Das κ-Box-Produkt

Dissertation
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard Karls Universität Tübingen
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

vorgelegt von
Stefan Elser
aus Tettnang

Tübingen
2011

Tag der mündlichen Qualifikation:	20.05.2011
Dekan:	Prof. Dr. Wolfgang Rosenstiel
1. Berichterstatter:	Prof. Dr. Ulrich Felgner
2. Berichterstatter:	Prof. Dr. Frank Loose

Danksagung

An erster Stelle gebührt mein besonderer Dank Herrn Prof. Dr. Ulrich Felgner für seine Unterstützung. Nur durch seine intensive Betreuung war es mir möglich, mein Promotionsvorhaben so schnell zu realisieren.
Ich danke Herrn Prof. Dr. Frank Loose dafür, dass er mich als Abiturient davon überzeugte, Mathematik zu studieren, indem er sagte: "Einmal im Leben muss man sich verlieben, und das ist die Mathematik."
Meiner Familie danke ich für ihre nicht nur finanzielle Unterstützung und meiner Freundin dafür, dass sie meine Stimmung immer ausgehalten hat. Oder meistens zumindest.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

In der Infinitären Kombinatorik, ein Zweig der modernen Mengenlehre, bedient man sich gerne topologischer Begriffe, um einerseits Ergebnisse zu verdeutlichen und um andererseits den sehr abstrakten kombinatorischen Begriffen eine gewisse Anschaulichkeit zu geben. Das κ-Box-Produkt ist dabei von besonderer Bedeutung, denn mit ihm können auch abstrakte Mengen, wie zum Beispiel Familien von κ-großer Oszillation (siehe [CoNe]), illustriert werden.

H. Tietze führte 1923 in [Ti] die heute als *Box-Topologie* bekannte Topologie für das kartesische Produkt unendlich vieler Räume ein; es entspricht nach unserer Notaion (siehe Definition 2.3.1, S. 11) dem μ^+-Box-Produkt über μ viele Räume (siehe auch J. L. Kelley [Ke] und N. Bourbaki [Bou]).
Da sich aber Eigenschaften der Grundräume, wie zum Beispiel die Kompaktheit, so nicht auf das kartesische Produkt vererben (siehe Bsp. 5.2.3), wurde diese Produkt-Topologie schnell vernachlässigt und das von A. Tychonow 1930 in [Ty] definierte und nach ihm benannte *Tychonow-Produkt* ($\aleph_0$-Box-Produkt) bevorzugt, welches sogar die Dichtigkeit erhält. Erst später erkannte man die Vorteile des viel feineren Box-Produkts durch Arbeiten wie [Ru], in der M. E. Rudin 1971 mit Hilfe der Box-Topologie die Existenz eines normalen Hausdorff Raumes, dessen kartesisches Produkt mit dem abgeschlossenen Einheitsintervall nicht normal ist, bewies. Die Existenz eines solchen sogenannten *Dowker-Raumes* (siehe [Do] und [Bor]) war lange ungeklärt.

Ziel dieser Doktorarbeit ist es, bekannte und oft verwendete Eigenschaften des Tychonow-Produkts in analoger Form für das κ-Box-Produkt zu beweisen, was bisher noch nicht geschehen ist, und die Verbindung zwischen der Infinitären Kombinatorik und der Topologie zu vertiefen.

Nachdem wir im nächsten Kapitels die benötigten Grundlagen der Mengenlehre und Topologie kurz wiederholen, werden wir die Dichtigkeit (siehe Abschnitt 3.1) auf dem

κ-Box-Produkts abschätzen indem, wir den berühmten Satz von Hewitt-Marczewski-Pondiczery verallgemeinern. Damit können wir die Homöomorphie zwischen auf den ersten Blick ähnlich erscheinenden Räumen widerlegen (siehe Abschnitt 3.2) und die Existenz von generalisiert unabhängigen Mengen (siehe Abschnitt 3.3) folgern, deren Existenz bisher noch nicht gesichert war (siehe [Hu]).

J. G. Ceder und T. Pearson konnten in [CePe] beweisen, dass sich die maximale Auflösbarkeit der einzelnen Grundräume auf das Tychonov-Produkt vererbt. Wir werden das gleiche auch für das κ-Box-Produkt in Abschnitt 4.1 beweisen können. Wir werden auf weitere Typen von Auflösbarkeit eingehen und untersuchen, ob diese sich überhaupt unterscheiden können (siehe Abschnitt 4.2).

In Abschnitt 5.1 werden wir die Zellularität des κ-Box-Produkts untersuchen und diese analog zu D. Kurepas Ergebnissen über die Zellularität des Tychonoff-Produkts in [Ku] abschätzen können. Obwohl, wie bereits erwähnt, das κ-Box-Produkt die Kompaktheit nicht erhält, werden wir in Abschnitt 5.2 beweisen, dass sich die κ-Kompaktheit für extrem große Kardinalzahlen auf das κ-Box-Produkt vererbt. Es gibt also auch hier ein Analogon für die Vererbung der Kompaktheit auf das Tychonow-Produkt.

2 Grundlagen

In der gesamten Arbeit werden wir das Axiomensystem von Zermelo-Skolem-Fraenkel mit dem Auswahlaxiom ($ZSF+AC$) verwenden. An manchen Stellen werden wir zusätzlich noch das Axiom der Injektiven Potenz IP, die Generalisierte Continuums-Hypothese GCH und das Axiom der Konstruierbarkeit des Universums $V = L$ benötigen:

IP: Für je zwei Kardinalzahlen κ, λ mit $2^\kappa = 2^\lambda$ gilt $\kappa = \lambda$.

Für GCH verwenden wir die Bezeichnungsweise der Aleph-Hypothese:

GCH: Für jede Kardinalzahl κ gilt: $\kappa^+ = 2^\kappa$ ($\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$).

Dabei ist GCH stärker als IP, denn aus $\kappa^+ = 2^\kappa = 2^\lambda = \lambda^+$ folgt unter Verwendung von GCH sofort $\kappa = \lambda$.

V=L: Das Universum V ist der Klasse der konstruierbaren Menge L gleich.

$V = L$ ist wesentlich stärker als GCH.

Falls wir außer $ZSF + AC$ noch IP, GCH oder $V = L$ in einem Beweis voraussetzen, wird darauf hingewiesen.

Für ein Axiomensystem A soll $Con(A)$ die Konsistenz (oder Widerspruchsfreiheit) des Axiomensystems A ausdrücken.

Für eine Menge M werden wir in der gesamten Arbeit mit dem Symbol $|M|$ die *Kardinalität von M* bezeichnen. In der Literatur wird hierfür auch oft $Kard(M)$ verwendet.

2.1 Aus der Mengenlehre

In der gesamten Arbeit werden wir Ordinal- und Kardinalzahlen so verwenden, wie sie in [Fe1] und [Je] eingeführt werden.

Definition 2.1.1 Wir gehen davon aus, dass die Begriffe der Ordinal- und Kardinalzahlen bekannt sind und wiederholen kurz:

1. Wir bezeichnen mit Ω die *Klasse aller Ordinalzahlen* und mit $\mathbb{K}$ die *Klasse aller Kardinalzahlen*.

2. Für eine Ordinalzahl α ist $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ der *Nachfolger von* α.
   Gibt es für eine Ordinalzahl $\alpha \neq 0$ keine Ordinalzahl β mit $\alpha = \beta + 1$, nennen wir α eine *Limeszahl*.

3. Für eine Kardinalzahl κ bezeichnen wir mit κ^+ die kleinste Kardinalzahl, die größer als κ ist. κ^+ ist der *Nachfolger von* κ.
   Analog zu den Ordinalzahlen nennen wir κ eine Limeskardinalzahl, falls es keine Kardinalzahl λ mit $\kappa = \lambda^+$ gibt.

Bemerkung 2.1.2 *Es gibt eine surjektive Funktion* $\aleph : \Omega \to \mathbb{K}$*. Für jede Kardinalzahl* κ *können wir also eine Ordinalzahl* α *wählen mit* $\aleph(\alpha) = \kappa$*.*
Zur Vereinfachung der Notation schreiben wir $\aleph_\alpha$ *statt* $\aleph(\alpha)$*.*
Für den Nachfolger κ^+ *von* $\kappa = \aleph_\alpha$ *gilt* $\kappa^+ = \aleph_{\alpha+1}$*.*

Definition 2.1.3 Um auf die Eigenschaften der Kardinalzahlen eingehen zu können, verwenden wir folgende Bezeichungen:

1. (F. Hausdorff, 1914)
   Eine Relation $\leq$ auf einer Menge M nennen wir eine partielle Ordnung, falls sie transitiv, reflexiv und anti-symmetrisch (d.h. $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$) ist.

2. (F. Hausdorff und G. Hessenberg, 1906)
   Sei $\langle M, \leq \rangle$ eine partiell-geordnete Menge.
   Eine Teilmenge $N \subseteq M$ liegt *konfinal* in M, falls gilt:

$$\forall m \in M \exists n \in N : m \leq n.$$

3. (A. Tarski, 1925)
   Die *Konfinalität* einer Ordinalzahl $\alpha \neq 0$ ist die kleinste Ordinalzahl $\beta \neq 0$, die in α *konfinal einbettbar* ist.
   Wir bezeichnen die Konfinalität von α mit $cf(\alpha)$.

4. (F. Hausdorff, 1909)
   Eine Kardinalzahl κ mit $cf(\kappa) = \kappa$ nennen wir eine *reguläre* Kardinalzahl. Eine Kardinalzahl, die nicht regulär ist, wird *singulär* genannt.

Bemerkung 2.1.4 *Wir erinnern an folgende Eigenschaften der Konfinalität:*

1. $\forall \alpha \in \Omega : cf(\alpha) \in \mathbb{K}$.

2. $\forall \alpha \in \Omega : cf(cf(\alpha)) = cf(\alpha)$.

3. *(F. Hausdorff, 1914)*
   $\forall \alpha \in \Omega : cf(\aleph_{\alpha+1}) = \aleph_{\alpha+1}$.

Wir erinnern uns an die Gesetze der Addition und Multiplikation zweier Kardinalzahlen:

Satz 2.1.5 *(G. Hessenberg, 1906)*
Seien $\kappa, \mu \in \mathbb{K}$. Ist κ oder μ eine unendliche Kardinalzahl, dann gilt:

$$\kappa + \mu = \kappa \cdot \mu = \kappa \cup \mu = max\left\{\kappa, \mu\right\}.$$

In den folgenden Kapiteln werden wir versuchen, die Werte verschiedener Kardinalitätsfunktionen anhand der Werte auf den Grundräumen auch auf den Produkten so stark wie möglich zu beschränken. Folgende Konstruktionen werden wir dazu benötigen:

Definition 2.1.6 Für zwei Kardinalzahlen μ und κ sei

$$\mu^{<\kappa} := \bigcup \left\{\mu^{\lambda}; \lambda < \kappa \ \& \ \lambda \in \mathbb{K}\right\}.$$

Wir nennen $\mu^{<\kappa}$ die *schwache κ-Potenz von μ.*

Definition 2.1.7 Für eine Kardinalzahl μ definieren wir

$$log(\mu) = \bigcap \left\{\lambda \in \mathbb{K}; 2^{\lambda} \geq \mu\right\}$$

und nennen $log(\mu)$ den *Logarithmus von μ.*

Bemerkung 2.1.8 *Einige Eigenschaften des Logarithmus:*

1. *Es gilt* $log(\aleph_0) = \aleph_0$ *und* $log(\aleph_1) = \aleph_0$.
2. *Für alle Kardinalzahlen gilt* $log(2^\mu) \leq \mu$. *In* $ZSF + IP$ *gilt sogar die Gleichheit.*
3. *In* $ZSF + IP$: *Für eine Limeszahl* μ *mit* $2^{<\mu} = \mu$ *gilt* $log(\mu) = \mu$.
4. *In* $ZSF + GCH$: *Für jede Limeszahl* μ *gilt* $log(\mu) = \mu$.
5. *In* $ZSF + GCH$: *Für jede unendliche Kardinalzahl* μ *gilt* $log(\mu^+) = \mu$.

Beweis.

1. Da 2^m endlich für jede natürliche Zahl und $2^{\aleph_0} \geq \aleph_1 > \aleph_0$ ist, muss $log(\aleph_0) = \aleph_0$ und $log(\aleph_1) = \aleph_0$ gelten.
2. Mit IP ist die Darstellung von 2^μ eindeutig, also gilt $log(2^\mu) = \mu$.
3. Angenommen, es gibt ein $\nu = log(\mu) < \mu$.
   Da μ eine Limeszahl ist, ist auch $\nu^+ < \mu$.
   $\Rightarrow 2^\nu \geq \mu = 2^{<\mu} \geq 2^{\nu^+}$
   $\Rightarrow 2^\nu = 2^{\nu^+}$
   Mit IP muss also $\nu = \nu^+$ gelten, ein Widerspruch.
4. Für jede Limeszahl μ gilt in $ZSF + GCH$:
   $2^{<\mu} = \bigcup\{2^\nu; \nu < \mu\} = \bigcup\{\nu^+; \nu < \mu\} = \mu$
   Da GCH stärker als IP ist, gilt also auch hier wie oben $log(\mu) = \mu$.
5. Ist klar, denn in $ZSF + GCH$ gilt $2^\mu = \mu^+$.

□

Da wir in dieser Arbeit vor allem mit dem Abschätzen der Potenzen zweier Kardinalzahlen arbeiten werden, betrachten wir nochmals die beiden Hauptsätze der Kardinalzahl-Arithmetik:

Satz 2.1.9 *(F. Hausdorff und A. Tarski, 1925)*
Für alle $\alpha, \beta \in \Omega$ *gilt:*

1. *Falls* $\aleph_\alpha \leq \aleph_\beta$ *gilt, so ist* ${\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$.

2. *Falls* $cf(\aleph_\alpha) \leq \aleph_\beta \leq \aleph_\alpha$ *gilt, ist* $\aleph_\alpha < {\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta} \leq 2^{\aleph_\alpha}$.

3. *Falls* $\aleph_\beta < cf(\aleph_\alpha) \leq \aleph_\alpha$ *gilt und*
   a) *es ein* $\gamma \in \Omega$ *gibt mit* $\alpha = \gamma + 1$, *dann ist* $\aleph_\gamma < {\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta} \leq 2^{\aleph_\gamma}$.
   b) α *eine Limeszahl ist, dann ist* $\aleph_\alpha \leq {\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta} \leq 2^{<\aleph_\alpha}$.

Diese Abschätzungen alleine werden uns zum Teil nicht ausreichen. Wir benötigen auch die stärkeren Ergebnisse im Axiomen-System $ZSF + AC + GCH$:

Satz 2.1.10 *(F. Hausdorff und A. Tarski, 1925)*
In $ZSF + AC + GCH$ *gilt für alle* $\alpha, \beta \in \Omega$:

1. *Falls* $\aleph_\alpha \leq \aleph_\beta$ *gilt, so ist* ${\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1}$.

2. *Falls* $cf(\aleph_\alpha) \leq \aleph_\beta \leq \aleph_\alpha$ *gilt, ist* ${\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+1}$.

3. *Falls* $\aleph_\beta < cf(\aleph_\alpha) \leq \aleph_\alpha$ *gilt, dann ist* ${\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha$.

Um besser mit verschiedenen Teilmengen umgehen zu können, benötigen wir folgende Definition:

Definition 2.1.11 Sei κ eine Kardinalzahl und M eine Menge. Wir definieren:

1. $P_\kappa(M) := \{N \subseteq M; |N| = \kappa\}$

2. $P_{<\kappa}(M) := \{N \subseteq M; |N| < \kappa\}$

3. $P_{\leq\kappa}(M) := \{N \subseteq M; |N| \leq \kappa\}$

Bemerkung 2.1.12 *Wir erkennen sofort, dass gilt:*

$$|P_{\leq\kappa}(M)| = |P_\kappa(M)| = |M|^\kappa \text{ und } |P_{<\kappa}(M)| = |M|^{<\kappa}.$$

Definition 2.1.13 (H. Cartan, 1937)
Für eine nicht leere Menge M nennen wir eine Familie $\mathfrak{F}$ von Teilmengen aus M einen *Filter auf* M, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $\emptyset \notin \mathfrak{F}$ *und* $M \in \mathfrak{F}$

2. $\forall A, B \in \mathfrak{F} : A \cap B \in \mathfrak{F}$

3. $\forall A \in \mathfrak{F} \forall B \in P(M) : A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathfrak{F}$

Definition 2.1.14 Sei $\mathfrak{F}$ ein Filter auf einer nichtleeren Menge M.

1. Für eine Kardinalzahl κ nennen wir $\mathfrak{F}$ einen *κ-vollständigen Filter*, falls gilt:

$$\forall \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F} : 1 \leq |\mathfrak{G}| < \kappa \Rightarrow \bigcap \mathfrak{G} \in \mathfrak{F}.$$

   Ein κ-vollständiger Filter ist also abgeschlossen unter allen Schnitten von weniger als κ Elementen.

2. (H. Cartan, 1937)
   Wir nennen $\mathfrak{F}$ einen Ultrafilter auf M, falls für jede beliebige Teilmenge $N \subseteq M$ entweder $N \in \mathfrak{F}$ oder $(M - N) \in \mathfrak{F}$ gilt.

3. Wir nennen $\mathfrak{F}$ einen *freien Filter*, falls $\bigcap \mathfrak{F} = \emptyset$ gilt.

Definition 2.1.15 Die Erdős-Rado'sche Pfeil-Notation
Seien $1 \leq \delta, \kappa, \lambda, \theta$ Kardinalzahlen (endlich oder unendlich). Dann soll

$$\kappa \rightarrow (\lambda)^{\delta}_{\theta}$$

besagen, dass die folgende *Partitions-Eigenschaft* erfüllt ist:

Wenn M eine mindestens κ-mächtige Menge ist, gibt es zu jeder Zerlegung von $P_\delta(M)$ in θ viele paarweise disjunkte Teilmengen A^{δ}_{i}, also $P_\delta(M) = \bigcup \left\{ A^{\delta}_{i}; i \in \theta \right\}$, eine λ-mächtige Menge $H \subseteq M$ und einen Index $j \in I$ mit $P_\delta(H) \subseteq A^{\delta}_{j}$.

H wird dann eine homogene Menge genannt.
Ist die Partitions-Eigenschaft nicht erfüllt, schreiben wir einfach:

$$\kappa \not\longrightarrow (\lambda)^{\delta}_{\theta}$$

Bemerkung 2.1.16 *(P. Erdős, 1942) Für alle unendlichen Kardinalzahlen κ gilt:*

$$(2^{\kappa})^{+} \rightarrow \left(\kappa^{+}\right)^{2}_{\kappa}$$

Mit Hilfe dieser Begriffe können wir nun verschiedene Klassen von Kardinalzahlen beschreiben:

Definition 2.1.17 Sei κ eine überabzählbare Kardinalzahl ($\kappa > \aleph_0$).

