.122)$$

Multiplikation mit $|i\rangle$ von links, $\langle j|$ von rechts und Summation über alle i, j ergibt:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} |i\rangle T_{ij} \langle j| &= \sum_{i,j} |i\rangle \langle i | T | j \rangle \langle j| = T \\ \rightarrow T &= \sum_{i,j} T_{ij} |i\rangle \langle j| \end{aligned} \quad (7.123)$$

Im Falle von N Teilchen folgt:

$$T = \sum_{i,j} T_{ij} \sum_{\alpha=1}^N |i\rangle_\alpha \langle j|_\alpha \quad (7.124)$$

wobei hierbei angenommen wurde, dass sich der Operator T als Summe von Einteilchenoperatoren schreiben lässt

$$T = T_1 + T_2 + \dots + T_N \equiv \sum_{\alpha} T_{\alpha} \quad (7.125)$$

Der Index α gibt die Teilchennummer an.

Für Einteilchen- und Zweiteilchenoperatoren von Bosonen und Fermionen gilt (ohne Beweis):

$$T = \sum_{i,j} T_{ij} a_i^\dagger a_j \quad (7.126)$$

$$F = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,m} \langle i, j | f^{(2)} | k, m \rangle a_i^\dagger a_j^\dagger a_m a_k \quad (7.127)$$

wobei $f^{(2)}$ eine Zweiteilchenwechselwirkung beschreibt.

Im Spezialfall $T_{ij} = \epsilon_i \delta_{ij}$ folgt:

$$T = \sum_i \epsilon_i a_i^\dagger a_i \quad (7.128)$$

7.5.4. Feldoperatoren

Die Operatoren für das Materiefeld können als Linearkombination der Einteilchen Wellenfunktionen und den Vernichtungs- bzw. Erzeugungsoperatoren dargestellt werden:

$$\Psi(\vec{r}) = \sum_i \varphi_i(\vec{r}) a_i \quad (7.129)$$

$$\Psi^\dagger(\vec{r}) = \sum_i \varphi_i^*(\vec{r}) a_i^\dagger \quad (7.130)$$

Diese Operatoren vernichten bzw. erzeugen ein Energiequant am Ort¹⁴ \vec{r} und erfüllen folgende Vertauschungsrelationen:

$$[\Psi(\vec{r}), \Psi(\vec{r}')]_{\pm} = 0 \quad (7.131)$$

$$[\Psi^\dagger(\vec{r}), \Psi^\dagger(\vec{r}')]_{\pm} = 0 \quad (7.132)$$

$$\begin{aligned} [\Psi(\vec{r}), \Psi^\dagger(\vec{r}')]_{\pm} &= \varphi_i(\vec{r}) \varphi_j^*(\vec{r}') [a_i, a_j^\dagger]_{\pm} \\ &= \varphi_i(\vec{r}) \varphi_j^*(\vec{r}') \delta_{ij} = \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \end{aligned} \quad (7.133)$$

Das positive Vorzeichen gilt für Fermionen (Antikommutator), das negative für Bosonen (Kommutator).

Mit Hilfe von Gleichung (7.126) bzw. (7.127) lassen sich Operatoren durch Materiefeldoperatoren ausdrücken. Wichtige Beispiele sind:

- Kinetische Energie

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} a_i^\dagger T_{ij} a_j &= \sum_{i,j} \int d^3x a_i^\dagger \varphi_i^*(\vec{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right) \varphi_j(\vec{r}) a_j \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \int d^3x \nabla \Psi^\dagger(\vec{r}) \nabla \Psi(\vec{r}) \end{aligned} \quad (7.134)$$

- Einteilchen-Potential

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} a_i^\dagger U_{ij} a_j &= \sum_{i,j} \int d^3x a_i^\dagger \varphi_i^*(\vec{r}) U(\vec{r}) \varphi_j(\vec{r}) a_j \\ &= \int d^3x U(\vec{r}) \Psi^\dagger(\vec{r}) \Psi(\vec{r}) \end{aligned} \quad (7.135)$$