1. (F. Hausdorff, 1908)
κ heißt *exorbitant groß* (oder auch *schwach-unerreichbar*), falls κ regulär ist und die Form $\kappa = \aleph_\alpha$ hat, wo $\alpha \in \Omega$ eine Limeszahl ist.

2. (A. Tarski und E. Zermelo, 1930)
κ heißt *stark-unerreichbar*, falls κ regulär ist und für jede Kardinalzahl $\lambda < \kappa$ auch $2^\lambda < \kappa$ gilt.

3. (A. Tarski und W. Hanf, 1964)
κ heißt *schwach-kompakt*, falls κ die Partitions-Relation $\kappa \to (\kappa)^2_2$ erfüllt.

4. (S. Ulam, 1930)
Eine überabzählbare Kardinalzahl κ heißt *messbar*, falls es auf κ einen κ-vollständigen, freien Ultrafilter gibt.

5. (A. Tarski, 1962)
κ heißt *stark-kompakt*, falls κ eine reguläre Kardinalzahl ist und jeder κ-vollständige Filter auf einer beliebigen Menge M zu einem κ-vollständigen Ultrafilter auf M erweitert werden kann. (Die Mächtigkeit von M spielt keine Rolle.)

Bemerkung 2.1.18 *Zwischen diesen Begriffen gilt folgender Zusammenhang:*

$$\kappa \textit{ ist stark-kompakt } \Rightarrow \kappa \textit{ ist messbar } \Rightarrow \kappa \textit{ ist schwach-kompakt}$$
$$\Rightarrow \kappa \textit{ ist stark unerreichbar } \Rightarrow \kappa \textit{ ist schwach unerreichbar}$$

Satz 2.1.19 ***Das Δ-System-Lemma.*** *(Erdős-Rado, 1969)*
Sei κ eine unendliche Kardinalzahl und λ eine reguläre Kardinalzahl mit $\kappa < \lambda$ und

$$\forall \mu, \nu \in \mathbb{K} \, (\mu < \kappa \wedge \nu < \lambda \Rightarrow \nu^\mu < \lambda)\,.$$

Sei M eine beliebige Menge und $\mathfrak{A} \subseteq \{X \subseteq M; |X| < \kappa\}$ mit $|\mathfrak{A}| \geq \lambda$.
Dann gibt es Teilmengen $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ und $D \subseteq M$ mit $|\mathfrak{B}| = \lambda$ und $|D| < \kappa$ für die gilt:

$$\forall X, Y \in \mathfrak{B} : X \neq Y \Rightarrow X \cap Y = D.$$

Diese Menge $\mathfrak{B}$ nennt man Δ-System und D die Wurzel des Δ-Systems.

2.2 Aus der Topologie

Als Wiederholung beschreiben wir kurz die wichtigsten topologischen Begriffe:

Definition 2.2.1 Für eine Menge X nennen wir ein Teilmenge $\tau \subseteq P(X)$ der Potenzmenge von X eine *Topologie auf* X, falls

1. $X \in \tau$
2. $\forall \mathfrak{A} \subseteq \tau : \bigcup \mathfrak{A} \in \tau$
3. $\forall \mathfrak{A} \subseteq \tau : |\mathfrak{A}| < \aleph_0 \Rightarrow \bigcap \mathfrak{A} \in \tau$

Die Elemente aus τ werden dann *offenen Mengen* genannt. Ist $A \in P(X)$ und $X - A \in \tau$, so nennen wir A eine *abgeschlossene Menge*.

Bemerkung 2.2.2 *Die Bedingungen bedeuten also:*

1. *Die gesamte Menge X ist offen.*
2. *Die Union über beliebig viele offene Mengen ist wieder offen.*
3. *Der Schnitt über endlich viele offene Mengen ist wieder offen.*

Da $\bigcup \emptyset = \emptyset$ gilt, ist die leere Menge auch immer offen.

Definition 2.2.3 Ist $\langle X, \tau \rangle$ ein topologischer Raum.

1. $\mathfrak{B} \subseteq \tau$ heißt *Basis von* $\langle X, \tau \rangle$, falls $\tau = \{\bigcup \mathfrak{X}; \mathfrak{X} \subseteq \tau\}$ gilt.
2. $\mathfrak{S} \subseteq \tau$ heißt *Subbasis von* $\langle X, \tau \rangle$, falls $\mathfrak{B}_{\mathfrak{S}} := \{\bigcap \mathfrak{X}; \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S} \text{ und } |\mathfrak{X}| < \aleph_0\}$ eine Basis von $\langle X, \tau \rangle$ ist.

Definition 2.2.4 Sei $\langle X, \tau \rangle$ ein topologischer Raum. Wir definieren:

1. Die *Dichtigkeit (oder Separabilitätsgrad) von* $\langle X, \tau \rangle$:
$$d(\langle X, \tau \rangle) := Min\,\{|D|\,; D \textit{ ist dicht in } \langle X, \tau \rangle\}$$
2. Die *Wichte (oder das Gewicht) von* $\langle X, \tau \rangle$:
$$w(\langle X, \tau \rangle) := Min\,\{|\mathfrak{B}|\,; \mathfrak{B} \textit{ ist eine Basis von} \langle X, \tau \rangle\}$$

3. Die *Spreizung (oder Ausspreizung) von* $\langle X, \tau \rangle$:

$$s(\langle X, \tau \rangle) := Sup \{|D| \, ; D \text{ ist diskret in } X\}$$

Aus der Definition können wir sofort folgern:

Bemerkung 2.2.5 *Für jeden topologischen Raum* $\langle X, \tau \rangle$ *gilt:*

$$d(X) \leq w(X).$$

Zwischen diesen Eigenschaften eines topologischen Raumes besteht folgender Zusammenhang, den wir später noch benötigen werden:

Satz 2.2.6 *(J. de Groot, 1965)*
Ist $\langle T, \tau \rangle$ *ein regulärer Raum (siehe S. 14), dann gilt*

$$s(T) \leq w(T) \leq 2^{d(T)}.$$

Definition 2.2.7 Eine Abbildung, die topologischen Räumen eine Kardinalzahl zuordnet (z.B. d, w oder s), wird *Kardinalitätsfunktion* genannt.
Falls klar ist, welche Topologie gemeint ist, schreiben wir für eine Kardinalitätsfunktion ϕ auch $\phi(X)$ statt $\phi(\langle X, \tau \rangle)$.

Definition 2.2.8 Sei $\square^{\kappa}_{i \in I} X_i$ ein κ-Box-Produkt. Für eine Kardinalitätsfunktion ϕ definieren wir

$$\phi_I(\square^{\kappa}_{i \in I} X_i) := \bigcup \{\phi(X_i); i \in I\} .$$

2.3 Das κ-Box-Produkt

Nun können wir die Topologie beschreiben, die wir in dieser Arbeit intensiv studieren wollen:

Definition 2.3.1 Seien $\mu, \kappa \in \mathbb{K}$ mit $\aleph_0 \leq \kappa$ und $\{X_i\}_{i \in \mu}$ eine Familie topologischer Räume.

1. Mit $\square^{\kappa}_{i \in \mu} X_i$ bezeichnen wir das *κ-Box-Produkt*, das auf dem vollen kartesischen Produkt $\prod_{i \in \mu} X_i$ durch die Menge

$$\mathfrak{B} = \left\{ \bigcap_{i \in I} pr_i^{-1}(U_i); I \in P_{<\kappa}(\mu) \text{ und } U_i \text{ ist offen in } X_i \right\}$$

erzeugt wird.

2. Für ein κ-Box-Produkt $\square_{i\in\mu}^{\kappa} X_i$ ist diese Menge $\mathfrak{B}$ sogar eine Basis. Wir nennen $\mathfrak{B}$ auch die *kanonische Basis des κ-Box-Produkts.*

3. Für ein Element $B = \prod_{i\in I} B_i \in \mathfrak{B}$ nennen wir *supp*$(B) := \{i \in I; B_i \neq X_i\}$ den *Träger* (oder *Support*) von B.

Bemerkung 2.3.2 *Sei I eine Indexmenge und seien $\langle X_i; \tau_i\rangle$ topologische Räume, κ und λ zwei unendliche Kardinalzahlen , τ_κ die κ-Box-Topologie und τ_λ die λ-Box-Topologie. Aus der obigen Definition folgt sofort:*

1. *Gilt $\kappa \geq |I|^+$ und $\lambda \geq |I|^+$, dann gilt $\tau_\kappa = \tau_\lambda = \tau_{|I|^+}$.*

2. *Ist $\kappa \leq \lambda$, dann ist die λ-Box-Topologie feiner als die κ-Box-Topologie ($\tau_\lambda \supseteq \tau_\kappa$).*

Bemerkung 2.3.3 *Sei I eine Indexmenge und $\{\langle X_i, \tau_i\rangle\}_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume. Für jeden Filter $\mathfrak{F} \subseteq P(I)$ ist die Menge*

$$\mathfrak{B}_\kappa := \{\Pi_{i\in I} V_i; (\forall i \in I : V_i \in \tau_i) \text{ und } (I - \{i \in I; V_i \neq X_i\}) \in \mathfrak{F}\}$$

die Basis einer Topologie $\tau_{\mathfrak{F}}$ auf $\Pi_{i\in I} X_i$.

Man kann das κ-Box-Produkt auch mit Hilfe der Filter betrachten, denn es gilt:

Bemerkung 2.3.4 *Sei I eine Indexmenge, $\langle X_i; \tau_i\rangle$ topologische Räume für alle $i \in I$, $\kappa \in \mathbb{K}$ mit $\kappa \geq \aleph_0$ und τ_κ die κ-Box-Topologie auf $\Pi_{i\in I} X_i$.*
Für den Filter $\mathfrak{F}_\kappa \subseteq P(I)$ mit

$$\forall J \subseteq I\,(|J| < \kappa \Rightarrow (I - J) \in \mathfrak{F}_\kappa)$$

gilt $\tau_{\mathfrak{F}_\kappa} = \tau_\kappa$.

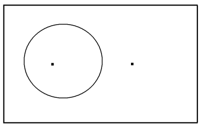
C. J. Knight verwendete in ihrer Arbeit [Kn] die Konstruktion des κ-Box-Produkts über diese Filter $\mathfrak{F}_\kappa$.

2.4 Vererbung der Trennungsaxiome

Um verschiedene Eigenschaften topologischer Räume zu fassen, wurden nach und nach Axiome eingeführt, die die Möglichkeit beschreiben, Punkte oder Mengen voneinander mit Hilfe offener Mengen zu trennen. In ihrem 1935 erschienen Buch *Topologie* [AlHo] bezeichneten P. Alexandraoff und H. Hopf diese Trennungsaxiome mit Symbolen T_0 bis T_5:

Definition 2.4.1 *Die Trennungsaxiome:*
(Kreise symbolisieren offene Mengen.)

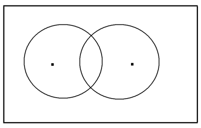
$\mathrm{T}_0: \forall x, y \in X \, (x \neq y \Rightarrow \exists V \in \tau : (x \in V \wedge y \notin V) \vee (x \notin V \wedge y \in V))$



Für je zwei verschiedene Punkte gibt es eine offene Menge, die nur einen der Punkte enthält.

Das Axiom wurde von Andrei N. Kolmogorow formuliert und von P. Alexandroff und H. Hopf 1935 in [AlHo] veröffentlicht.

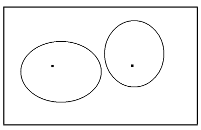
$\mathrm{T}_1: \forall x, y \in X \, (x \neq y \Rightarrow \exists U, V \in \tau \, (x \in U \wedge y \notin U \wedge y \in V \wedge x \notin V))$



Für je zwei verschiedene Punkte gibt es offene Umgebungen, die jeweils den anderen Punkt nicht enthalten.

Das Axiom ist implizit in den Arbeiten von M. Fréchet und F. Riesz (*Die Genesis des Raumbegriffs*, Math.-Nat. Berichte aus Ungarn 24 (1907), S. 309-353) enthalten.

$\mathrm{T}_2: \forall x, y \in X \, (x \neq y \Rightarrow \exists U, V \in \tau \, (x \in U \wedge y \in V \wedge U \cap V = \emptyset))$



Für je zwei verschiedene Punkte gibt es disjunkte offene Umgebungen.

Das Axiom wurde von F. Hausdorff (*Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig (1914), S. 213) eingeführt. Räume, die T_2 erfüllen, werden *Hausdorff-Räume* genannt.

Ein Raum $\langle X, \tau \rangle$ heißt T_i*-Raum*, falls das Trennungsaxiom T_i in X erfüllt ist.

Bemerkung 2.4.2 *Es gilt* $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$*, die Umkehrung ist aber in keinem der Fälle möglich.*

Beweis.

1. $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$ ist klar.

2. $T_0 \not\Rightarrow T_1$:
   Wir betrachten den Raum $X = \{0,1\}$ mit der Topologie $\tau = \{\emptyset, \{0\}, X\}$ und erkennen sofort, dass $\langle X, \tau \rangle$ ein T_0-Raum ist. Da aber die einzige offene Menge, die 1 enthält, ganz X ist, kann $\langle X, \tau \rangle$ kein T_1-Raum sein.

3. $T_1 \not\Rightarrow T_2$:
   Wir betrachten die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und bezeichnen eine nicht leere Menge als offen, falls ihr nur endlich viele Punkte fehlen und definieren

   $$\tau := \{A \in P(\mathbb{N}); |\mathbb{N} - A| < \aleph_0\} \cup \{\emptyset\}.$$

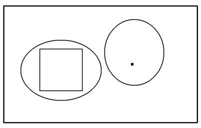
   Seien $A, B \in \tau - \{\emptyset\}$ und $\mathfrak{A} \subseteq \tau - \{\emptyset\}$.
   $\Rightarrow |\mathbb{N} - (A \cap B)| \leq |\mathbb{N} - A| + |\mathbb{N} - B| < \aleph_0$ und $|\mathbb{N} - \bigcup \mathfrak{A}| \leq min_{A \in \mathfrak{A}} |\mathbb{N} - A| < \aleph_0$

   τ ist also eine Topologie und $\langle \mathbb{N}, \tau \rangle$ erfüllt T_1, denn für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq y$ ist $\mathbb{N} - \{y\}$ eine offene Umgebung von x und $\mathbb{N} - \{x\}$ eine offene Umgebung von y.

   Seien $x, y \in \mathbb{N}$ beliebig und $A, B \subseteq \mathbb{N}$ mit $x \in A$, $y \in B$ und $A \cap B = \emptyset$.
   Dann gilt $A \subseteq B^c$.
   Ist A eine offene Menge, muss $|\mathbb{N} \ - B^c| \leq |\mathbb{N} \ - A| < \aleph_0$ gelten und wir erhalten $|\mathbb{N} \ - B| \geq \aleph_0$.
   B kann also nicht offen sein und $\langle \mathbb{N}, \tau \rangle$ kann somit T_2 nicht erfüllen. $\square$

Definition 2.4.3 *Die höheren Trennungsaxiome:*
(Kreise symbolisieren offene und Vierecke geschlossene Mengen.)

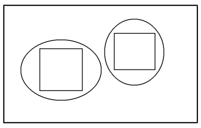
T_3: $\forall B \in \tau \forall x \in X \ (x \in B \Rightarrow \exists U, V \in \tau : x \in U \wedge B^c \subseteq V \wedge U \cap V = \emptyset)$



Zu jeder abgeschlossenen Menge $A = B^c$ und jedem Punkt $x \notin A$ gibt es disjunkte offene Mengen V und U, mit $x \in U$ und $A \subseteq V$.

Das Axiom wurde von L. Vietoris (*Stetige Mengen*, Monatshefte f. Math. u. Phys. 31 (1921), S. 173-204) eingeführt. Hausdorff-Räume, die T_3 erfüllen, werden *regulär* genannt.

T_4: $\forall A, B \in \tau : (A \cup B = X \Rightarrow \exists U, V \in \tau : A^c \subseteq U \wedge B^c \subseteq V \wedge U \cap V = \emptyset)$



Disjunkte abgeschlossene Mengen sind in disjunkten offenen Mengen enthalten.

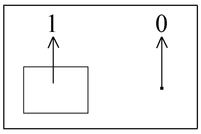
Das Axiom wurde von H. Tietze (*Beiträge zur allgemeinen Topologie*, Math. Annalen 88 (1923), S. 290-312) eingeführt. Hausdorff-Räume, die T_4 erfüllen, werden *normal* genannt.

T_5: $\forall A, B \in P(X) : (A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset \Rightarrow \exists U, V \in \tau : A \subseteq U \wedge B \subseteq V \wedge U \cap V = \emptyset)$

Je zwei separierte Teilmengen $\left(A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset\right)$ *von* X *sind in zwei disjunkten offenen Umgebungen enthalten.*

Das Axiom wurde von P. Alexandroff und P. Urysohn eingeführt.

$T_{3\frac{1}{2}}$: $\forall B \in \tau \forall x \in X \, (x \in B \Rightarrow \exists f \in \mathcal{C}(X, [0,1]) : f(x) = 0 \wedge f(B^c) = \{1\})$



Zu jeder abgeschlossenen Menge $A = B^c$ *und jedem Punkt* $x \notin A$ *gibt es eine stetige Funktion* f*, die* X *in das reelle Intervall* $[0,1]$ *abbildet mit* $f(x) = 0$ *und* $f(y) = 1$ *für alle* $y \in A$.

Das Axiom geht auf Paul Urysohn (*„Über die Mächtigkeit zusammenhängender Mengen“*, Math. Annalen 94 (1925), S. 262-295) zurück. Räume, die $T_{3\frac{1}{2}}$ erfüllen, werden *vollkommen-regulär* (oder auch *Tychonow-Räume*) genannt.

Wie beim Tychonow-Produkt vererben sich T_0, T_1, T_2 und T_3 von den Grundräumen auf die Produkt-Topologie wie folgt:

Satz 2.4.4 *Seien* X_i *topologische Räume für eine Indexmenge* I, κ *eine unendliche Kardinalzahl. Es gilt für* $j = 0, 1, 2, 3$*:*

$$(\forall i \in I : X_i \text{ ist ein } T_j\text{-Raum}) \iff \square_{i \in I}^{\kappa} X_i \text{ ist ein } T_j\text{-Raum.}$$

Beweis. Für alle Räume X_i sei τ_i die dazugehörige Topologie und für $X := \prod_{i \in I} X_i$ sei τ die κ-Box-Topologie.