- Zweiteilchen-Wechselwirkung

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,m} \int d^3x \int d^3x' \varphi_i^*(\vec{r}) \varphi_j^*(\vec{r}') V(\vec{r}, \vec{r}') \varphi_k(\vec{r}) \varphi_m(\vec{r}') a_i^\dagger a_j^\dagger a_m a_k \\ = \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3x' \Psi^\dagger(\vec{r}) \Psi^\dagger(\vec{r}') V(\vec{r}, \vec{r}') \Psi(\vec{r}') \Psi(\vec{r}) \end{aligned} \quad (7.136)$$

¹⁴Genauer gesagt im Ortseigenzustand $|\vec{r}\rangle$.

- Hamiltonoperator mit Einteilchen-Potential und Zweiteilchen-Wechselwirkung

$$H = \int d^3x \left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla \Psi^\dagger(\vec{r}) \nabla \Psi(\vec{r}) + U(\vec{r}) \Psi^\dagger(\vec{r}) \Psi(\vec{r}) \right) + \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3x' \Psi^\dagger(\vec{r}) \Psi^\dagger(\vec{r}') V(\vec{r}, \vec{r}') \Psi(\vec{r}') \Psi(\vec{r}) \quad (7.137)$$

- Teilchendichte-Operator

$$n(\vec{r}) = \sum_{i,j} a_i^\dagger a_j \varphi_i^*(\vec{r}) \varphi_j(\vec{r}) = \Psi^\dagger(\vec{r}) \Psi(\vec{r}) \quad (7.138)$$

- Gesamtteilchenzahl-Operator

$$N = \int d^3x n(\vec{r}) = \int d^3x \Psi^\dagger(\vec{r}) \Psi(\vec{r}) \quad (7.139)$$

- Stromdichte-Operator

$$j(\vec{r}) = \frac{\hbar}{2im} \left[\Psi^\dagger(\vec{r}) \nabla \Psi(\vec{r}) - (\nabla \Psi^\dagger(\vec{r})) \Psi(\vec{r}) \right] \quad (7.140)$$

7.5.5. Feldgleichungen

Die Bewegungsgleichungen für die Feldoperatoren werden normalerweise in der Heisenberg-Darstellung angegeben. Diese folgen aus der Heisenberg-Gleichung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = - [H, \Psi(\vec{r}, t)] = -e^{iHt/\hbar} [H, \Psi(\vec{r}, 0)] e^{-iHt/\hbar} \quad (7.141)$$

Mit dem Hamiltonoperator (7.137) erhält man:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) \right) \Psi(\vec{r}, t) + \int d^3x' \left(\Psi^\dagger(\vec{r}', t) V(\vec{r}, \vec{r}') \Psi(\vec{r}', t) \right) \Psi(\vec{r}, t) \quad (7.142)$$

8. Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde das Auftreten einer dynamischen Instabilität eines Bose-Einstein Kondensats aus $^{87}\text{Rubidium}$ in einem Ringresonator untersucht. Ob dieses dynamische, instabile Verhalten während einer fixen Wechselwirkungszeit von Licht und Kondensat in Gang gesetzt werden kann, hängt entscheidend von der Verstimmung des Pumplasers relativ zu einer Resonanzfrequenz des Ringresonators ab. Diese Abhängigkeit von der Verstimmung wurde durch Messungen, welche in der vorliegenden Arbeit beschrieben werden, erstmals systematisch studiert. Es zeigt sich, dass für positive Verstimmungen der Prozess mit relativ geringen Pumpleistungen ausgelöst werden kann. Für betragsmäßig identische, aber negative Verstimmungen, sind jedoch deutlich höhere Pumpleistungen nötig. Dieses asymmetrische Verhalten des Systems, in Bezug auf die Verstimmung, kann sowohl quantenmechanisch, als auch in einem stark vereinfachten klassischen Modell erklärt werden.

Das vollständige quantenmechanische Modell liefert eine gute quantitative Übereinstimmung mit den Messdaten. Durch die Verwendung verschiedener Näherungen konnte zudem ein analytisch lösbares 3-Moden-Modell entwickelt werden, das tiefere Einblicke in die physikalischen Vorgänge liefert und unter anderem die Existenz von sogenannten „exzeptionellen Punkten“ voraussagt. Diese sind typisch für Systeme, die durch nicht hermitesche Hamiltonoperatoren beschrieben werden, siehe Kapitel 6.3.

Um ein qualitatives Verständnis der Vorgänge zu entwickeln, kann zusätzlich auf ein mikroskopisches, rein klassisches Modell zurückgegriffen werden. Bereits mit drei Atomen, die sich im Lichtfeld des Ringresonators befinden, kann der asymmetrische Verlauf der Messdaten erklärt werden. Außerdem liefert das Modell eine anschauliche Erklärung, wie es zu einer teilweisen Anordnung der Atome in einem eindimensionalen optischen Gitter kommen kann, auch ohne dissipative Effekte, siehe Kapitel 6.6. Die erhaltenen Daten und die neu entwickelten Modelle komplettieren die vorangegangenen Untersuchungen zum kollektiven atomaren Rückstoßlaser.

Zur Vorbereitung zukünftiger Messungen wurde das bestehende Lasersystem grundlegend überarbeitet und der Ringresonator ausgetauscht. Die Feldzerfallsrate des neuen Ringresonators ist kleiner als die Rückstoßfrequenz von $^{87}\text{Rubidium}$. Mit diesem neuen Aufbau sollte es möglich sein Effekte, wie Subradianz [44] und das Auftreten von exzeptionellen Punkten, nachzuweisen. Zudem eröffnet sich die Möglichkeit, Mehrniveausysteme mit variabler Niveaunzahl und längeren Kohärenzzeiten zu untersuchen.

Literaturverzeichnis

- [1] Max Planck. Über irreversible Strahlungsvorgänge. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.*, pages 440–480, 1899.
- [2] Theodore Maiman. Stimulated optical radiation in ruby. *Nature* 187, No. 4736, 1960.
- [3] Serge Haroche. Nobel Lecture: Controlling photons in a box and exploring the quantum to classical boundary. *Rev. Mod. Phys.*, 85:1083–1102, Jul 2013.
- [4] J. M. Raimond, M. Brune, and S. Haroche. Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity. *Rev. Mod. Phys.*, 73:565–582, Aug 2001.
- [5] B. B. Blinov, D. L. Moehring, L.-M. Duan, and C. Monroe. Observation of entanglement between a single trapped atom and a single photon. *nature*, 428:153–157, 2004.
- [6] Hans Keßler Andreas Hemmerich Matthias Wolke, Julian Klinger. Cavity Cooling Below the Recoil Limit. 2012.
- [7] J. I. Cirac, M. Lewenstein, and P. Zoller. Laser cooling a trapped atom in a cavity: Bad-cavity limit. *Phys. Rev. A*, 51:1650–1655, Feb 1995.
- [8] Peter Horak, Gerald Hechenblaikner, Klaus M. Gheri, Herwig Stecher, and Helmut Ritsch. Cavity-induced atom cooling in the strong coupling regime. *Phys. Rev. Lett.*, 79:4974–4977, Dec 1997.
- [9] Vladan Vuletić and Steven Chu. Laser Cooling of Atoms, Ions, or Molecules by Coherent Scattering. *Phys. Rev. Lett.*, 84:3787–3790, Apr 2000.
- [10] M. Brune, P. Nussenzveig, F. Schmidt-Kaler, F. Bernardot, A. Maali, J. M. Raimond, and S. Haroche. From Lamb shift to light shifts: Vacuum and sub-photon cavity fields measured by atomic phase sensitive detection. *Phys. Rev. Lett.*, 72:3339–3342, May 1994.
- [11] Moonjoo Lee, Junki Kim, Wontaek Seo, Hyun-Gue Hong, Younghoon Song, Ramachandra R. Dasari, and Kyungwon An. Three-dimensional imaging of cavity vacuum with single atoms localized by a nanohole array. *nature communications*, 2014.
- [12] William D. Phillips. Nobel Lecture: Laser cooling and trapping of neutral atoms. *Rev. Mod. Phys.*, 70:721–741, Jul 1998.
- [13] C. G. Townsend, N. H. Edwards, C. J. Cooper, K. P. Zetie, C. J. Foot, A. M. Steane, P. Szriftgiser, H. Perrin, and J. Dalibard. Phase-space density in the magneto-optical trap. *Phys. Rev. A*, 52:1423–1440, Aug 1995.