T_0: "$\Rightarrow$":

Seien $x, y \in X$ mit $x \neq y$.
$\Rightarrow \exists i \in I : x_i \neq y_i$
$\Rightarrow \exists O_i \in \tau_i : x_i \in O_i$ und $y_i \notin O_i$

$\Rightarrow pr_i^{-1}(O_i) =: O \in \tau$ mit $x \in O$ und $y \notin O$

"$\Leftarrow$":
Beweis durch Kontraposition:
Sei O.B.d.A. X_0 kein T_0-Raum, dann existieren zwei verschiedene Punkte $x_0, y_0 \in X_0$ mit:
$\forall O_0 \in \tau_0 : (x_0 \in O_0 \Rightarrow y_0 \in O_0)$
Sei nun $x \in X$ mit $pr_0(x) = x_0$ und $y \in X$ mit

$$pr_i(y) := \begin{cases} y_0 & \text{, falls } i = 0 \\ pr_i(x) & \text{, sonst} \end{cases}$$

Sei $O \in \tau$ mit $x \in O$ und O.B.d.A. sei O ein Basiselement, also $O = \prod_{i \in I} O_i$.
$\Rightarrow x_0 \in O_0$
$\Rightarrow y_o \in O_0$
$\Rightarrow y \in O$
Also kann X kein T_0-Raum sein.

T_1, T_2: Der Beweis läuft analog.

T_3: Sei für jeden Punkt $x \in X$ die Menge $\mathfrak{U}(x)$ die Umgebungsbasis von x.
Nach [Fe3] Proposition 4.6 gilt: X ist ein T_3 Raum genau dann, wenn

$$\forall p \in \ R \forall U \in \mathfrak{U}(p) \exists W \in \mathfrak{U}(p) : \overline{W} \subseteq U$$

gilt.
"$\Rightarrow$":
Sei $\mathfrak{B}$ die kanonische Basis von τ und $x \in B = \prod_{i \in I} B_i \in \mathfrak{B}$.
Da alle X_i T_3-Räume sind, gibt es für alle $i \in I$ eine offene Menge O_i mit $O_i \in \mathfrak{U}_i$ und $\overline{O_i} \subseteq B_i$.
Sei $W = \prod_{i \in I} W_i$ mit

$$W_i := \begin{cases} X_i & \text{, falls } i \notin supp\,(B) \\ O_i & \text{, falls } i \in supp\,(B) \end{cases}$$

Wir erkennen, dass $x \in W$ gilt.

Da $|supp\,(B)| < \kappa$ gilt, ist W auch offen in X.

$$\text{Da } \overline{\prod_{i\in I} W_i} = \prod_{i\in I} \overline{W_i} \text{ und } \overline{W_i} \subseteq B_i \text{ ist } x \in \prod_{i\in I} \overline{W_i} \subseteq B.$$

$\Rightarrow X$ ist ein T_3-Raum.

"$\Leftarrow$:"

Sei X ein T_3-Raum und $j \in I$ beliebig, $x_j \in X_j$ und $V_j \in \tau_j$ mit $x_j \in V_j$.
Sei $x \in X$ mit $pr_j(x) = x_j$ und $V = \prod_{i\in I} V_i$ mit:

$$V_i := \begin{cases} V_j & \text{, falls } i = j \\ X_i & \text{, sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow x \in V$ und $V \in \tau$
$\Rightarrow \exists W = \prod_{i\in I} W_i \in \mathfrak{B}(x) : \overline{W} \subseteq V$
$\Rightarrow \overline{W_j} = pr_j(\overline{W}) = \overline{pr_j(W)} \subseteq pr_j(V) = V_j \Rightarrow X_j$ ist ein T_3-Raum. □

Bemerkung zu $\overline{\prod_{i\in I} W_i} = \prod_{i\in I} \overline{W_i}$:

Seien $\langle X_i, \tau_i\rangle$ topologische Räume für eine Indexmenge I mit Basen $\mathfrak{B}_i$ und $\mathfrak{B}$ die kanonische Basis von $\Box^{\kappa}_{i\in I} X_i$.
O.B.d.A.: $\prod_{i\in I} W_i \neq \emptyset$ und für die abgeschlossenen Mengen gilt:

$$\overline{\prod_{i\in I} W_i} = \left\{ x \in X; \forall B \in \mathfrak{B}(x) : B \cap \prod_{i\in I} W_i \neq \emptyset \right\}$$
$$\text{und } \overline{W_i} = \{x \in X; \forall B_i \in \mathfrak{B}_i(x_i) : B_i \cap W_i \neq \emptyset\}$$

"$\subseteq$":

Sei $x = \prod_{i\in I} x_i \in \overline{\prod_{i\in I} W_i}$
$\Rightarrow \forall B \in \mathfrak{B}(x) : B \cap \prod_{i\in I} W_i \neq \emptyset$
$\Rightarrow \forall i \in I \forall B_i \in \mathfrak{B}_i(x_i) : B_i \cap W_i \neq \emptyset$
$\Rightarrow \forall i \in I : x_i \in \overline{W_i}$
$\Rightarrow x = \prod_{i\in I} x_i \in \prod_{i\in I} \overline{W_i}$

"$\supseteq$":

Sei $x = \prod_{i\in I} x_i \in \prod_{i\in I} \overline{W_i}$.

$\Rightarrow \forall i \in I \forall B_i \in \mathfrak{B}_i(x_i) : B_i \cap W_i \neq \emptyset$

Sei $B \in \mathfrak{B}(x)$

<u>Fall 1:</u> $i \in supp(B)$:

$\Rightarrow x_i \in pr_i(B) \in \tau_i$

$\Rightarrow \exists B^* \in \mathfrak{B}_i(x_i) : B^* \subseteq pr_i(B_i)$ und $B^* \cap W_i \neq \emptyset$

$\Rightarrow pr_i(B) \cap W_i \neq \emptyset$

<u>Fall 2:</u> $i \notin supp(B)$:

$\Rightarrow x_i \in pr_i(B) = X_i$

$\Rightarrow pr_i(B) \cap W_i = W_i \neq \emptyset$

$\Rightarrow B \cap \prod_{i \in I} W_i \neq \emptyset$

$\Rightarrow \overline{\prod_{i \in I} W_i} = \prod_{i \in I} \overline{W_i}$ $\square$

3 Dichtigkeit des κ-Box-Produkts

3.1 Eine Verallgemeinerung des Satzes von Hewitt-Marczewski-Pondiczery

Nach dem klassischen Satz von Hewitt-Marczewski-Pondiczery gilt für die Dichtigkeit des Tychonow-Produkts:

$$d\left(\square_{i\in 2^\mu}^{\aleph_0} X_i\right) \leq \mu, \text{ falls für alle Räume } d(X_i) \leq \mu \text{ gilt.}$$

Für separable Räume wurde diese Eigenschaft 1941 von E. Marczewski in [Ma] bewiesen. 1944 bewies E. S. Pondiczery [Po] eine etwas schwächere Version für Hausdorff-Räume und 1947 bewies E. Hewitt [He2] die oben aufgeführte Version.

In Theorem 3.1.4 werden wir diesen Satz weiter für das κ-Box-Produkt beweisen:

$$d\left(\square_{i\in 2^\mu}^{\kappa} X_i\right) \leq \mu^{<\kappa}, \text{ falls für alle Räume } d(X_i) \leq \mu \text{ gilt.}$$

Dazu benötigen wir eine Verallgemeinerung von Theorem 1 in [En]. Um dies zu erreichen, beginnen wir mit der folgenden Definition und Proposition:

Definition 3.1.1 Seien $\kappa, \mu \in \mathbb{K}$ mit $\mu \geq \kappa \geq \aleph_0$, $\{X_i\}_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume und für alle $i \in I$ sei $\mathfrak{B}_i$ eine Basis der Topologie auf X_i.
$W \subseteq \prod_{i\in I} X_i$ nennen wir einen μ-*Quader*, falls $|supp(W)| \leq \mu$ gilt und für jedes $i \in I$ ein $\mathfrak{W}_i \subseteq \mathfrak{B}_i$ existiert mit $W = \prod_{i\in I}\left(\bigcap \mathfrak{W}_i\right)$.

Proposition 3.1.2 *Seien $\kappa, \mu \in \mathbb{K}$ mit $\mu \geq \kappa \geq \aleph_0$ und sei X eine Menge, $\{X_i\}_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume, $\{f_i : X \to X_i\}_{i\in I}$ eine Familie von Funktionen und sei W eine Teilmenge von $\prod_{i\in I} X_i$, die Union von μ-Quadern ist.*
Für jede Kardinalzahl $\lambda < \kappa$ und jedes Tupel $\left\langle \{x_i\}_{i\in\lambda}; \{J_i\}_{i\in\lambda}\right\rangle$ von Familien $\{x_i\}_{i\in\lambda} \subseteq X$ und $\{J_i\}_{i\in\lambda} \subseteq P(I)$, wo alle J_i paarweise disjunkt und nicht leer sind, existiert eine

maximal $\mu^{<\kappa}$-mächtige Teilmenge $Q \subseteq W$, so dass für jede Transversale $A \subseteq \bigcup_{i\in\lambda} J_i$ mit $A = \{j_i; i \in \lambda\}$ und $A \cap J_i = \{j_i\}$ für alle $i \in \lambda$ folgendes gilt:

$$\left(W \cap \bigcap_{i\in\lambda} pr_{j_i}^{-1}\left(f_{j_i}\left(x_{j_i}\right)\right) \neq \emptyset\right) \Rightarrow \left(Q \cap \bigcap_{i\in\lambda} pr_{j_i}^{-1}\left(f_{j_i}\left(x_{j_i}\right)\right) \neq \emptyset\right).$$

Beweis. Die Behauptung gilt für jedes Tupel $\left\langle \{x_i\}_{i\in\lambda}; \{J_i\}_{i\in\lambda}\right\rangle$ mit $|\{i \in \lambda; |J_i| > 1\}| = 0$, denn für solche Tupel kann nur eine Transversale $\{j_i; i \in \lambda\}$ gebildet werden und für jeden Punkt $p \in W \cap \bigcap_{i\in\lambda} pr_{j_i}^{-1}\left(f_{j_i}\left(x_{j_i}\right)\right)$ erfüllt die Menge $Q := \{p\}$ die Bedingung.

Wir beweisen die Aussage durch Induktion über die Kardinalität von $\{i \in \lambda; |J_i| > 1\}$. Sei $\left\langle \{x_i\}_{i\in\lambda}; \{J_i\}_{i\in\lambda}\right\rangle$ ein Tupel mit $|\{i \in \lambda; |J_i| > 1\}| = \nu$ und die Behauptung gelte bereits für alle Familien von Tupeln $\left\langle \{x_i\}_{i\in\lambda}; \{J_i\}_{i\in\lambda}\right\rangle$ mit $|\{i \in \lambda; |J_i| > 1\}| < \nu$.

O.B.d.A. können wir auch davon ausgehen, dass $|J_i| > 1$ für alle $i \in \nu$ und $|J_i| = 1$ für alle $i \geq \nu$ gilt und mindestens eine Transversale $A \subseteq \bigcup_{i\in\lambda} J_i$ mit $A = \{j_i; i \in \lambda\}$ und $A \cap J_i = \{j_i\}$ für alle $i \in \lambda$ existiert mit $W \cap \bigcap_{i\in\lambda} pr_{j_i}^{-1}\left(f_{j_i}\left(x_{j_i}\right)\right) \neq \emptyset$.

Sei nun $p \in W$ mit $pr_{j_i}(p) \in f_{j_i}(x_i)$ für alle $\nu \leq i \in \lambda$.
Dann existiert ein $J \in P_{\leq\mu}(I)$ mit

$$\left\{q \in \prod_{i\in I} X_i; \forall j \in J : pr_j(q) = pr_j(p)\right\} \subseteq W.$$

Wir wählen für alle $i \in \nu$ und $j_i \in (J_i - J)$ einen Punkt $q_{j_i} \in f_{j_i}(x_i)$ und definieren einen Punkt $q \in W$ wie folgt:

$$pr_i(q) := \begin{cases} pr_i(p) & \text{, falls } i \in (I - \bigcup_{l\in\nu}(J_l - J)) \\ q_{j_l} & \text{, falls } i = j_l \text{ und } j_l \in (J_l - J) \end{cases}$$

Damit gilt $q \in \left(W \cap \bigcap_{i\in\lambda} pr_{j_i}^{-1}(f_{j_i}(x_i))\right)$ für jede Transversale $A \subseteq \bigcup_{i\in\lambda} J_i$ mit $A = \{j_i; i \in \lambda\}$ und $A \cap J_i = \{j_i\}$ für alle $i \in \lambda$ und $j_i \in (J_i - J)$ für alle $i \in \nu$.

Nun müssen wir noch die Familien $\{j_i; j_i \in J_i\}_{i\in\lambda}$ mit $j_i \in (J_i \cap J)$ für mindestens ein $i \in \lambda$ betrachten:

Wir definieren

$$\Sigma := \left\{ \{J_i^*\}_{i\in\nu} ; |\{i \in \kappa; J_i^* = J_i\}| < \nu \wedge (J_i^* \neq J_i \Rightarrow J_i^* \in P_1(J_i \cap J)) \right\}.$$

$\Rightarrow |\Sigma| \leq \mu^\nu \leq \mu^\lambda \leq \mu^{<\kappa}$
Für alle $\sigma = \{J_i^*\}_{i\in\nu} \in \Sigma$ definieren wir eine die Familie $\{J_i^\sigma\}_{i\in\lambda}$ wie folgt:

$$J_i^\sigma := \begin{cases} J_i^* & \text{, falls } i \in \nu \\ J_i & \text{, falls } i \geq \nu \end{cases}$$

Für diese Familien $\{J_i^\sigma\}_{i\in\lambda}$ ist die Aussage der Proposition bereits bewiesen, es gibt also eine Teilmenge $Q_\sigma \subseteq W$ mit $|Q_\sigma| \leq \mu^{<\kappa}$ und für jede Transversale $A \subseteq \bigcup_{i\in\lambda} J_i^\sigma$ mit $A = \{j_i; i \in \lambda\}$ und $A \cap J_i^\sigma = \{j_i\}$ für alle $i \in \lambda$ gilt:

$$\left(W \cap \bigcap_{i\in\lambda} pr_{j_i}^{-1} \left(f_{j_i}\left(x_{j_i}\right)\right) \neq \emptyset \right) \Rightarrow \left(Q_\sigma \cap \bigcap_{i\in\lambda} pr_{j_i}^{-1} \left(f_{j_i}\left(x_{j_i}\right)\right) \neq \emptyset \right).$$

Sei nun $A \subseteq \bigcup_{i\in\lambda} J_i$ eine Transversale mit $A = \{j_i; i \in \lambda\}$ und $A \cap J_i = \{j_i\}$ für alle $i \in \lambda$ mit

$$W \cap \bigcap_{i\in\lambda} pr_{j_i}^{-1} \left(f_{j_i}\left(x_{j_i}\right)\right) \neq \emptyset.$$

Für diese Transversale A können wir ein $\sigma \in \Sigma$ wählen mit $A \subseteq \bigcup_{i\in\lambda} J_i^\sigma$ und es gibt ein Q_σ mit $Q_\sigma \cap \bigcap_{i\in\lambda} pr_{j_i}^{-1} \left(f_{j_i}\left(x_{j_i}\right)\right) \neq \emptyset$.

Wir definieren

$$Q := \{q\} \cup \bigcup_{\sigma\in\Sigma} Q_\sigma$$

und da $|Q| \leq \mu^{<\kappa}$ gilt, ist Q die Menge, die wir für $\left\langle \{x_i\}_{i\in\lambda} ; \{J_i\}_{i\in\lambda} \right\rangle$ gesucht haben. $\square$

Satz 3.1.3 *Seien $\kappa, \mu \in \mathbb{K}$ mit $\mu \geq \kappa \geq \aleph_0$ und sei $\square_{i\in I}^\kappa X_i$ ein κ-Box-Produkt mit $|I| \leq 2^\mu$ und $w(X_i) \leq \mu$ für alle $i \in I$.*
Für jede Teilmenge $W \subseteq \prod_{i\in I} X_i$, die Union von μ-Quadern ist, gilt $d(W) \leq \mu^{<\kappa}$.

Beweis. O.B.d.A. sei $I = 2^\mu$.
Sei $\mathfrak{B}^*$ eine Basis des κ-Box-Produkts $\square_{i\in\mu}^\kappa D$ des diskreten Raumes $D = \{0; 1\}$ mit $|\mathfrak{B}^*| = \mu^{<\kappa}$.

Für alle $i \in 2^\mu$ sei $\mathfrak{B}_i$ eine Basis der Topologie auf X_i mit $|\mathfrak{B}_i| = \mu$, X sei eine Menge mit $|X| = \mu$, $\{f_i; f_i : X \to \mathfrak{B}_i\}_{i\in 2^\mu}$ eine Familie surjektiver Funktionen und sei $\psi : 2^\mu \to \prod_{i\in\mu} D$ eine Bijektion.

Wir definieren

$$\Sigma := \left\{ \left\langle \{x_i\}_{i\in\lambda}; \{J_i\}_{i\in\lambda} \right\rangle; \lambda < \kappa \wedge \forall i, j \in \lambda : \begin{array}{r} x_i \in \ X \\ \wedge J_i \subseteq 2^\mu \\ \wedge \psi(J_i) \in \mathfrak{B}^* \\ \wedge i \neq j \Rightarrow J_i \cap J_j = \emptyset \end{array} \right\}$$

Nach Proposition 3.1.2 existiert für jedes $\sigma \in \Sigma$ eine maximal $\mu^{<\kappa}$-mächtige Teilmenge $Q_\sigma \subseteq W$, so dass für alle Familien $\{j_i; j_i \in J_i\}_{i\in\lambda}$ folgendes gilt:

$$\left(W \cap \bigcap_{i\in\lambda} pr_{j_i}^{-1} \left(f_{j_i}\left(x_{j_i}\right)\right) \neq \emptyset \right) \Rightarrow \left(Q_\sigma \cap \bigcap_{i\in\lambda} pr_{j_i}^{-1} \left(f_{j_i}\left(x_{j_i}\right)\right) \neq \emptyset \right).$$

Wir definieren $Q := \bigcup_{\sigma\in\Sigma} Q_\sigma$. Da $|\mathfrak{B}^*| = \mu$ gilt, ist $|\Sigma| \leq \mu^{<\kappa}$ und wir erhalten $|Q| \leq \mu^{<\kappa}$.
Wir werden jetzt zeigen, dass Q dicht in W liegt.

Sei O eine nicht leere in W offene Menge und U ein Element der kanonischen Basis $\mathfrak{B}$ von $\Box^\kappa_{i\in 2^\mu} X_i$ mit $\emptyset \neq U \cap W \subseteq O$.
Dann existiert eine Menge $\{j_i; i \in \lambda\} \in P_{<\kappa}(2^\mu)$ und für alle $i \in \lambda$ ein $U_{j_i} \in \mathfrak{B}_{j_i}$ mit $U = \bigcap_{i\in\lambda} pr_{j_i}^{-1}(U_i)$.
Für alle $i \in \lambda$ seien $x_i := \psi(j_i)$ die entsprechenden Punkte in $\prod_{i\in\mu} D$. Da diese Punkte alle verschieden sind, gilt:

$$\forall k, l \in \lambda \left(k \neq l \Rightarrow \exists m \in \mu : pr_m(x_k) \cap pr_m(x_l) = \emptyset\right).$$

Wir wählen also für jedes $i \in \lambda$ ein $I_i \subseteq 2^\mu$, so dass sich der Punkt x_i an genau einer Stelle $m \in I_i$ von einem anderen Punkt x_k unterscheidet:

$$\forall k \in \lambda \left(k \neq i \Rightarrow \exists m \in I_i \left(pr_m(x_k) \cap pr_m(x_i) = \emptyset \wedge \forall n \in I_i - \{m\} : pr_n(x_k) = pr_n(x_i)\right)\right).$$

Wir definieren

$$B_i^* := \bigcap_{m\in I_i} pr_m^{-1}(pr_m(x_i))$$

und erhalten $B_i^* \in \mathfrak{B}^*$ für alle $i \in \lambda$ und $B_i^* \cap B_j^* = \emptyset$ für alle $i \neq j$, also paarweise disjunkte und offene Mengen $B_i^* \in \mathfrak{B}^*$ mit $\psi(j_i) \in B_i^*$, $x_i \in X$ und $f_{j_i}(x_i) = U_i$.

Offensichtlich ist $\sigma := \langle \{x_i\}_{i\in\lambda} ; \{J_i\}_{i\in\lambda} \rangle$ ein Element von Σ mit der Eigenschaft

$$\emptyset \neq W \cap \bigcap_{i\in\lambda} pr_{j_i}^{-1}(f_{j_i}(x_i)).$$

Also muss auch $Q_\sigma \cap U \neq \emptyset$ gelten.
$\Rightarrow Q \cap O \supseteq O_\sigma \cap W \cap U = O_\sigma \cap U \neq \emptyset$
Also ist Q eine in W dichte Menge und wir erhalten $d(W) \leq |Q| \leq \mu^{<\kappa}$. $\square$

Nun können wir eine Verallgemeinerung des Satzes von Hewitt-Marczewski-Pondiczery für κ-Box-Produkte beweisen:

Theorem 3.1.4 *Seien $\kappa, \mu \in \mathbb{K}$ mit $\aleph_0 \leq \kappa \leq \mu$ und $\square_{i\in I}^\kappa X_i$ ein κ-Box-Produkt mit $|I| \leq 2^\mu$ und $d(X_i) \leq \mu$ für alle $i \in I$.*
Dann gilt

$$d\left(\square_{i\in I}^\kappa X_i\right) \leq \mu^{<\kappa}.$$

Beweis. Für alle $i \in I$ seien D_i in X_i dichte Mengen mit $|D_i| \leq \mu$.
Offensichtlich ist dann $D = \prod_{i\in I} D_i$ eine in $\square_{i\in I}^\kappa X_i$ dichte Menge.

Sei $\square_{i\in I}^\kappa W_i$ das κ-Box-Produkt diskreter Räume W_i mit $|W_i| = \mu$ und sei $f : \prod_{i\in I} W_i \to D$ eine stetige und surjektive Abbildung.
Da $\prod_{i\in I} W_i$ selbst eine Union μ-Quadern ist, existiert nach Satz 3.1.3 somit eine dichte Teilmenge Q von W mit $|Q| \leq \mu^{<\kappa}$.
Sei O eine nicht leere in $\square_{i\in I}^\kappa X_i$ offene Menge. Dann ist $D \cap O \neq \emptyset$ und $f^{-1}(D \cap O)$ ist offen in $\square_{i\in I}^\kappa W_i$.
Dann ist $Q \cap f^{-1}(D \cap O) \neq \emptyset$ und $\emptyset \neq f\left(Q \cap f^{-1}(D \cap O)\right) \subseteq f(Q) \cap O$.
Also ist $f(Q)$ dicht in $\square_{i\in I}^\kappa X_i$. Es gilt:

$$d\left(\square_{i\in I}^\kappa X_i\right) \leq \mu^{<\kappa}.$$

$\square$

Bemerkung 3.1.5 *Diese Abschätzung gilt auch für Räume mit $d(X_i) \leq \mu^{<\kappa}$, denn dann ist*

$$d(\square_{i\in I}^\kappa X_i) \leq \left(\mu^{<\kappa}\right)^{<\kappa} = \mu^{<\kappa}.$$

Für das Produkt des diskreten, zweielementigen Raumes $D(2)$ können wir mit Theorem 3.1.4 die Dichtigkeit mit Hilfe des Logarithmus abschätzen:

Korollar 3.1.6 *Sei $\kappa \geq \aleph_0$, I eine Indexmenge mit $|I| \geq \kappa$ und $D(2)$ der diskrete, zweielementige Raum.*
Dann gilt

$$log(|I|) \leq d\left(\Box^{\kappa}_{i \in I} D(2)\right) \leq log(|I|)^{<\kappa}.$$

Beweis. Da mit $D(2)$ auch $\Box^{\kappa}_{i \in I} D(2)$ ein regulärer Raum $(T_2 + T_3)$ ist, können wir die Wichte mit J. de Groot (Satz 2.2.6) wie folgt abschätzen:

$$w\left(\Box^{\kappa}_{i \in I} D(2)\right) \leq 2^{d\left(\Box^{\kappa}_{i \in I} D(2)\right)}.$$

Da mit $|I| \leq w\left(\Box^{\kappa}_{i \in I} D(2)\right)$ auch $|I| \leq 2^{d\left(\Box^{\kappa}_{i \in I} D(2)\right)}$ gilt, ist nach der Definition des Logarithmus auch $log\left(|I|\right) \leq d\left(\Box^{\kappa}_{i \in I} D(2)\right)$ erfüllt.

Da auch $|I| \leq 2^{log(|I|)}$ und $d(D(2)) \leq log\left(|I|\right)$ können wir den Satz von Hewitt-Marczewski-Pondiczery für κ-Box-Produkte anwenden und erhalten

$$log\left(|I|\right) \leq d\left(\Box^{\kappa}_{i \in I} D(2)\right) \leq log\left(|I|\right)^{<\kappa}. \qquad \Box$$

Bemerkung 3.1.7 *Aus der verallgemeinerten Version des Satzes von Hewitt-Marczewski-Pondiczery folgt $d(\Box^{\aleph_0}_{i \in I} D(2)) = log(|I|)$ für das Tychonow-Produkt, denn $\mu^{<\aleph_0} = \mu$ für jede unendliche Kardinalzahl. Diese Version wurde in [Ho] bewiesen.*

Mit diesem Korollar können wir nun auch die Dichtigkeit eines κ-Box-Produkts abschätzen, ohne die Kardinalität der Indexmenge (wie in Theorem 3.1.4) beschränken zu müssen:

Satz 3.1.8 *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl, I eine Indexmenge mit $|I| \geq \kappa$ und $\Box^{\kappa}_{i \in I} X_i$ ein κ-Box-Produkt.*
Besitzt jeder Grundraum zwei disjunkte, offene und nicht leere Mengen (z.B. T_1-Räume), so gilt:

$$log\left(|I|\right) \cdot d_I\left(\Box^{\kappa}_{i \in I} X_i\right) \leq d\left(\Box^{\kappa}_{i \in I} X_i\right) \leq \left(log\left(|I|\right) \cdot d_I\left(\Box^{\kappa}_{i \in I} X_i\right)\right)^{<\kappa}.$$

Bemerkung. In [Ju] bewies I. Juhász $log\,(|I|) \cdot d_I\left(\square^{\aleph_0}_{i\in I} X_i\right) = d\left(\square^{\aleph_0}_{i\in I} X_i\right)$ für das Tychonow-Produkt über entsprechende Grundräume.

Beweis. Wegen der topologischen Eigenschaften der Grundräume gilt $d(\square^{\kappa}_{i\in I} D(2)) \leq d(\square^{\kappa}_{i\in I} X_i)$ für den diskreten, zweielementigen Raum $D(2)$ und nach Korollar 3.1.6 gilt also

$$log\,(|I|) \leq d\,(\square^{\kappa}_{i\in I} D\,(2)) \leq d\,(\square^{\kappa}_{i\in I} X_i)\,.$$

Da $d_I\left(\square^{\kappa}_{i\in I} X_i\right) \leq d\left(\square^{\kappa}_{i\in I} X_i\right)$ gilt somit auch

$$log\,(|I|) \cdot d_I\,(\square^{\kappa}_{i\in I} X_i) \leq d\,(\square^{\kappa}_{i\in I} X_i)\,.$$

Für die Grundräume X_i gilt $d(X_i) \leq d_I\left(\square^{\kappa}_{i\in I} X_i\right)$ und $|I| \leq 2^{log(|I|)}$. Somit sind auch die Voraussetzungen

$$d(X_i) \leq log\,(|I|) \cdot d_I\,(\square_{i\in I} X_i) \text{ und}$$
$$|I| \leq 2^{log(|I|)\cdot d_I(\square_{i\in I} X_i)}$$

für den Satz von Hewitt-Marczewski-Pondiczery für κ-Box-Produkte erfüllt und wir erhalten

$$d\,(\square^{\kappa}_{i\in I} X_i) \leq (log\,(|I|) \cdot d_I\,(\square^{\kappa}_{i\in I} X_i))^{<\kappa}\,.$$

$\square$

3.2 Homöomorphie von κ-Box-Produkten

In diesem Abschnitt benutzen wir folgende Notation zur Erleichterung der Lesbarkeit: Ist $\langle R, \tau\rangle$ ein topologischer Raum und sind μ, κ zwei unendliche Kardinalzahlen, dann ist R^{μ}_{κ} der Raum $\prod_{i\in\mu} R_i$ mit $R_i = R$ für alle $i \in \mu$ versehen mit der κ-Box-Topologie ($R^{\mu}_{\kappa} = \square^{\kappa}_{i\in\mu} R_i$).

Definition 3.2.1 Wir nennen zwei topologische Räume $\langle X, \tau\rangle$ und $\langle Y, \sigma\rangle$ *homöomorph*, falls eine bijektive Abbildung $\phi : X \longrightarrow Y$ existiert, die τ auf σ abbildet:

$$\sigma = \{\{\phi(O)\}\,; O \in \tau\}\,.$$

ϕ nennen wir dann einen *Homöomorphismus von X auf Y.*
Homöomorphe Räume unterscheiden sich also aus topologischer Sicht nicht.

Proposition 3.2.2 *Sei $\langle R, \tau \rangle$ ein topologischer Raum und seinen κ, λ und μ unendliche Kardinalzahlen.*
Ist $\mathfrak{B}$ eine Basis von τ und $\mathfrak{Q} = \left\{\Pi_{k\in\mu}\Pi_{i\in\mu}X_{(k,i)}; X_{(k,i)} \subseteq R\right\}$ die Menge der Quader in R, so ist

$$\mathfrak{C} := \left\{B \in \mathfrak{Q}; B_{(k,i)} \in \mathfrak{B} \ \& \ |supp(B)| < \kappa \ \& \ \left|supp\left(\Pi_{i\in\mu}B_{(k,i)}\right)\right| < \lambda\right\}$$

eine Basis von $\left(R^{\mu}_{\lambda}\right)^{\mu}_{\kappa}$. Wir nennen sie die kanonische Basis von $\left(R^{\mu}_{\lambda}\right)^{\mu}_{\kappa}$.

Beweis. Dies folgt aus dem Distributiv-Gesetz:
Sei τ_1 die Topologie auf R^{μ}_{λ} und $\mathfrak{B}_1$ die kanonische Basis.
Klar: $\mathfrak{B}_2 := \left\{B = \prod_{k\in\kappa} B_\kappa; B_\kappa \in \tau_1 \ \& \ |supp(B)| < \kappa\right\}$ ist Basis von $\left(R^{\mu}_{\lambda}\right)^{\mu}_{\kappa}$ und $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$.
Zeige: Für alle $B \in \mathfrak{B}_2$ gibt es ein $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{C}$ mit $\bigcup \mathfrak{X} = B$.

Sei $B = \prod_{k\in\kappa} B_\kappa \in \mathfrak{B}_2$.

$$\Rightarrow \forall k \in \kappa \exists \mathfrak{Y}_k \subseteq \mathfrak{B}_1 : \bigcup \mathfrak{Y}_k = B_k$$
$$\Rightarrow B = \prod_{k\in\kappa} B_k = \prod_{k\in\kappa}\bigcup \mathfrak{Y}_k$$

Da $|\mathfrak{Y}_k| \leq |\mathfrak{B}_1|$ ist, können wir $\mathfrak{Y}_k = \left\{Y_{(k,i)}; i \in |\mathfrak{B}_1|\right\}$ annehmen und es gilt somit

$$B = \bigcup_{f\in|\mathfrak{B}_1|^\kappa} \prod_{k\in\kappa} Y_{(k,f(k))}.$$

Da $|supp(B)| < \kappa$ ist, gilt auch $\left|supp\left(\prod_{k\in\kappa} Y_{(k,f(k))}\right)\right| < \kappa$ für jede Auswahlfunktion $f \in |\mathfrak{B}_1|^\kappa$ und jedes $k \in \kappa$.

$\Rightarrow \mathfrak{X} := \left\{\prod_{k\in\kappa} Y_{(k,f(k))}; f \in |\mathfrak{B}_1|^\kappa\right\} \subseteq \mathfrak{C}$ mit $\bigcup \mathfrak{X} = B$ $\square$

Wir betrachten zuerst Räume, die nicht homöomorph sind:

Satz 3.2.3 *Seien κ, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ mit $\aleph_0 \leq \lambda < \kappa \leq \mu$ und $\mu^{<\lambda} = \mu < \mu^+ = \mu^{<\kappa}$. Ist R ein topologischer Raum mit $z(R) = d(R) = \mu$, in dem eine zellulare Familie der Mächtigkeit μ existiert, dann gilt:*

$$R^{\mu}_{\lambda} \ncong R^{\mu}_{\kappa}.$$

Beweis. Nach 3.1.4 gilt $d(R_\kappa^\mu) \leq \mu^{<\kappa}$.
Sei $\mathfrak{Z} = \{A_\nu; \nu \in \mu\}$ eine in R zellulare Familie.
Definiere für alle $\eta \in \kappa$ und $f \in \mu^{(\eta - \{0\})}$ Mengen $O_{\eta,f}$ wie folgt:

$$(O_{\eta,f})_i := \begin{cases} A_\eta & \text{, falls } i = 0 \\ A_{f(i)} & \text{, falls } i \in \eta - \{0\} \\ R & \text{, sonst} \end{cases}$$

und $O_{\eta,f} := \prod_{i \in \mu} (O_{\eta,f})_i$.
$\Rightarrow O_{\eta,f}$ ist offen in R_κ^μ, da $|\eta| < \kappa$

Zeige: $\mathfrak{O} := \left\{O_{\eta,f}; \eta \in \kappa \ \& \ f \in \mu^{\eta - \{0\}}\right\}$ ist eine Menge aus paarweise disjunkten offenen Mengen in R_κ^μ.

Fall 1: $\eta \neq \nu$

$\Rightarrow O_{\eta,f} \cap O_{\nu,g} = (O_{\eta,f})_0 \cap (O_{\eta,f})_0 = A_\nu \cap A_\eta = \emptyset$

Fall 2: $\eta = \mu$

$\Rightarrow f \neq g$

Sei also $i \in \eta = \nu$ mit $f(i) \neq g(i)$.

$\Rightarrow O_{\eta,f} \cap O_{\eta,g} = (O_{\eta,f})_i \cap (O_{\nu,g})_i = A_{f(i)} \cap A_{f(i)} = \emptyset$

$\Rightarrow d\left(R_\kappa^\mu\right) \geq |\mathfrak{O}| \geq \bigcup_{\eta \in \kappa} \left|\mu^{\eta - \{0\}}\right| = \bigcup_{\eta \in \kappa} |\mu^\eta| = \mu^{<\kappa} = \mu^+$ mit [Fe1] 18.7 ii)

Für R_λ^μ zeigt man völlig analog $d\left(R_\lambda^\mu\right) \geq \mu^{<\lambda}$ und mit [Fe1] 18.7 iii) ist $\mu^{<\lambda} = \mu$.

$\Rightarrow d\left(R_\lambda^\mu\right) = \mu^{<\lambda} = \mu \neq \mu^+ = \mu^{<\kappa} = d\left(R_\kappa^\mu\right)$

R_λ^μ und R_κ^μ können also nicht homöomorph sein. □

Bemerkung 3.2.4 *Mit GCH folgt aus* $\aleph_0 \leq \lambda < cf(\mu) < \kappa \leq \mu$ *sofort die zweite Bedingung* $\mu^{<\lambda} = \mu < \mu^+ = \mu^{<\kappa}$.

Satz 3.2.5 *Seien* λ *und* κ *unendliche Kardinalzahlen mit* $\kappa^{<\lambda} = \kappa < \kappa^+ = \kappa^{<\kappa}$ *und sei* R *ein topologischer Raum mit* $z(R_\kappa^\kappa) = d(R_\kappa^\kappa) = \kappa$*, in dem eine zellulare Familie der Mächtigkeit* κ *existiert. Dann gilt:*

$$(R_\kappa^\kappa)_\lambda^\kappa \ncong (R_\kappa^\kappa)_\kappa^\kappa.$$

Beweis. Das folgt sofort aus Satz 3.2.3. $\square$

Korollar 3.2.6 *In $ZSF + AC + IP$:*
Seien $\lambda, \kappa \in \mathbb{K}$ mit $\aleph_0 \leq \lambda < cf(\kappa) < \kappa$ und $\kappa^{<\lambda} = 2^{<\kappa} = \kappa < \kappa^+ = \kappa^{<\kappa}$ und sei $D = \{0; 1\}$ der diskrete zweielementige Raum.
Dann gilt:

$$(D^\kappa_\kappa)^\kappa_\lambda \ncong (D^\kappa_\kappa)^\kappa_\kappa .$$

Beweis. Da κ nicht regulär ist und somit eine Limeskardinalzahl sein muss, gilt $log(\kappa) = \kappa$ (siehe 2.1.8) und nach Satz 3.1.8 auch $\kappa \leq d\left(D^\kappa_\kappa\right) \leq \kappa^{<\kappa}$.
Definiere eine in D^κ_κ dichte Menge X der Mächtigkeit κ:

Für alle $\theta \in \kappa$, $f \in 2^\theta$ setze:
$x_f := \prod_{i\in\kappa} (x_f)_i \in D^\kappa_\kappa$ mit $(x_f)_i := \begin{cases} f(i) & \text{, falls } i \in \theta \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$

und definiere $X := \left\{x_f;\ \text{es gibt ein } \theta \in \kappa\ \&\ f \in 2^\theta\right\}$.