- [14] Albert Einstein. Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. *Handschriftliches Manuskript*, 1924.
- [15] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle. Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 75:3969–3973, Nov 1995.
- [16] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell. Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor. *Science*, 269:198–201, July 1995.
- [17] Franco Dalfovo, Stefano Giorgini, Lev P. Pitaevskii, and Sandro Stringari. Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases. *Rev. Mod. Phys.*, 71:463–512, Apr 1999.
- [18] M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. M. Kurn, D. S. Durfee, C. G. Townsend, and W. Ketterle. Collective Excitations of a Bose-Einstein Condensate in a Magnetic Trap. *Phys. Rev. Lett.*, 77:988–991, Aug 1996.
- [19] Wolfgang Ketterle and Hans-Joachim Miesner. Coherence properties of Bose-Einstein condensates and atom lasers. *Phys. Rev. A*, 56:3291–3293, Oct 1997.
- [20] M. R. Andrews, C. G. Townsend, H.-J. Miesner, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle. Observation of Interference Between Two Bose Condensates. *Science*, 275:637, Jan 1997.
- [21] M.-O. Mewes, M. R. Andrews, D. M. Kurn, D. S. Durfee, C. G. Townsend, and W. Ketterle. Output Coupler for Bose-Einstein Condensed Atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 78:582–585, Jan 1997.
- [22] Markus Greiner, Olaf Mandel, Tilman Esslinger, Theodor W. Hänsch, and Immanuel Bloch. Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms. *Nature*, 415:39–44, Jan 2002.
- [23] Ferdinand Brennecke Kristian Baumann, Christine Guerlin and Tilman Esslinger. Dicke quantum phase transition with a superfluid gas in an optical cavity. *nature* 464, 1301-1306, 2010.
- [24] J. Klinder, H. Keßler, M. Wolke, L. Mathey, and A. Hemmerich. Dynamical phase transition in the open Dicke model. *Proc Natl Acad Sci U S A*, 2015.
- [25] R. H. Dicke. Coherence in Spontaneous Radiation Processes. *Phys. Rev.*, 93:99–110, Jan 1954.
- [26] Klaus Hepp and Elliott H. Lieb. On the superradiant phase transition for molecules in a quantized radiation field: the dicke maser model. *Annals of Physics*, 76(2):360 – 404, 1973.
- [27] Y. K. Wang and F. T. Hioe. Phase Transition in the Dicke Model of Superradiance. *Phys. Rev. A*, 7:831–836, Mar 1973.
- [28] R. Bonifacio and L. De Salvo. Collective atomic recoil laser (CARL) optical gain without inversion by collective atomic recoil and self-bunching of two-level atoms. *Nucl. Instrum. Methods Phys.*, A 341:360, 1994.