Sei $B = \prod_{i\in\kappa} B_i$ ein Element der kanonischen Basis von D^κ_κ.
Da $|supp(B)| < \kappa$ gibt es eine Ordinalzahl $\theta \in \kappa$ mit $B_i = D$ für alle $i \notin \theta$, $i \in \kappa$.

Wähle die Funktion $f \in 2^\theta$ mit $f(i) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } \{1\} = B_i \\ 0 & \text{, falls } 0 \in B_i \end{cases}$

$\Rightarrow x_f \in B$
$\Rightarrow X \cap B \neq \emptyset$
Also ist X eine in D^κ_κ dichte Menge mit $|X| \leq \left|\left\{f; \theta \in \kappa\ \&\ f \in 2^\theta\right\}\right| \leq 2^{<\kappa}$
Da $2^{<\kappa} = \kappa$ gilt, haben wir also $\kappa \leq d\left(D^\kappa_\kappa\right) \leq \kappa$.

Wir zeigen nun $z(D^\kappa_\kappa) = \kappa$:
Definiere für alle $\eta \in \kappa$ Mengen O_η mit:

$$(O_\eta)_i = \begin{cases} \{0\} & \text{, falls } i \in \eta \\ \{1\} & \text{, falls } i = \eta \\ D & \text{, sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow |supp\,(O_\eta)| = |\eta + 1| = |\eta| < \kappa$.
$\Rightarrow O_\eta$ ist für alle $\eta \in \kappa$ offen in D^κ_κ.
Seien $\eta, \nu \in \kappa$ mit $\eta < \nu$.
$\Rightarrow O_\eta \cap O_\nu = (O_\eta)_\eta \cap (O_\nu)_\eta = \{1\} \cap \{0\} = \emptyset$
$\Rightarrow z(D^\kappa_\kappa) \geq |\{O_\eta; \eta \in \kappa\}| = |\{\eta; \eta \in \kappa\}| = \kappa$

Da wir oben bereits $d(D^\kappa_\kappa) = \kappa$ gezeigt haben und $z(D^\kappa_\kappa) \leq d(D^\kappa_\kappa)$ gilt, muss auch $z(D^\kappa_\kappa) = \kappa$ gelten.

Nach Satz 3.2.3 gilt also:

$$(D^\kappa_\kappa)^\kappa_\lambda \ncong (D^\kappa_\kappa)^\kappa_\kappa.$$

$\square$

Bemerkung 3.2.7 *Verwendet man GCH, so folgt aus $\aleph_0 \leq \lambda < cf(\kappa) < \kappa$ sofort $\kappa^{<\lambda} = \kappa < \kappa^+ = \kappa^{<\kappa}$ und $2^{<\kappa} = \kappa$.*

Satz 3.2.8 *In $ZSF + AC + IP$:*
Sei $D = \{0; 1\}$ der diskrete zweielementige Raum und κ eine unendliche Kardinalzahl mit $cf(\kappa) \neq \kappa$ und $\kappa = 2^{<\kappa} \neq \kappa^{<\kappa} = \kappa^+$.
Dann gilt:

$$D^\kappa_\kappa \ncong (D^\kappa_\kappa)^\kappa_\kappa.$$

Beweis. Da κ nicht regulär ist, muss κ eine Limeskardinalzahl sein und somit gilt $log\,(\kappa) = \kappa$ (siehe 2.1.8).
Wie im Beweis von Satz 3.2.6 gilt $z\,(D^\kappa_\kappa) = d\,(D^\kappa_\kappa) = \kappa$ und wie im Beweis von Satz 3.2.3 gilt hier $d\,((D^\kappa_\kappa)^\kappa_\kappa) \geq \kappa^{<\kappa} > \kappa$.
$\Rightarrow D^\kappa_\kappa \ncong (D^\kappa_\kappa)^\kappa_\kappa$ $\square$

Ist κ jedoch eine reguläre Kardinalzahl, so ist das zweifache κ-Box-Produkt homöomorph zum einfachen κ-Box-Produkt:

Satz 3.2.9 *Seien $\mu, \kappa \in \mathbb{K}$ mit $\aleph_0 \leq \mu \leq \kappa = cf(\kappa)$ und sei $\langle R, \tau\rangle$ ein beliebiger topologischer Raum.*
Es gilt:

$$R^\kappa_\kappa \cong (R^\mu_\kappa)^\kappa_\kappa.$$

Beweis. Da $|\kappa \times \mu| = \kappa$ gilt, gibt es eine Bijektion $f : \kappa \longrightarrow \kappa \times \mu$.
Sei $\psi : R^\kappa \longrightarrow (R^\mu)^\kappa$ mit

$$pr_{(k,m)}(\psi(x)) = pr_i(x)\,, \text{ falls } f(i) = (k,m).$$

Da f eine Bijektion ist, ist ψ eindeutig bestimmt.
Wir zeigen nun, dass ψ ein Homöomorphismus ist.

1. ψ ist injektiv:
   Seien $x \in R^\kappa$ mit $x = \prod_{k\in\kappa} x_k \neq \prod_{k\in\kappa} y_k = y$.
   $\Rightarrow \exists i \in \kappa : x_i \neq y_i$
   $\Rightarrow pr_{f(i)}(\psi(x)) = x_i \neq y_i = pr_{f(i)}(\psi(y))$
   $\Rightarrow \psi(x) \neq \psi(y)$

2. ψ ist surjektiv:
   Sei $y = \prod_{k\in\kappa}\prod_{m\in\mu} y_{k,m} \in (R^\mu)^\kappa$.
   Wähle $x = \prod_{k\in\kappa} x_k \in R^\kappa$ mit $x_i = y_{f(i)}$.
   $\Rightarrow pr_{f(i)}(\psi(x)) = x_i = y_{f(i)}$
   $\Rightarrow \psi(x) = y$

3. ψ ist offen:
   Sei τ_1 das κ-Box-Produkt auf R^κ und τ_2 das κ-Box-Produkt auf $(R^\mu_\kappa)^\kappa$.
   Sei $\mathfrak{B}_1$ die kanonische Basis von τ_1 und $B \in \mathfrak{B}_1$.
   Dann ist $|supp\,(B)| < \kappa$ und es gibt $B_i \in \tau$ mit $B = \prod_{i\in\kappa} B_i$.
   $\Rightarrow |supp\,(\psi(B))| < \kappa$
   Sei $k \in supp\,(\psi(B))$.

   $$\Rightarrow pr_k(\psi(B)) = \prod_{m\in\mu} pr_{(k,m)}(\psi(B)) = \prod_{m\in\mu} B_{f^{-1}((k,m))}$$

   $$\Rightarrow \psi(B) = \prod_{k\in\kappa}\prod_{m\in\mu} B_{f^{-1}((k,m))}$$

   Da $|supp\,(B)| < \kappa$, ist $\prod_{m\in\mu} B_{f^{-1}((k,m))}$ offen in R^μ_κ.
   $\Rightarrow \psi(B) \in \tau_2$

4. ψ ist stetig:
   Sei $B \in \mathfrak{B}_2$, wo $\mathfrak{B}_2$ die kanonische Basis von τ_2 ist, mit
   $B = \prod_{k\in\kappa}\prod_{m\in\mu} B_{k,m}$.
   $\Rightarrow \psi^{-1}(B) = \prod_{i\in\kappa} B_{f(i)}$

Da κ eine reguläre Kardinalzahl ist, $|supp\,(B)| < \kappa$ und $|supp\,(B_k)| < \kappa$ für alle $k \in \kappa$, gilt:

$$|\{(k,m) \in \kappa \times \mu; k \in supp\,(B)\,\&\; m \in supp\,(B_k)\}| < \kappa$$

$\Rightarrow \psi^{-1}(B) \in \tau_1$. □

Bemerkung 3.2.10 *Für reguläre Kardinalzahlen κ folgt daraus sofort:*

$$R^\omega_\omega \cong (R \times R)^\omega_\omega \text{ und } R^\kappa_\kappa \cong (R \times R)^\kappa_\kappa \cong (R^\kappa_\kappa)^\kappa_\kappa\,.$$

Die Bedingung, dass κ eine reguläre Kardinalzahl sein muss, ist in Satz 3.2.9 notwendig denn sonst könnte man wie in Korollar 3.2.8 nicht-homöomorphe Räume konstruieren.

3.3 Existenz von generalisiert unabhängigen Familien

Wanjun Hu hat in seiner Arbeit *Generalized independent families and dense sets of Box-Product spaces* [Hu] unter anderem den Zusammenhang zwischen der Existenz von $(\theta, 1, \lambda)$-generalisiert unabhängigen Familien und der Dichtigkeit eines κ-Box-Produktes untersucht.
Wir werden nun Theorem 3.1.4 auf Hus Ergebnisse anwenden, zuerst benötigen wir aber noch einige Definitionen:

Definition 3.3.1 Sei θ eine beliebige Kardinalzahl, κ eine unendliche Kardinalzahl und A eine beliebige Menge.

1. Eine Familie $\mathfrak{M}$ von Teilmengen von A heißt *κ-unabhängig*, wenn für je zwei disjunkte Teilmengen $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ von $\mathfrak{M}$ mit $|\mathfrak{X}| < \kappa$ und $|\mathfrak{Y}| < \kappa$ stets gilt:

$$\bigcap\{X, X \in \mathfrak{X}\} \cap \bigcap\{A - Y, Y \in \mathfrak{Y}\} \neq \emptyset.$$

2. Eine Familie $\mathfrak{M}$ von Teilmengen von A heißt *(κ, θ)-unabhängig*, wenn für je zwei disjunkte Teilmengen $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ von $\mathfrak{M}$ mit $|\mathfrak{X}| < \kappa$ und $|\mathfrak{Y}| < \kappa$ stets gilt:

$$\left|\bigcap\{X, X \in \mathfrak{X}\} \cap \bigcap\{A - Y, Y \in \mathfrak{Y}\}\right| \geq \theta.$$

Definition 3.3.2 Sei S eine unendlich große Menge, κ, λ und θ Kardinalzahlen mit $\kappa \geq \aleph_0$ und $\mathfrak{I} = \{\mathfrak{I}_\alpha; \alpha \in \tau\}$ eine Familie von Partitionen $\mathfrak{I}_\alpha = \left\{I^\beta_\alpha; \beta \in \lambda_\alpha\right\}$ von S mit $\lambda_\alpha \geq 2$ für alle $\alpha < \tau$.

1. $\mathfrak{I}$ wird eine (κ, θ)-*generalisiert unabhängige Familie* genannt, falls für alle Teilmengen $J \in P_{<\kappa}(\tau)$ und für jede Auswahlfunktion $f : J \to \bigcup_{\alpha \in J} \lambda_\alpha$ mit $f(a) \in \lambda_\alpha$ für alle $\alpha \in J$ gilt:
$$\left|\bigcap \left\{I_\alpha^{f(\alpha)}; \alpha \in J\right\}\right| \geq \theta.$$
Gilt zusätzlich noch $\lambda_\alpha = \lambda$ für alle $\alpha < \tau$, so nennen wir $\mathfrak{I}$ eine $(\kappa, \theta, \lambda)$-*generalisiert unabhängige Familie.*

2. $\mathfrak{I}$ heißt *separiert,* falls es für je zwei unterschiedliche Punkte $x, y \in S$ ein $\alpha \in \tau$ und ein $\beta \in \lambda_\alpha$ gibt mit:
$$x \in I_\alpha^\beta \wedge y \notin I_\alpha^\beta.$$

Wir beobachten folgenden Zusammenhang:

Bemerkung 3.3.3 *Aus jeder $(\kappa, \theta, 2)$-generalisiert unabhängigen Familie kann eine (κ, θ)-unabhängige Familie konstruiert werden.*

Beweis. Sei S eine beliebige Menge und $\mathfrak{I} = \left\{\left\{I_\alpha^0; I_\alpha^1\right\}; \alpha \in \tau\right\}$ eine $(\kappa, \theta, 2)$-generalisiert unabhängigen Familie auf S.
Zeige: $\mathfrak{I}^* := \left\{I_\alpha^0; \alpha \in \tau\right\}$ ist eine (κ, θ)-unabhängige Familie.

Seien $I_0, I_1 \subseteq \mathfrak{I}^*$ beliebig mit $I_0 \cap I_1 = \emptyset$ und $|I_0 \cup I_1| < \kappa$.
Wir definieren $J := \left\{\alpha \in \tau; I_\alpha^0 \in I_0 \cup I_1\right\} \in P_{<\kappa}(\tau)$, $J_0 := \left\{\alpha \in \tau; I_\alpha^0 \in I_0\right\} \in P_{<\kappa}(\tau)$ und $J_1 := \left\{\alpha \in \tau; I_\alpha^0 \in I_1\right\} \in P_{<\kappa}(\tau)$.

Sei $f : J \to \{0; 1\}$ die durch $f(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } \alpha \in J_0 \\ 1 & \text{, falls } \alpha \in J_1 \end{cases}$

eindeutig bestimmte charakteristische Funktion.
$\Rightarrow \bigcap \{A; A \in I_0\} \cap \bigcap \{S - A; A \in I_1\}$
$= \bigcap \left\{I_\alpha^0; \alpha \in J_0\right\} \cap \bigcap \left\{S - I_\alpha^0; \alpha \in J_1\right\}$
$= \bigcap \left\{I_\alpha^0; \alpha \in J_0\right\} \cap \bigcap \left\{I_\alpha^1; \alpha \in J_1\right\}$
$= \bigcap \left\{I_\alpha^{f(\alpha)}; \alpha \in J\right\}$

Da $\mathfrak{I}$ eine $(\kappa, \theta, 2)$-generalisiert unabhängigen Familie auf S ist, gilt:

$$\left|\bigcap \{A; A \in I_0\} \cap \bigcap \{S - A; A \in I_1\}\right| = \left|\bigcap \left\{I_\alpha^{f(\alpha)}; \alpha \in J\right\}\right| \geq \theta.$$
$\mathfrak{I}^*$ ist also eine (κ, θ)-unabhängigen Familie auf S. $\square$

Definition 3.3.4 Seien κ, λ und σ drei Kardinalzahlen mit $\kappa, \sigma \geq \aleph_0$. Sei S eine Menge mit $|S| = \sigma$.
Die Kardinalzahl $i\left(\sigma, \kappa, \lambda\right)$ ist die kleinste Kardinalzahl ι, so dass es auf S keine $(\kappa, 1, \lambda)$-generalisiert unabhängige Familie der Mächtigkeit ι gibt.

Satz 3.3.5 (Theorem 3.2 in [Hu])
Sei S eine Menge und $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ mit $\kappa \geq \aleph_0$.
Dann sind äquivalent:

1. $\mu < i\left(|S|, \kappa, \lambda\right)$

2. *Für jede Familie topologischer Räume $\{X_\alpha; \alpha \in \mu\}$ mit $d(X_\alpha) \leq \lambda$. Es gilt:*

$$d(\Box^{\kappa}_{\alpha \in \mu} X_\alpha) \leq |S|.$$

Beweis. (nach [Hu])
"$\Rightarrow$":
Sei $\mathfrak{I} = \left\{\left\{I_\alpha^\beta; \beta \in \lambda\right\}; \alpha \in \mu\right\}$ eine $(\kappa, 1, \lambda)$-generalisiert unabhängige Familie auf S der Mächtigkeit μ.
Seien o.B.d.A. X_α diskrete Räume der Mächtigkeit λ. Um die Indizierung zu vereinfachen, nehmen wir $X_\alpha = \lambda$ an.

Da $\left\{I_\alpha^\beta; \beta \in \lambda\right\}$ Partitionen sind, können wir für alle $\alpha \in \mu$ die Abbildung $f_\alpha : S \to X_\alpha$ durch die Bedingung

$$f_\alpha(s) = x \iff s \in I_\alpha^x$$

definieren.
Sei $f : S \to \prod_{\alpha \in \mu} X_\alpha$ die Abbildung mit $f(s) = \prod_{\alpha \in \mu} f_\alpha(s)$.
Sei $\emptyset \neq B = \prod_{\alpha \in \mu} B_\alpha \in \mathfrak{B}$ ein Element aus der Basis des κ-Box-Produkts.

Für das Urbild von B_α gilt: $f_\alpha(s) \in B_\alpha \iff \exists x \in B_\alpha : s \in I_\alpha^x$.
$\Rightarrow f_\alpha^{-1}\left(B_\alpha\right) = \bigcup \{I_\alpha^x; x \in B_\alpha\}$
$\Rightarrow f^{-1}(B) = \bigcap \left\{f_\alpha^{-1}\left(B_\alpha\right); \alpha \in \mu\right\} = \bigcap \left\{f_\alpha^{-1}\left(B_\alpha\right); \alpha \in supp(B)\right\}$

Sei $g : supp(B) \to \lambda$ eine beliebige Auswahlfunktion mit $g(\alpha) \in B_\alpha$. Da $|supp(B)| < \kappa$ gilt und $\mathfrak{I}$ eine $(\kappa, 1, \lambda)$-generalisiert unabhängige Familie ist, gilt:
$\left|\bigcap \left\{I_\alpha^{g(\alpha)}; \alpha \in supp(B)\right\}\right| \geq 1.$
$\Rightarrow f^{-1}(B) = \bigcap \left\{f_\alpha^{-1}\left(B_\alpha\right); \alpha \in supp(B)\right\} \supseteq \bigcap \left\{I_\alpha^{g(\alpha)}; \alpha \in supp(B)\right\} \neq \emptyset$

$\Rightarrow f(S) \cap B \neq \emptyset$
$\Rightarrow d(\square^{\kappa}_{\alpha\in\mu} X_\alpha) \leq |f(S)| = |S|$

"$\Leftarrow$":
O.B.d.A. seien X_α jeweils diskrete Räume der Mächtigkeit λ und D eine in $\square^{\kappa}_{\alpha\in\mu} X_\alpha$ dichte Menge mit $|D| = |S|$.
Um die Indizierung zu vereinfachen, nehmen wir $X_\alpha = \lambda$ an.
Definiere für alle $\alpha \in \mu$ und $\beta \in \lambda = X_\alpha$ die Menge

$$I^{\beta}_{\alpha} := D \cap pr^{-1}_{\alpha}(\beta).$$

Da $pr^{-1}_{\alpha}(\beta)$ offen in $\square^{\kappa}_{\alpha\in\mu} X_\alpha$ ist, sind diese I^{β}_{α} nicht leer.
Offensichtlich ist $\mathfrak{I}_\alpha := \left\{I^{\beta}_{\alpha}; \beta \in \lambda\right\}$ eine Partition von D.
Definiere nun $\mathfrak{I} := \{\mathfrak{I}_\alpha; \alpha \in \mu\}$.