-
- [29] R. Bonifacio and L. De Salvo. Analytical Theory of the Collective Atomic Recoil Laser in the FEL Limit. *Appl. Phys. B*, 60, 1995.
- [30] John M. J. Madey. Stimulated Emission of Bremsstrahlung in a Periodic Magnetic Field. *Journal of Applied Physics*, 42(5), 1971.
- [31] Dietmar Kruse, Dissertation (Universität Tübingen): Selbstorganisation und Laseremission in kalten atomaren Ensembles. 2005.
- [32] D. Kruse, C. von Cube, C. Zimmermann, and Ph. W. Courteille. Observation of Lasing Mediated by Collective Atomic Recoil. *Phys. Rev. Lett.*, 91:183601, Oct 2003.
- [33] C. von Cube, S. Slama, D. Kruse, C. Zimmermann, Ph. W. Courteille, G. R. M. Robb, N. Piovella, Bonifacio, and R. Self-Synchronization and Dissipation-Induced Threshold in Collective Atomic Recoil Lasing. *Phys. Rev. Lett.*, 93:083601, Aug 2004.
- [34] Yoshiki Kuramoto. Cooperative Dynamics of Oscillator Community. 1984.
- [35] S Strogatz. From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. 2000.
- [36] Juan A. Acebrón, L. L. Bonilla, Conrad J. Pérez Vicente, Félix Ritort, and Renato Spigler. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. *Rev. Mod. Phys.*, 77:137–185, Apr 2005.
- [37] Sebastian Slama, Dissertation (Universität Tübingen): Ultrakalte Atome in einem optischen Ringresonator: vom kollektiven atomaren Rückstoss-Laser zu superradianter Rayleigh-Streuung. 2007.
- [38] S. Slama, S. Bux, G. Krenz, C. Zimmermann, and Ph. W. Courteille. Superradiant Rayleigh Scattering and Collective Atomic Recoil Lasing in a Ring Cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 98:053603, Feb 2007.
- [39] Sebastian Slama, Gordon Krenz, Simone Bux, Claus Zimmermann, and Philippe W. Courteille. Cavity-enhanced superradiant Rayleigh scattering with ultracold and Bose-Einstein condensed atoms. *Phys. Rev. A*, 75:063620, Jun 2007.
- [40] S. Inouye, A.P. Chikkatur, D.M. Stamper-Kurn, J. Stenger, D.E. Pritchard, and W. Ketterle. Superradiant Rayleigh scattering from a Bose-Einstein condensate. *Science*, 285:571–574, 1999.
- [41] D. Schmidt, H. Tomczyk, S. Slama, and C. Zimmermann. Dynamical Instability of a Bose-Einstein Condensate in an Optical Ring Resonator. *Phys. Rev. Lett.*, 112:115302, Mar 2014.
- [42] Hannah Tomczyk, Dissertation (Universität Tübingen): Schwellverhalten des kollektiven atomaren Rückstoß-Lasers an der Grenze zum entarteten Regime. 2015.

- [43] H. Tomczyk, D. Schmidt, C. Georges, S. Slama, and C. Zimmermann. Stability diagram of the collective atomic recoil laser with thermal atoms. *Phys. Rev. A*, 91:063837, Jun 2015.
- [44] M. M. Cola, D. Bigerni, and N. Piovella. Recoil-induced subradiance in an ultracold atomic gas. *Phys. Rev. A*, 79:053622, May 2009.
- [45] W. H. Wing. Natl. Bur. Stand. (U.S.) Spec. Publ. 653, 74 (1983).
- [46] C. V. Sukumar and D. M. Brink. Spin-flip transitions in a magnetic trap. *Phys. Rev. A*, 56:2451–2454, Sep 1997.
- [47] Gordon Krenz, Dissertation (Universität Tübingen): Unterdrückung von Spiegelrückstreuung in einem optischen High-Q-Resonator durch ultrakalte Atome. 2009.
- [48] Haruka Tanji-Suzuki, Ian D. Leroux, Monika H. Schleier-Smith, Marko Cetina, Andrew T. Grier, Jonathan Simon, and Vladan Vuletic. Interaction between Atomic Ensembles and Optical Resonators: Classical Description. *arXiv:1104.3594v2*, page 29, Nov 2011.
- [49] L. Ricci, M. Weidemüller, T. Esslinger, A. Hemmerich, C. Zimmermann, V. Vuletic, W. König, and T.W. Hänsch. A compact grating-stabilized diode laser system for atomic physics. *Optics Communications*, 117, 1995.
- [50] Sebastian Günther, Dissertation (Universität Tübingen): Wechselwirkungen kalter Li-Rb-Gase im entarteten Regime. 2006.
- [51] Eric D. Black. An Introduction to Pound-Drever-Hall laser frequency stabilization. *LIGO-P990042- A- D 04/04/00*, 2002.
- [52] Harold J. Metcalf and Peter van der Straten. Laser Cooling and Trapping. *Springer Science & Business Media*, 1999.
- [53] Andreas Günther, Dissertation (Universität Tübingen): Materiewellenoptik mit Bose-Einstein-Kondensaten auf Mikrochips. 2006.
- [54] C. Zimmermann. Skript: Laserphysik. 2015.
- [55] Dirk Sodtke, Diplomarbeit (Universität Tübingen): Reduktion der Linienbreite von optischen Resonatoren. 2012.
- [56] Wolfgang Christoph Georges, Diplomarbeit (Universität Tübingen): Aufbau und Stabilisierung eines Hoch Finesse Resonators mit sehr schmaler Linienbreite. 2015.
- [57] G. Krenz, S. Bux, S. Slama, C. Zimmermann, and P.W. Courteille. Controlling mode locking in optical ring cavities. *Applied Physics B*, 87(4):643–647, 2007.
- [58] Christian Silber, Dissertation (Universität Tübingen): Sympathetisches Kühlen von $^6\text{Lithium}$ mit $^{87}\text{Rubidium}$. 2006.
- [59] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Franck Laloe. Quantenmechanik, Band 2. 2008.

-
- [60] Claus Zimmermann. Skript zur Vorlesung Experimentalphysik 6: Atome, Moleküle und Licht. pages 167–174, 2014.
- [61] Rudolf Grimm, Matthias Weidemüller, and Yurii B. Ovchinnikov. Optical Dipole Traps for neutral Atoms. *arXiv:physics/9902072*.
- [62] Thomas R. Gentile, Barbara J. Hughey, Daniel Kleppner, and Theodore W. Ducas. Experimental study of one- and two-photon Rabi oscillations. *Phys. Rev. A*, 40:5103–5115, Nov 1989.
- [63] R. Bachelard, H. Bender, Ph. W. Courteille, N. Piovella, C. Stehle, C. Zimmermann, and S. Slama. Role of Mie scattering in the seeding of matter-wave superradiance. *Phys. Rev. A*, 86:043605, Oct 2012.
- [64] Proceedings of the American Physical Society; Minutes of the meeting of the New York State section at Hamilton, New York, APRIL 13, 1946. pages 681, B10.
- [65] Christoph von Cube, Dissertation (Universität Tübingen): Untersuchungen zum kollektiven atomaren Rückstoß-Laser. 2006.
- [66] S. Bux, H. Tomczyk, D. Schmidt, Ph. W. Courteille, N. Piovella, and C. Zimmermann. Control of matter-wave superradiance with a high-finesse ring cavity. *Phys. Rev. A*, 87:023607, Feb 2013.
- [67] D. Meschede. Optics, Light and Lasers. *Wiley-VCH*, 2004.
- [68] M. G. Moore, O. Zobay, and P. Meystre. Quantum optics of a Bose-Einstein condensate coupled to a quantized light field. *Phys. Rev. A*, 60:1491–1506, Aug 1999.
- [69] Daniel Adam Steck, Rubidium 87 D Line Data, <http://steck.us/alkalidata>.
- [70] S. Bux, G. Krenz, S. Slama, C. Zimmermann, and Ph.W. Courteille. Ultra-cold atoms in an optical cavity: two-mode laser locking to the cavity avoiding radiation pressure. *Applied Physics B*, 89(2-3):181–186, 2007.
- [71] Sang-Bum Lee, Juhee Yang, Songky Moon, Soo-Young Lee, Jeong-Bo Shim, Sang Wook Kim, Jai-Hyung Lee, and Kyungwon An. Observation of an Exceptional Point in a Chaotic Optical Microcavity. *Phys. Rev. Lett.*, 103:134101, Sep 2009.
- [72] Jonas Brinker, Jacob Fuchs, Jörg Main, Günter Wunner, and Holger Cartarius. Verification of exceptional points in the collapse dynamics of Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A*, 91:013609, Jan 2015.
- [73] B. Dietz, T. Friedrich, J. Metz, M. Miski-Oglu, A. Richter, F. Schäfer, and C. A. Stafford. Rabi oscillations at exceptional points in microwave billiards. *Phys. Rev. E*, 75:027201, Feb 2007.
- [74] C. Dembowski, H.-D. Gräf, H. L. Harney, A. Heine, W. D. Heiss, H. Rehfeld, and A. Richter. Experimental Observation of the Topological Structure of Exceptional Points. *Phys. Rev. Lett.*, 86:787–790, Jan 2001.