Sei $J \in P_{<\kappa}(\mu)$ und $f : J \to \lambda$ eine Auswahlfunktion.
$\Rightarrow \bigcap\left\{I^{f(\alpha)}_{\alpha}; \alpha \in J\right\} = D \cap \bigcap\left\{pr^{-1}_{\alpha}(f(\alpha)); \alpha \in J\right\} \neq \emptyset$, da $|J| < \kappa$ gilt und somit $\bigcap\left\{pr^{-1}_{\alpha}(f(\alpha)); \alpha \in J\right\}$ eine in $\square^{\kappa}_{\alpha\in\mu} X_\alpha$ offenen Menge ist.
$\Rightarrow \left|\bigcap\left\{I^{f(\alpha)}_{\alpha}; \alpha \in J\right\}\right| \geq 1$.

$\mathfrak{I}$ ist also eine $(\kappa, 1, \lambda)$-generalisiert unabhängige Familie der Mächtigkeit μ auf D und da $|D| = |S|$ gilt, gibt es auch auf S eine $(\kappa, 1, \lambda)$-generalisiert unabhängige Familie der Mächtigkeit μ.

$\Rightarrow \mu < i(|S|, \kappa, \lambda)$ $\square$

Nun können wir Theorem 3.1.4 anwenden und erhalten folgende Aussage:

Satz 3.3.6 *Seien κ und μ zwei unendliche Kardinalzahlen.*
Auf jeder Menge, die mindestens $\mu^{<\kappa}$ viele Elemente hat, gibt es eine 2^{μ}-mächtige $(\kappa, 1, \mu)$-generalisiert unabhängige Familie.

Beweis. Für jede Familie $\{X_\alpha; \alpha \in 2^{\mu}\}$ topologischer Räume mit $d(X_\alpha) \leq \mu$ gilt nach Theorem 3.1.4 dann $d\left(\square^{\kappa}_{\alpha\in 2^{\mu}} X_\alpha\right) \leq \mu^{<\kappa}$.

Nach Satz 3.3.5 gilt $2^\mu < i\left(\mu^{<\kappa}, \kappa, \mu\right)$. Auf einer Menge S mit $|S| = \mu^{<\kappa}$ existiert also eine $(\kappa, 1, \mu)$-generalisiert unabhängige Familie der Mächtigkeit 2^μ. □

Definition 3.3.7 Seien A und B zwei beliebige Mengen und κ eine unendliche Kardinalzahl.
Eine Familie $\mathfrak{F} \subseteq B^A$ von Funktionen heißt *eine Familie von κ-großer Oszillation*, falls für alle $\lambda < \kappa$ alle Teilfamilien $\{f_\zeta\}_{\zeta\in\lambda} \subseteq \mathfrak{F}$ verschiedener Funktionen und alle beliebigen Elemente $\{b_\zeta\}_{\zeta\in\lambda}$ aus B ein $a \in A$ existiert mit:

$$\forall \zeta \in \lambda : f_\zeta(a) = b_\zeta.$$

Satz 3.3.8 (Theorem 3.3 in [Hu])
Sei κ eine unendliche Kardinalzahl und S eine unendliche Menge.
Dann sind äquivalent:

1. *Auf S gibt es eine $(\kappa, 1, |S|)$-generalisiert unabhängige Familie der Mächtigkeit $2^{|S|}$.*
2. $|S|^{<\kappa} = |S|$

Beweis. (siehe [Hu])
"$\Rightarrow$":
Es gilt $i\left(|S|, \kappa, |S|\right) = \left(2^{|S|}\right)^+$.
Sei $\sigma := |S|$, $S = \{s_\beta; \beta \in \sigma\}$ eine Indizierung von S und $\mathfrak{I} = \{\mathfrak{I}_\alpha; \alpha \in 2^\sigma\}$ eine $(\kappa, 1, \sigma)$-generalisiert unabhängige Familie von Partitionen $\mathfrak{I}_\alpha = \left\{I_\alpha^\beta; \beta \in \sigma\right\}$.

Für alle $\alpha \in 2^\sigma$ sei $f_\alpha : S \to S$ die Abbildung mit $f_\alpha(x) = s_\beta \iff x \in I_\alpha^\beta$.
Wir definieren $\mathfrak{F} := \{f_\alpha; \alpha \in 2^\sigma\}$ und zeigen, dass dies eine Familie von κ-großer Oszillation ist.

Für ein beliebiges $J \in P_{<\kappa}(\sigma)$ ist $\{f_\alpha; \alpha \in J\} \in P_{<\kappa}(\mathfrak{F})$ eine Auswahl von verschiedenen Funktionen und $\{x_\alpha; \alpha \in J\} \in P_{<\kappa}(S)$ eine Auswahl von verschiedenen Elementen aus S.
Für die Bijektion $\varphi : S \to \sigma$ mit $\varphi(x_\alpha) = \beta \iff x_\alpha = s_\beta$ gilt $f_\alpha^{-1}(x_\alpha) = I_\alpha^{\varphi(x_\alpha)}$.
Da $g : J \to \sigma$ mit $g(\alpha) := \varphi(x_\alpha)$ eine Auswahlfunktion ist, gilt:

$$\bigcap \left\{f_\alpha^{-1}\left(x_\alpha\right); \alpha \in J\right\} = \bigcap \left\{I_\alpha^{\varphi(x_\alpha)}; \alpha \in J\right\} = \bigcap \left\{I_\alpha^{g(\alpha)}; \alpha \in J\right\} \neq \emptyset.$$

Also ist $\mathfrak{F} = \left\{f_\alpha; \alpha \in 2^{|S|}\right\}$ eine Familie von κ-großer Oszillation.

Nach Theorem 3.1 in [CoNe] ist die Existenz einer Familie von κ-großer Oszillation der Mächtigkeit $2^{|S|}$ äquivalent mit $|S|^{<\kappa} = |S|$.

"$\Leftarrow$":
Nach Theorem 3.1 in [CoNe] existiert eine Familie $\mathfrak{F} = \left\{f_\alpha; \alpha \in 2^{|S|}\right\} \subseteq S^S$ von κ-großer Oszillation der Mächtigkeit $2^{|S|}$.

Sei $|S| = \sigma$ und $S = \{s_\beta; \beta \in \sigma\}$ eine Indizierung von S.
Definiere $I_\alpha^\beta := f_\alpha^{-1}(s_\beta)$ für alle $\alpha \in 2^\sigma$, $\beta \in \sigma$ und $\mathfrak{I} := \left\{\left\{I_\alpha^\beta; \beta \in \sigma\right\}; \alpha \in 2^\sigma\right\}$.
Offensichtlich sind $\mathfrak{I}_\alpha := \left\{I_\alpha^\beta; \beta \in \sigma\right\}$ Partitionen für alle $\alpha \in 2^\sigma$.
Sei $J \in P_{<\kappa}(\sigma)$ und $g : J \to \sigma$ eine Auswahlfunktion.

Da $\mathfrak{F}$ eine Familie von κ-großer Oszillation ist, gibt es ein $s^* \in S$ mit:

$$\forall \alpha \in J : f_\alpha(s^*) = s_{g(\alpha)}$$

$\Rightarrow \left|\bigcap\left\{I_\alpha^{g(\alpha)}; \alpha \in J\right\}\right| = \left|\bigcap\left\{f_\alpha^{-1}\left(s_{g(\alpha)}\right); \alpha \in J\right\}\right| \supseteq |\{s^*\}| = 1$
$\mathfrak{I}$ ist also eine $2^{|S|}$-mächtige $(\kappa, 1, |S|)$-generalisiert unabhängige Familie.
$\Rightarrow i(|S|, \kappa, |S|) \geq \left(2^{|S|}\right)^+$

Da die Mächtigkeit einer $(\kappa, 1, |S|)$-generalisiert unabhängigen Familie nach oben durch $\left(2^{|S|}\right)^{|S|} = 2^{|S|}$ beschränkt ist, muss $i(|S|, \kappa, |S|) = \left(2^{|S|}\right)^+$ gelten. □

Bemerkung 3.3.9 *Für je zwei unendliche Kardinalzahlen μ und κ gilt:*

$$\mu^{<\kappa} = \mu \Rightarrow i\left(\mu^{<\kappa}, \kappa, \mu\right) = (2^\mu)^+.$$

Die Umkehrung gilt nicht.

Beweis. Für je zwei unendliche Kardinalzahlen mit $\mu^{<\kappa} = \mu$ gilt nach Satz 3.3.8 $i(\mu, \kappa, \mu) = (2^\mu)^+$, also auch $i(\mu^{<\kappa}, \kappa, \mu) = (2^\mu)^+$.

Um zu belegen, dass die Umkehrung nicht allgemein gelten kann, geben wir ein Gegenbeispiel in $ZSF + GCH$ an:

Wähle zwei unendliche Kardinalzahlen μ und κ mit $\mu^+ = \kappa$.
Für jede Familie topologischer Räume $\{X_i; i \in \mu^{++}\}$ mit $d(X_i) \leq \mu$ gilt nach Satz 3.1.8:
$d\left(\square^{\kappa}_{i\in\mu^{++}} X_i\right) \leq (log(\mu^{++}) \cdot \mu)^{<\kappa} = (\mu^+ \cdot \mu)^{<\kappa} = (\mu^+)^{\mu} = \mu^+ = \mu^{\mu} = \mu^{<\kappa}$.

Nach Satz 3.3.5 gilt also $\mu^{++} = (\mu^+)^+ = (2^{\mu})^+ < i(\mu^{<\kappa}, \kappa, \mu)$. □

Wie eng generalisiert unabhängige Mengen und die Dichtigkeit des κ-Box-Produkts miteinander verbunden ist, zeigt folgendes Korollar, ein Sonderfall von Theorem 3.1.4:

Korollar 3.3.10 *Seien μ und κ unendliche Kardinalzahlen und $\square^{\kappa}_{i\in I} X_i$ ein κ-Box-Produkt mit $|I| \leq 2^{\mu}$ und $d(X_i) \leq \mu$ für alle $i \in I$.*
Wenn $\mu^{<\kappa} = \mu$ gilt, dann ist auch $d(\square^{\kappa}_{i\in I} X_i) \leq \mu$.

Beweis. Da $\mu^{<\kappa} = \mu$ gilt, ist $i(\mu, \kappa, \mu) = (2^{\mu})^+$ nach Satz 3.3.8.
Nach Satz 3.3.5 ist also $d(\square^{\kappa}_{i\in I} X_i) \leq \mu$. □

4 Auflösbarkeit des κ-Box-Produkts

4.1 Produkte maximal-auflösbarer Räume

Wir werden in diesem Abschnitt die Auflösbarkeit des κ-Box-Produkts untersuchen und der Frage nachgehen, ob maximale Auflösbarkeit der einzelnen Räume auch auf das Produkt vererbt wird.
Für das Tychonow-Produkt wurde dies bereits von J. G. Ceder und T. Pearson in [CePe] unternommen und wir werden hier ihre Vorgehensweise auf das κ-Box-Produkt übertragen.

Definition 4.1.1 Sei $\langle X;\tau\rangle$ ein topologischer Raum. Wir definieren

$$\triangle(\langle X;\tau\rangle) := min\,\{|O|\,;\emptyset \neq O \in \tau\}$$

und nennen $\triangle(\langle X;\tau\rangle)$ den *Dispersions*[1]*-Charakter von X bezüglich τ*. Falls klar ist, welche Topologie gemeint ist, schreiben wir $\triangle(X)$ statt $\triangle(\langle X;\tau\rangle)$.

Definition 4.1.2 Sei $\langle X;\tau\rangle$ ein topologischer Raum und κ eine beliebige Kardinalzahl.

1. Wir nennen X einen *κ-auflösbaren Raum*, falls eine κ-mächtige Partition $\mathfrak{A}$ von X existiert, so dass alle $A \in \mathfrak{A}$ dicht in X liegen. Wir sagen auch, dass X den *Auflösbarkeitsgrad* κ besitzt.
   Ein 2-auflösbarer Raum wird auch *auflösbar* genannt.

2. Wir nennen X einen *maximal-auflösbaren Raum*, falls X ein $\triangle(X)$-auflösbarer Raum ist oder isolierte Punkte besitzt (d.h. es gibt ein $p \in X$ mit $\{p\} \in \tau$).

Der Begriff eines maximal-auflösbaren Raumes wurde 1964 von J. G. Ceder in [Ce] eingeführt. In dieser Arbeit untersuchte J. G. Ceder, unter welchen Umständen ein topologischer Raum möglichst viele paarweise disjunkte und dichte Teilmengen besitzt, also möglichst hoch auflösbar ist. Die Bestimmung des maximalen Auflösbarkeitsgrades

[1] lat. *dispergere*: vereinzeln, zerstreuen

ist ein Problem, auf das bereits E. Hewitt in [He1] hingewiesen hat.
Natürlich ist der Auflösbarkeitsgrad nach oben durch den Dispersions-Charakter beschränkt. Ein $\triangle(X)$-auflösbarer Raum X wird deshalb maximal-auflösbar genannt.

Bemerkung 4.1.3 *Aus der Definition folgt sofort:*

1. *Für zwei Kardinalzahlen κ und λ mit $\kappa < \lambda$ ist natürlich jeder λ-auflösbare Raum auch automatisch κ-auflösbar.*

2. *Jede offene und nicht leere Teilmenge eines κ-auflösbaren Raumes ist wieder κ-auflösbar.*

Im Zusammenhang mit dem Begriff der Auflösbarkeit erinnern wir uns an die Definition des Baire-Raumes:

Definition 4.1.4 Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$.

1. A heißt *nirgends-dicht*, falls A in keiner nicht-leeren offenen Teilmenge von X dicht liegt.

2. A nennen wir *mager* (oder *von erster Kategorie*), falls es abzählbar viele nirgends-dichte Mengen D_i gibt mit $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} D_i$.

3. A ist *von zweiter Kategorie*, falls A nicht von erster Kategorie ist.

4. Wir nennen X einen *Baire-Raum*, falls jede nicht-leere offene Menge von zweiter Kategorie ist.

Die Definition der nirgends-dichten Mengen geht auf H. Hankel zurück. Er sprach in seiner 1870 erschienenen Arbeit *Untersuchungen über die unendlich oft oscillierenden und unstetigen Functionen* von *zerstreut liegenden Punktescharen.*
1899 führte R. Baire die Kategorien und die Definition des später nach ihm benannten Raumes in seiner berühmten Dissertation *Sur les fonctions de variables réelles* ein.

Anhand der Definitionen stellt sich nun die Frage, ob die Begriffe des Baire-Räumes und der auflösbaren Räume in Abhängigkeit stehen. Basierend auf der Arbeit [KST] von K. Kunen, A. Szymański und F. Tall konnte O. Pavlov in [Pa] folgenden Satz beweisen:

Satz 4.1.5 *(Theorem 3.16 in [Pa])*
In $ZSF + V = L$ ist jeder Baire-Raum ohne isolierte Punkte ein $\aleph_0$-auflösbarer Raum.

$V = L$ ist hierfür notwendig, denn K. Kunen, A. Szymański und F. Tall konnten mit Hilfe von messbaren Kardinalzahlen das Gegenteil beweisen:

Satz 4.1.6 *(Corollary 3.6 in [KST])*
Ist ZSF konsistent mit der Existenz einer messbaren Kardinalzahl, dann ist ZSF auch konsistent mit der Existenz eines nicht auflösbaren Baire-Raumes ohne isolierte Punkte.

Wir wenden uns nun aber wieder den Produkten zu. Wir wollen beweisen, dass sich die maximale Auflösbarkeit der Grundräume auf das κ-Box-Produkt vererbt. Dazu ist einiges an Vorarbeit notwendig:

Satz 4.1.7 *Seien $\kappa, \mu \in \mathbb{K}$ mit $\aleph_0 \leq \kappa \leq \mu$ und $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\mu}$ eine Familie topologischer Räume mit $|X_\alpha| \geq 2$ für alle $\alpha \in \mu$.*
Gilt für alle $A \in P_{<\kappa}(\mu)$

$$\left|\prod_{\alpha\in A} X_\alpha\right| \leq \triangle\left(\square^\kappa_{\alpha\in\mu} X_\alpha\right) \leq \left|\prod_{\alpha\in(\mu-A)} X_\alpha\right|,$$

dann ist $\square^\kappa_{\alpha\in\mu} X_\alpha$ maximal-auflösbar.

Beweis. (Verallgemeinerung von [CePe])
Sei $\mathfrak{B}$ die kanonische Basis von $\square^\kappa_{\alpha\in\mu} X_\alpha$. Wir definieren $\nu := \triangle\left(\square^\kappa_{\alpha\in\mu} X_\alpha\right)$.
Für jedes Basiselement $B \in \mathfrak{B}$ gilt $|B| \geq 2^\mu$, also $\nu \geq 2^\mu$.
Mit der Voraussetzung $\left|\prod_{\alpha\in A} X_\alpha\right| \leq \nu$ gilt auch $sup\left\{\left|\prod_{\alpha\in A} X_\alpha\right|; A \in P_{<\kappa}(\mu)\right\} \leq \nu$.

Für $\mathfrak{A} := \bigcup\{\prod X_{\alpha\in B}; B \in P_{<\kappa}(\mu)\}$ gilt damit

$$|\mathfrak{A}| \leq |P_{<\kappa}(\mu)| \cdot sup\left\{\left|\prod_{\alpha\in B} X_\alpha\right|; B \in P_{<\kappa}(\mu)\right\} \leq \mu^{<\kappa}\cdot\nu \leq \mu^\mu\cdot\nu = 2^\mu\cdot\nu = \nu$$

Da $|\mathfrak{A}\times\nu\times\nu| = \nu$ können wir $W := \mathfrak{A}\times\nu\times\nu$ zu $W = \{w_\alpha\}_{\alpha\in\nu}$ ordnen.

Wir definieren nun die gesuchte Partition durch Induktion über ν:

Sei $\beta \in \nu$ und f_γ bereits für alle $\gamma < \beta$ gewählt.
Für $w_\beta = \langle A, \phi, \psi\rangle$ sei $A = (x_{\alpha_i})_{i\in I} \in \mathfrak{A}$ mit $\{\alpha_i; i \in I\} \in P_{<\kappa}(\mu)$.

Definiere $C_A := \left\{x \in \prod_{\alpha\in\mu} X_\alpha; pr_{\alpha_i}(x) = x_{\alpha_i} \text{ für alle } \alpha_i \in A\right\}$
Da nach Voraussetzung $\nu \leq \left|\prod_{\alpha\in\mu-A} X_\alpha\right|$ ist, ist auch $\nu \leq |C_A|$.

$\Rightarrow C_A - \{f_\gamma; \gamma \in \beta\} \neq \emptyset$
Wähle nun ein beliebiges $f_\beta \in C_A - \{f_\gamma; \gamma \in \beta\}$.

Mit Hilfe dieser f_β definieren wir für alle $\beta \in \nu$ die Menge

$$B_\alpha := \{f_\beta;\ \text{es gibt ein } A \in \mathfrak{A} \text{ und ein } \gamma \in \nu \text{ mit } w_\beta = \langle A, \alpha, \gamma \rangle\}$$

und werden nun beweisen, dass $\{B_\alpha; \alpha \in \nu\}$ eine Partition mit den geforderten Eigenschaften ist.

Sei $f_\beta \in B_{\alpha_1} \cap B_{\alpha_2}$. Dann muss nach Definition $\langle A_1, \alpha_1, \gamma_1 \rangle = w_\beta = \langle A_2, \alpha_2, \gamma_2 \rangle$ gelten und somit ist $\alpha_1 = \alpha_2$. Die gewählten B_α sind also paarweise disjunkt.

Sollte $\bigcup_{\alpha \in \nu} B_\alpha \neq \prod_{\alpha \in \mu} X_\alpha$ gelten, erweitern wir B_0 zu $B_0^* := B_0 \cup \Big(\prod_{\alpha \in \mu} X_\alpha - \bigcup_{\alpha \in \nu} B_\alpha\Big)$. (Bei $\{B_\alpha; \alpha \in \nu\}$ handelt es sich also nun um eine Partition von $\prod_{\alpha \in \mu} X_\alpha$ der Mächtigkeit ν.)

So wie W definiert wurde, gilt $|B_\alpha \cap C_A| = \nu$ für alle $\alpha \in \nu$ und alle $A \in \mathfrak{A}$.
Für jedes Basiselement B der kanonischen Basis gilt $supp(B) \in P_{<\kappa}(\mu)$ und somit gibt es ein $A \in \mathfrak{A}$ mit $A \in pr_{supp(B)}(B)$, also gilt $C_A \subseteq B$.
$\Rightarrow |B_\alpha \cap B| \geq |B_\alpha \cap C_A| \geq \nu$
$\{B_\alpha; \alpha \in \nu\}$ erfüllt also die geforderten Eigenschaften und $\square^\kappa_{\alpha \in \mu} X_\alpha$ ist somit maximal-auflösbar. $\square$

Korollar 4.1.8 *Seien $\kappa, \mu \in \mathbb{K}$ mit $\aleph_0 \leq \kappa \leq \mu$.*
Für jede Familie $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \mu}$ von T_1-Räumen mit $|X_\lambda| \geq 2$ ist $\square^\kappa_{\lambda \in \mu} X_\lambda$ mindestens 2^μ-auflösbar.
Gilt zusätzlich noch $\triangle\left(\square^\kappa_{\lambda \in \mu} X_\lambda\right) \leq 2^\mu$, so ist $\square^\kappa_{\lambda \in \mu} X_\lambda$ sogar maximal-auflösbar.

Beweis. (Verallgemeinerung von [TaVi])
Für den Raum $\{0;1\}$ versehen mit der diskreten Topologie gilt für alle $A \in P_{<\kappa}(\mu)$:

$$\left|\prod_{\alpha \in A} \{0;1\}\right| = 2^{|A|} \leq 2^\mu = \triangle\left(\square^\kappa_{\alpha \in \mu} \{0;1\}\right) = \left|\prod_{\alpha \in (\mu - A)} \{0;1\}\right|.$$

Nach Satz 4.1.7 ist also $\square^\kappa_{\alpha \in \mu} \{0;1\}$ maximal-auflösbar, d.h. 2^μ-auflösbar.
Da die Grundräume X_λ ebenfalls T_1-Räume sind, kann $\square^\kappa_{\alpha \in \mu} X_\alpha$ als Union von Kopien

des maximal-auflösbaren Raums $\square^{\kappa}_{\alpha\in\mu}\{0;1\}$ geschrieben werde.

Mit Theorem 3.8 in [TaVi] ist somit $\square^{\kappa}_{\lambda\in\mu}X_\lambda$ mindestens 2^μ-auflösbar. $\square$

Proposition 4.1.9 *Seien $\mu,\kappa\in\mathbb{K}$ mit $\mu\geq\kappa\geq\aleph_0$ und $\square^{\kappa}_{\alpha\in\mu}X_\alpha$ ein κ-Box-Produkt aus maximal-auflösbaren Räumen. Gilt*

1. $\triangle\left(\square^{\kappa}_{\alpha\in\mu}X_\alpha\right)\leq\left|\prod_{\alpha\in\mu}\triangle\left(X_\alpha\right)\right|$ *oder*
2. $\triangle\left(\square^{\kappa}_{\alpha\in\mu}X_\alpha\right)\geq\left|\prod_{\alpha\in A}X_\alpha\right|$ *für alle $A\in P_{<\kappa}(\mu)$,*

dann ist auch $\square^{\kappa}_{\alpha\in\mu}X_\alpha$ maximal-auflösbar.

Beweis. (Verallgemeinerung von [CePe])
Sei $\nu:=\triangle\left(\square^{\kappa}_{\alpha\in\mu}X_\alpha\right)$.

1. Es muss also $\nu=\left|\prod_{\alpha\in\mu}\triangle\left(X_\alpha\right)\right|$ gelten, denn $\nu<\left|\prod_{\alpha\in\mu}\triangle\left(X_\alpha\right)\right|$ ist nicht möglich. Für alle $\alpha\in\mu$ sei $\left\{A^\alpha_\beta;\beta\in\triangle(X_\alpha)\right\}$ eine Partition von X_α aus dichten Mengen. Für jede Funktion $f:\mu\longrightarrow\prod_{\alpha\in\mu}\triangle\left(X_\alpha\right)$ mit $f(\alpha)\in\triangle\left(X_\alpha\right)$ definieren wir $A_f:=\prod_{\alpha\in\mu}A^\alpha_{f(\alpha)}$ und zeigen, dass es sich bei
$$\mathfrak{A}:=\left\{A_f;f:\mu\longrightarrow\prod_{\alpha\in\mu}\triangle\left(X_\alpha\right)\ \text{mit}\ f(\alpha)\in\triangle\left(X_\alpha\right)\right\}$$
um die gesuchte Partition handelt.

   Seien $f,g:\mu\longrightarrow\prod_{\alpha\in\mu}\triangle\left(X_\alpha\right)$ mit $f(\alpha)\in\triangle\left(X_\alpha\right)$ und $g(\alpha)\in\triangle\left(X_\alpha\right)$ zwei verschiedene Funktionen. Sei $\alpha\in\mu$ mit $f(\alpha)\neq g(\alpha)$.
   $\Rightarrow A^\alpha_{f(\alpha)}\cap A^\alpha_{g(\alpha)}=\emptyset$
   $\Rightarrow A_f\cap A_g=\emptyset$, die Elemente aus $\mathfrak{A}$ sind also paarweise disjunkt.

   Sei A_f ein beliebiges Element aus $\mathfrak{A}$ und B ein Element der kanonischen Basis von $\square^{\kappa}_{\alpha\in\mu}X_\alpha$ mit $B\neq\emptyset$.
   Dann ist $pr_\alpha(B)$ offen in X_α für alle $\alpha\in\mu$.
   $\Rightarrow pr_\alpha(B)\cap A^\alpha_{f(\alpha)}\neq\emptyset$ für alle $\alpha\in\mu$
   $\Rightarrow B\cap A_f\neq\emptyset$

Ist $\bigcup \mathfrak{A} \neq \prod_{\alpha\in\mu} X_\alpha$ erweitern wir einfach irgendein A_f zu $A_f \cup \left(\bigcup \mathfrak{A} - \prod_{\alpha\in\mu} X_\alpha\right)$.
$\mathfrak{A}$ ist also die gesuchte Partition.

2. Für alle $A \in P_{<\kappa}(\mu)$ gelte $\nu \geq \left|\prod_{\alpha\in A} X_\alpha\right|$.
Gilt für alle $A \in P_{<\kappa}(\mu)$ auch $\nu \leq \left|\prod_{\alpha\in(\mu-A)} X_\alpha\right|$, so gilt nach Satz 4.1.7 bereits die Behauptung.

Sei also $A \in P_{<\kappa}(\mu)$ mit $\nu > \left|\prod_{\alpha\in(\mu-A)} X_\alpha\right|$ und B ein Element der kanonischen Basis von $\square^\kappa_{\alpha\in\mu} X_\alpha$ mit $|B| = \nu$.
$\Rightarrow A^* := A \cup supp(B) \in P_{<\kappa}(\mu)$

Wähle für alle $\alpha \in \mu$ eine offene Menge $B^*_\alpha \subseteq X_\alpha$ mit $|B^*_\alpha| = \triangle(X_\alpha)$ und wähle die offene Menge $B^* \in \square^\kappa_{\alpha\in\mu} X_\alpha$ mit $pr_\alpha(B^*) = B^*_\alpha$ für alle $\alpha \in A^*$ und $B^*_\alpha = X_\alpha$ für alle $\alpha \notin A^*$.

$\Rightarrow |B^*| \leq |B| = \nu$, also $|B^*| = \nu$.
$\Rightarrow \nu = \left|\prod_{\alpha\in A^*} \triangle(X_\alpha)\right| \cdot \left|\prod_{\alpha\in(\mu-A^*)} X_\alpha\right|$

Da $\nu > \left|\prod_{\alpha\in(\mu-A)} X_\alpha\right| \geq \left|\prod_{\alpha\in(\mu-A^*)} X_\alpha\right|$, muss $\nu = \left|\prod_{\alpha\in A^*} \triangle(X_\alpha)\right|$ gelten.

Nach 1. ist $\square^\kappa_{\alpha\in A^*} X_\alpha$ dann bereits maximal-auflösbar.
Sei $\{A_\alpha; \alpha \in \nu\}$ die gesuchte Partition von $\square^\kappa_{\alpha\in A^*} X_\alpha$.

Dann ist $\left\{A_\alpha \times \prod_{\beta\in(\mu-A^*)} X_\beta; \alpha \in \nu\right\}$ die entsprechende Partition von $\square^\kappa_{\alpha\in A^*} X_\alpha$ und $\square^\kappa_{\alpha\in A^*} X_\alpha$ ist maximal-auflösbar. $\square$

Proposition 4.1.10 *Seien κ, μ und ν unendliche Kardinalzahlen mit $\kappa \leq \mu$ und $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in\mu}$ eine Familie von Kardinalzahlen.*
Ist $sup\{\lambda_\alpha; \alpha \in (\mu - A)\} \geq \nu$ für alle $A \in P_{<\kappa}(\mu)$, so ist $\left|\prod_{\alpha\in\mu} \lambda_\alpha\right| \geq \nu^\kappa$.

Beweis. Nach Lemma 4 aus [CePe] ist $\left|\prod_{\alpha\in\kappa} \lambda_\alpha\right| \geq \nu^\kappa$ für die Teilfamilie $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in\kappa}$.
$\Rightarrow \left|\prod_{\alpha\in\mu} \lambda_\alpha\right| \geq \left|\prod_{\alpha\in\kappa} \lambda_\alpha\right| \geq \nu^\kappa$. $\square$

Satz 4.1.11 *Seien $\kappa, \mu \in \mathbb{K}$ mit $\aleph_0 \leq \kappa \leq \mu$. Für jede Familie $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\mu}$ maximal-auflösbarer Räume ist auch $\square^\kappa_{\alpha\in\mu} X_\alpha$ maximal-auflösbar.*

Beweis. (Verallgemeinerung von [CePe])
Angenommen, $\square^{\kappa}_{\alpha\in\mu}X_\alpha$ wäre nicht maximal-auflösbar.

1. Beh.: Für alle $B \in P_{<\kappa}(\mu)$ gibt es ein $D \in P_{<\kappa}(\mu - B)$ mit

$$\clubsuit : \qquad \left|\prod_{\alpha\in(\mu-B)} \triangle(X_\alpha)\right| < \triangle\left(\square^{\kappa}_{\alpha\in(\mu-B)}X_\alpha\right) < \left|\prod_{\alpha\in D} X_\alpha\right|.$$

Bew.: Wenn es nicht gelten würde, wäre nach Proposition 4.1.9 das Produkt $\square^{\kappa}_{\alpha\in\mu-B}X_\alpha$ für ein $B \in P_{<\kappa}(\mu)$ maximal-auflösbar.
Da für dieses $B \in P_{<\kappa}(\mu)$ auch $\triangle(\square^{\kappa}_{\alpha\in B}X_\alpha) = \left|\prod_{\alpha\in B}\triangle(X_\alpha)\right|$ gilt, ist nach Proposition 4.1.9 auch $\square^{\kappa}_{\alpha\in B}X_\alpha$ maximal-auflösbar.
Somit ist $\square^{\kappa}_{\alpha\in\kappa}X_\alpha = \square^{\kappa}_{\alpha\in\mu-B}X_\alpha \times \square^{\kappa}_{\alpha\in B}X_\alpha$ maximal-auflösbar, ein Widerspruch.

Für alle $B \in P_{<\kappa}(\mu)$ gibt es also $D \in P_{<\kappa}(\mu - B)$, für welche die Ungleichung $\clubsuit$ erfüllt ist. Für $B = \emptyset$ folgt also, dass es ein $A_0 \in P_{<\kappa}(\mu)$ geben muss mit:

$$\spadesuit : \qquad \left|\prod_{\alpha\in\mu} \triangle(X_\alpha)\right| < \triangle\left(\square^{\kappa}_{\alpha\in\mu}X_\alpha\right) < \left|\prod_{\alpha\in A_0} X_\alpha\right|.$$

2. Beh.: Es gibt eine Menge M_1 mit $(\mu - M_1) \in P_{<\kappa}(\mu)$ mit

$$sup\{|X_\alpha|\,;\alpha\in M_1\} < sup\{|X_\alpha|\,;\alpha\in A_0\}.$$

Bew.: Sei $\nu_0 := sup\{|X_\alpha|\,;\alpha\in A_0\}$.

Angenommen, für alle $A \in P_{<\kappa}(\mu)$ wäre $sup\{|X_\alpha|\,;\alpha\in(\mu - A)\} \geq \nu_0$.
Sei nun B ein Element der kanonischen Basis von $\square^{\kappa}_{\alpha\in\mu}X_\alpha$ mit $|B| = \triangle\left(\square^{\kappa}_{\alpha\in\mu}X_\alpha\right)$ und definiere $C := supp(B) \in P_{<\kappa}(\mu)$.

$$\Rightarrow \triangle\left(\square^{\kappa}_{\alpha\in\mu}X_\alpha\right) = |B| = \left|\prod_{\alpha\in C}\triangle(X_\alpha)\right| \cdot \left|\prod_{\alpha\in\mu-C} X_\alpha\right|$$

Da auch $C \in P_{<\kappa}(\mu)$ gilt, muss auch $sup\{|X_\alpha|\,;\alpha\in(\mu - C)\} \geq \nu_0$ gelten.
Mit Proposition 4.1.10 folgt dann $\prod_{\alpha\in\mu-C}|X_\alpha| \geq \nu_0^\kappa$.
$\Rightarrow \triangle\left(\square^{\kappa}_{\alpha\in\mu}X_\alpha\right) = \left|\prod_{\alpha\in C}\triangle(X_\alpha)\right| \cdot \left|\prod_{\alpha\in\mu-C} X_\alpha\right| \geq \left|\prod_{\alpha\in\mu-C} X_\alpha\right| \geq \nu_0^\kappa$

Mit $\spadesuit$ gilt aber $\triangle\left(\square^{\kappa}_{\alpha\in\mu}X_\alpha\right) < \left|\prod_{\alpha\in A_0} X_\alpha\right| \leq \nu_0^{|A_0|} \leq \nu_0^\kappa$, ein Widerspruch.

Sei also $M_1 \subseteq \mu$ mit $(\mu - M_1) \in P_{<\kappa}(\mu)$ und $sup\{|X_\alpha|; \alpha \in M_1\} < sup\{|X_\alpha|; \alpha \in A_0\} = \nu_0$.

Für $B := \mu - M_1$ wählen wir ein $A_1 \in P_{<\kappa}(\mu - B) = P_{<\kappa}(M_1)$, welches die Gleichung ♣ erfüllt.

Wir definieren $\nu_1 := sup\{|X_\alpha|; \alpha \in A_1\}$. Es gilt dann $\nu_1 \leq sup\{|X_\alpha|; \alpha \in M_1\} \lneqq \nu_0$. Wie oben in der 2. Beh. bewiesen gibt es ein M_2 mit $(\mu - M_2) \in P_{<\kappa}(M_1)$ mit

$$sup\{|X_\alpha|; \alpha \in M_2\} < sup\{|X_\alpha|; \alpha \in A_1\}.$$

Wir können dies einfach induktiv fortsetzen, definieren $M_0 := \mu$ und erhalten so die Folgen:

1. $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $M_{n+1} \subseteq M_n$ und $(M_n - M_{n+1}) \in P_{<\kappa}(M_n)$,
2. $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $A_n \in P_{<\kappa}(M_n)$ und
3. $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\nu_n := sup\{|X_\alpha|; \alpha \in A_n\}$ und $\nu_{n+1} < \nu_n$.

$\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist also eine unendliche Folge von strikt kleiner werdenden Kardinalzahlen, ein Widerspruch.

Also muss $\square^\kappa_{\alpha\in\mu} X_\alpha$ maximal-auflösbar sein. $\square$

Wir haben also gesehen, dass κ-Box-Produkte von maximal-auflösbaren Räumen auch maximal-auflösbar sind. Für das Produkt von diskreten Räumen konnten wir ebenfalls eine hohe Auflösbarkeit beweisen (siehe 4.1.8), die sich natürlich auch auf jede offene und nicht leere Teilmenge vererbt. Doch wie sieht es mit anderen Teilmengen aus?

Satz 4.1.12 *Sei $\lambda \geq \kappa$ und X eine dichte Teilmenge von $\square^\kappa_I D(\lambda)$ mit $|I| \geq \kappa$ wo $D(\lambda)$ ein λ-mächtiger diskreter Raum ist.*
Ist X κ-auflösbar, so ist X auch λ-auflösbar.