- [75] W. D. Heiss. The physics of exceptional points. *arXiv:1210.7536v1*, Oct 2012.
- [76] W. D. Heiss. Exceptional Points of a Hamiltonian and Phase Transitions in Finite Systems. *Atomic Nuclei*, 1988.
- [77] W. D. Heiss. Repulsion of resonance states and exceptional points. *Phys. Rev. E*, 61:929–932, Jan 2000.
- [78] Soo-Young Lee, Jung-Wan Ryu, Jeong-Bo Shim, Sang-Bum Lee, Sang Wook Kim, and Kyungwon An. Divergent Petermann factor of interacting resonances in a stadium-shaped microcavity. *Phys. Rev. A*, 78:015805, Jul 2008.
- [79] Holger Cartarius, Jörg Main, and Günter Wunner. Exceptional points in atomic spectra. *Phys. Rev. Lett.*, 99:173003, Oct 2007.
- [80] Carl M. Bender and Stefan Boettcher. Real Spectra in Non-Hermitian Hamiltonians Having PT Symmetry. *Phys. Rev. Lett.*, 80:5243–5246, Jun 1998.
- [81] J. Okołowicz and M. Płoszajczak. Exceptional points in the scattering continuum. *Phys. Rev. C*, 80:034619, Sep 2009.
- [82] C. Dembowski, B. Dietz, H.-D. Gräf, H. L. Harney, A. Heine, W. D. Heiss, and A. Richter. Encircling an exceptional point. *Phys. Rev. E*, 69:056216, May 2004.
- [83] Wolfgang P. Schleich. Quantum Optics in Phase Space. page 278, 2000.
- [84] Mark Beck. Quantum Mechanics, Theory and Experiment. page 391, 2012.
- [85] Christopher C. Gerry and Peter L. Knight. Introductory Quantum Optics. page 12, 2006.
- [86] Maciej Lewenstein, Anna Sanpera, and Matthias Pospiech. Skript: Quantum Optics an Introduction (short version). page 14, 2006.
- [87] Franz Schwabl. Quantenmechanik für Fortgeschrittene (QM II). 2008.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die zur Entstehung dieser Arbeit beigetragen haben und für die schöne Zeit, die ich in der Arbeitsgruppe Zimmermann verbringen durfte.

Insbesondere danke ich Claus Zimmermann für die großartige Unterstützung und Betreuung, die vielen interessanten Diskussionen (auch nicht physikalischer Natur) und dafür dass er mir die Teilnahme an der aktiven Forschung ermöglicht hat.

Meiner Vorgängerin Simone Bux und meiner Laborkollegin Hannah Tomczyk, unserem Nachfolger Simon Schuster und den Diplomanden Dirk Sodtke und Christoph Georges, danke ich für die tolle Zusammenarbeit.

Dem gesamten fünften Stock danke ich für die großartige Atmosphäre, die Vier-Uhr-Pausen und die allgegenwärtige Hilfsbereitschaft.

Den Mitarbeitern der Elektronikwerkstatt, der Sekretariate, der Feinmechanikwerkstatt, der Beschaffungsabteilung und der Glasbläserei gilt ebenfalls mein großer Dank.

Nicht zu vergessen sind die unzähligen Persönlichkeiten, die mir in diesen vier Jahren auf Konferenzen begegnet sind und mir mit anregenden Diskussionen weitergeholfen haben und jene, die diese Konferenzen organisiert haben.

Zusammenfassend:

Vielen Dank für Alles!

Ich bin mir sicher, ich werde die Zeit, die ich als Mitarbeiter an der Universität Tübingen verbracht habe, noch häufig vermissen.