Mit Korollar 4.1.8 wissen wir, dass $\square^\kappa_I D(\lambda)$ mindestens $2^{|I|}$-auflösbar ist. Somit ist jede offene und nicht-leere Teilmenge ebenfalls $2^{|I|}$-auflösbar. Über dichte Teilmengen konnten wir aber noch keine Aussage treffen.

W. W. Comfort und W. Hu haben diesen Satz für das Tychonow-Produkt in [CoHu1] bewiesen und wir können dem Beweisaufbau für die verallgemeinerte Version folgen:

Vorbemerkung. Warum wird $\triangle(X) \geq \lambda$ nicht vorausgesetzt, obwohl das doch notwendig für die λ-Auflösbarkeit von X ist?
Angenommen, es gibt eine in $\Box_I^\kappa D(\lambda)$ offene Menge mit $\triangle(X) = |O \cap X| < \lambda$. Wir können davon ausgehen, dass O ein Basiselement ist. Da $|I| \geq \kappa$ ist $|O| \geq \lambda$ und somit gibt es für ein $i \in I$ ein Element $y_i \in D(\lambda)$ mit $y_i \notin pr_i(O \cap X)$ aber $y_i \in pr_i(O)$.
$\Rightarrow pr_i^{-1}(y_i) \cap O$ ist offen in $\Box_I^\kappa D(\lambda)$ aber $X \cap pr_i^{-1}(y_i) \cap O = \emptyset$, im Widerspruch zur Dichtigkeit von X.

Die Voraussetzung $\triangle(X) \geq \lambda$ damit X überhaupt λ-auflösbar sein kann, muss also nicht zusätzlich gefordert werden.

Beweis. Gilt sogar $|I|^{<\kappa} \leq \lambda$, so gilt $w(X) \leq |I|^{<\kappa} \cdot \lambda = \lambda \leq \triangle(X)$ und mit Theorem 3 in [Ce] ist X somit maximal-auflösbar. Da $\triangle(X) \geq \lambda$ erfüllt ist, besitzt X keine isolierten Punkte, ist also $\triangle(X)$-auflösbar, also insbesondere auch λ-auflösbar. Für den Beweis der Auflösbarkeit benötigen wir in diesem Fall also nicht das κ-Box-Produkt.

Wir können die λ-Auflösbarkeit aber auch für alle anderen Indexmengen mit $|I| \geq \kappa$ beweisen.Um die Notation zu erleichtern nehmen wir $D(\lambda) = \lambda$ und $\kappa \subseteq I$ an.
Sei $\mathfrak{D} = \{D_\eta\}_{\eta<\kappa}$ eine Familie paarweise disjunkter und in X dichten Mengen.
Für alle $\nu \in \kappa \subseteq I$ und $\eta \in \lambda$ setzen wir

$$E_{(\nu,\eta)} := \{x \in X; \mu \in \nu \Rightarrow pr_\mu(x) \neq \nu = pr_\nu(x)\}.$$

Da $D(\lambda)$ ein diskreter Raum ist, sind diese Mengen offen und $D_\eta \cap E_{(\nu,\eta)} \neq \emptyset$.
Wir definieren $E_\eta := \bigcup_{\nu\in\kappa} \left(E_{(\nu,\eta)} \cap D_\eta\right)$ für alle $\eta \in \lambda$.

Beh. $\mathfrak{E} := \{E_\eta\}_{\eta\in\lambda}$ ist eine Familie paarweise disjunkter und dichter Teilmengen.

1. paarweise disjunkt:

   Seien η, η' mit $E_\eta \cap E_{\eta'} \neq \emptyset$.
   $\Rightarrow$ es gibt ν, ν' mit $\left(E_{(\nu,\eta)} \cap D_\eta\right) \cap \left(E_{(\nu',\eta')} \cap D_{\eta'}\right) \neq \emptyset$
   $\Rightarrow D_\eta \cap D_{\eta'} \neq \emptyset$
   $\Rightarrow \eta = \eta'$

2. dicht in X:

   Für jede Teilmenge $J \in P_{<\kappa}(I)$ und jede Funktion $f : J \to \lambda$ definieren wir die Menge $B_{(J,f)} := X \cap \bigcap_{j \in J} pr_j^{-1}(f(j))$.
   Dann ist $\mathfrak{B} := \left\{B_{(J,f)}; J \in P_{<\kappa}(I) \text{ und } f : J \to \lambda\right\}$ eine Basis der Topologie auf X, es reicht also zu zeigen, dass jedes Element aus $\mathfrak{B}$ alle Elemente aus $\mathfrak{E}$ schneidet.

   Sei nun $J \in P_{<\kappa}(I)$, $f : J \to \lambda$ und $\eta \in \lambda$.
   Wir wollen nun zeigen, dass $B_{(J,f)} \cap E_\eta \neq \emptyset$ gilt.
   Da $\kappa \subseteq I$ können wir folgende Ordinalzahl definieren $\mu := min\,\{\nu \in \kappa; \nu \notin J\}$.
   Wir können annehmen, dass $\mu \subseteq J$ gilt. Sonst betrachten wir $J' := J \cup \mu$ und $f' : J' \to \lambda$ mit $f'_{|J} = f$ und $f'(j) = 0$ für alle $j \in \mu$.
   Dann ist $B_{(J',f')} \subseteq B_{(J,f)}$ und mit $B_{(J',f')} \cap E_\eta \neq \emptyset$ würde auch $B_{(J,f)} \cap E_\eta \neq \emptyset$ folgen.

   1. Fall: Es gibt ein $j \in \mu \subseteq J$ mit $f(j) = \eta$

      Wähle $\nu := min\,\{j \in \mu; f(j) = \eta\}$.
      Also gilt $f(j) \neq \eta$ für alle $j < \nu$.

      $$\begin{aligned}\Rightarrow E_{(\nu,\eta)} &= \{x \in X; \forall j \in \nu : pr_j(x) \neq \eta = f(\nu) = pr_\nu(x)\} \\ &\supseteq X \cap \textstyle\bigcap_{j \in J} pr_j^{-1}(f(j)) = B_{(J,f)}\end{aligned}$$

      $\Rightarrow B_{(J,f)} \subseteq E_{(\nu,\eta)}$
      $\Rightarrow \emptyset \neq B_{(J,f)} \cap E_{(\nu,\eta)}$ ist eine offene Menge
      $\Rightarrow B_{(J,f)} \cap E_{(\nu,\eta)} \cap D_\eta \neq \emptyset$
      $\Rightarrow B_{(J,f)} \cap E_\eta \neq \emptyset$

   2. Fall: Es gibt kein $j \in \mu$ mit $f(j) = \eta$

      Da $\mu \notin J$ gilt, können wir $J' := J \cup \{\mu\}$ und $f' : J' \to \lambda$ mit $f'_{|J} = f$ und $f(\mu) = \eta$ betrachten und wie im ersten Fall verfahren.

Insgesamt ist also $\mathfrak{E}$ eine λ-mächtige Familie paarweise disjunkter und dichter Teilmengen von X, der Raum X ist also tatsächlich λ-auflösbar. □

4.2 Ein Exkurs über $\aleph_0$-auflösbare, fast-auflösbare und fast-$\aleph_0$-auflösbare Räume

Nachdem wir im vorherigen Abschnitt die κ-Auflösbarkeit der Produkte behandelt haben, werden wir nun verschiedene Typen von Auflösbarkeit betrachten und untersuchen. Besonders interessiert uns, wann sich die unten aufgeführten Typen von Auflösbarkeit überhaupt unterscheiden können. Dazu benötigen wir allerdings keine Produkt-Topologie; dieser Abschnitt ist also ein kleiner Exkurs außerhalb der Theorie des κ-Box-Produkts.

Definition 4.2.1 Wir nennen einen topologischen Raum $\langle X, \tau \rangle$ *fast-auflösbar*, wenn es eine Familie $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gibt mit $inn(X_n) = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$.
Dieser Begriff wurde 1973 von R. Bolstein in [Bol] eingeführt.

Wir erkennen sofort, dass jeder auflösbare Raum und erst recht jeder $\aleph_0$-auflösbare Raum automatisch auch fast-auflösbar ist, denn die Mengen aus den entsprechenden Partitionen erfüllen die oben geforderten Bedingungen (siehe S. 38).

Definition 4.2.2 Für eine unendliche Kardinalzahl κ wird ein topologischer Raum $\langle X, \tau \rangle$ *fast-κ-auflösbar* genannt, wenn es eine Familie $\{X_\mu\}_{\mu\in\kappa}$ paarweise disjunkter Mengen gibt mit

$$X = \bigcup_{\mu\in\kappa} X_\mu \text{ und } \forall A \in \tau - \{\emptyset\} : |\{\mu \in \kappa; A \cap X_\mu \neq \emptyset\}| = \kappa.$$

Dieser Typ von Auflösbarkeit wurde 2002 von A. Tamariz-Mascarúa und H. Villegas-Rodríguez in [TaVi] als Verallgemeinerung des Begriffes der κ-Auflösbarkeit eingeführt.

Wir erkennen sofort einen direkten Zusammenhang mit dem schon bekannten Begriff der Auflösbarkeit, denn jeder κ-auflösbare Raum für eine unendliche Kardinalzahl κ muss auch fast-κ-auflösbar sein.

Um den Zusammenhang mit den anderen bereits beschriebenen Begriffen leichter zu verstehen, benötigen wir folgenden Satz:

Satz 4.2.3 *Sei κ eine reguläre Kardinalzahl.*
Ein topologischer Raum X ist genau dann fast-κ-auflösbar, wenn es eine Familie $\{X_\mu\}_{\mu\in\kappa}$ gibt mit $inn(X_\mu) = \emptyset$ für alle $\mu \in \kappa$, $X = \bigcup_{\mu\in\kappa} X_\mu$ und

$$\forall \mu, \nu \in \kappa : \mu < \nu \Rightarrow X_\mu \subset X_\nu.$$

Beweis. Dieser Satz wurde in [TaVi] als Theorem 2.2 nur für fast-$\aleph_0$-auflösbare Räume bewiesen. Für reguläre Kardinalzahlen verfahren wir ähnlich:

1. Sei $\langle X, \tau \rangle$ ein nach Definition 4.2.2 fast-κ-auflösbarer Raum und $\{X_\mu\}_{\mu \in \kappa}$ eine Familie paarweise disjunkter Mengen mit

   $$X = \bigcup_{\mu \in \kappa} X_\mu \text{ und } \forall A \in \tau - \{\emptyset\} : |\{\mu \in \kappa; A \cap X_\mu \neq \emptyset\}| = \kappa.$$

   Dann muss $inn(X_\mu) = \emptyset$ für alle $\mu \in \kappa$ gelten, denn sonst gibt es ein $\mu_0 \in \kappa$ mit $inn(X_{\mu_0}) \in \tau - \emptyset$, welches mit allen anderen X_μ leeren Schnitt hat.

   Für $Y_\mu := \bigcup_{\nu \in \mu} X_\nu$ gilt ebenfalls $inn(Y_\mu) = \emptyset$.

   Denn sonst müsste $X_\lambda \cap Y_\mu \neq \emptyset$ für κ viele X_λ gelten. Da $\mu \in \kappa$ also müsste es ein $\nu > \mu$ mit $X_\lambda \cap Y_\mu \neq \emptyset$ geben, die Mengen X_μ wären also nicht disjunkt, ein Widerspruch.

   Für die Familie $\mathfrak{Y} := \{Y_\mu\}_{\mu \in \kappa}$ gilt $Y_\mu \subseteq Y_\nu$ für alle $\mu < \nu$.
   Wir können aber zur Teilfamilie $\mathfrak{Y}^*$ aller echt größer werdenden Mengen übergehen.
   Es gilt $|\mathfrak{Y}^*| = \kappa$, denn sonst wäre $|\{\mu \in \kappa; X_\mu \neq \emptyset\}| < \kappa$.

   Somit erfüllt $\mathfrak{Y}^*$ die geforderten Bedingungen.

2. Sei $\mathfrak{Y} = \{Y_\mu\}_{\mu \in \kappa}$ eine Familie mit $Y_\mu \subset Y_\nu$ für alle $\mu < \nu$, $inn(Y_\mu) = \emptyset$ und $X = \bigcup \mathfrak{Y}$.

   Definiere $X_0 := Y_0$ und $X_\mu := Y_\mu - \bigcup_{\nu \in \mu} Y_\nu$ für alle $\mu \in \kappa$.

   $\Rightarrow \bigcup_{\mu \in \kappa} X_\mu = \bigcup_{\mu \in \kappa} Y_\mu = X$ und $X_\nu \cap X_\mu = \emptyset$ für alle $\nu \neq \mu$.

   Sei A eine nicht leere Menge, die offen in X liegt.

   Angenommen, es gilt $|\{\mu \in \kappa; X_\mu \cap A \neq \emptyset\}| < \kappa$.
   Dann muss es ein $\mu_0 \in \kappa$ geben mit $X_\nu \cap A = \emptyset$ für alle $\mu_0 < \nu \in \kappa$ (hier benötigen wir die Regularität von κ).
   Da $X = \bigcup_{\mu \in \kappa} X_\mu$ gilt, muss $A \subseteq \bigcup_{\nu \in \mu_0} X_\nu = \bigcup_{\nu \in \mu_0} \left(Y_\nu - \bigcup_{\lambda \in \nu} Y_\lambda\right) \subseteq Y_{\mu_0}$ gelten und somit ist $\emptyset \neq A \subseteq inn(Y_{\mu_0})$, ein Widerspruch.

   Die Familie $\{X_\mu\}_{\mu \in \kappa}$ belegt, dass X fast-κ-auflösbar ist. □

Bemerkung 4.2.4 *Im Beweis von Satz 4.2.3 wurde die Regularität nur im zweiten Teil benötigt. Mit Definition 4.2.1 erkennen wir, das also für jede unendliche Kardinalzahl* κ

jeder fast-κ-auflösbare Raum auch fast-auflösbar sein muss.
Wir erhalten also folgendes Diaagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & \text{fast-}\kappa\text{-auflösbar} \arrow[dr, Rightarrow, "(2)"] & \\
\kappa\text{-auflösbar} \arrow[ur, Rightarrow, "(1)"] \arrow[dr, Rightarrow, "(3)"'] & & \text{fast-auflösbar} \\
 & \text{auflösbar} \arrow[ur, Rightarrow, "(4)"'] &
\end{tikzcd}$$

Dies erklärt auch die Wahl der Bezeichnung "fast-κ-auflösbar", denn diese Räume liegen zwischen den κ-auflösbaren und fast-auflösbaren Räumen.
Es stellt sich nun die Frage, welche dieser Implikationen (1)-(4) auch umkehrbar sind.
Wegen Korollar 4.1.8 macht es wenig Sinn, κ-Box-Produkte zu betrachten, da bereits T_1-Grundräume ein hoch auflösbares Produkt erzeugen. Um die Umkehrbarkeit zu widerlegen, müssen wir also andere Topologien untersuchen.

Gilt für einen Raum $\triangle(X) < \kappa$, so kann X niemals κ-auflösbar oder fast-κ-auflösbar sein, die Implikationen (2) und (3) können in diesen Räumen nicht umgekehrt werden:

Beispiel 4.2.5 *"n-auflösbar $\not\Rightarrow$ $(n+1)$-auflösbar":*

Sei $X = \mathbb{N}$, $\mathfrak{B}_n = \{[n \cdot k, n \cdot k + (n-1)]; k \in \mathbb{N}\}$ für alle $n \in (\mathbb{N} - \{0\})$ und τ_n die von $\mathfrak{B}_n$ erzeugte Topologie.
Dann sind $D_i^n = \{n \cdot k + i; k \in \mathbb{N}\}$ für $0 \leq i \leq (n-1)$ disjunkte und in $\langle X, \tau_n \rangle$ dichte Mengen, $\langle X, \tau_n \rangle$ ist also n-auflösbar.

Da aber $[0, n-1] \in \tau_n$ kann es aber keine $n+1$ paarweise disjunkte und dichte Mengen geben, $\langle X, \tau_n \rangle$ kann also nicht $(n+1)$-auflösbar sein.

Aus diesem Beispiel folgt sofort mit $\langle X, \tau_2 \rangle$, dass "auflösbar $\not\Rightarrow$ $\aleph_0$-auflösbar" gilt. Somit kann $\langle X, \tau_2 \rangle$ auch nicht κ-auflösbar für eine andere unendliche Kardinalzahl sein, (3) ist also nicht umkehrbar.
Da $\langle X, \tau_2 \rangle$ auflösbar ist, ist dieser Raum auch fast-auflösbar. Wegen $\triangle(X) = 2$ kann der Raum aber nicht fast-κ-auflösbar für eine Kardinalzahl $\kappa > 2$ sein, also ist auch (2) nicht umkehrbar.

Wie bereits erwähnt ist (3) i. A. nicht umkehrbar, allerdings konnte A. Illanes in seiner Arbeit [Il] beweisen, dass jeder Raum, der für alle $n \in \mathbb{N}$ die n-Auflösbarkeit erfüllt, auch $\aleph_0$-auflösbar ist.

Wir werden gleich in ZSF+AC beweisen, dass die Umkehrung von (1), (3) und (4) auch für Räume mit $\triangle(X) = \kappa$ nicht gilt und werden im Anschluss zeigen, dass ZSF+AC alleine nicht ausreichen kann, um die Umkehrung von (2) für Räume mit $\triangle(X) = \kappa$ zu widerlegen.

Wir benötigen dazu folgende Definition:

Definition 4.2.6 Ein topologischer Raum $\langle X, \tau \rangle$ heißt λ-*maximal*, falls $\triangle(\langle X, \tau \rangle) \geq \lambda$ erfüllt ist und für jede Topologie σ mit $\tau \subset \sigma$ gilt:

$$\triangle(\langle X, \sigma \rangle) \geq \lambda.$$

Satz 4.2.7 *Es gibt einen T_1-Raum, der fast-auflösbar aber nicht auflösbar ist.*

Beweis. Sei $X = \mathbb{N}$ und $\sigma = \{A \subseteq \mathbb{N}; |A - \mathbb{N}| < \aleph_0\} \cup \{\emptyset\}$. σ ist offensichtlich eine Topologie auf X, die T_1 erfüllt.
Nun erweitern wir den Raum $\langle X, \sigma \rangle$ zu einem $\aleph_0$-maximalen Raum $\langle X, \tau \rangle$. Da $\sigma \subseteq \tau$ gilt, ist dieser Raum ebenfalls ein T_1-Raum.

Wie in Theorem 24 in [He1] beweisen wir, dass $\langle X, \tau \rangle$ nicht auflösbar ist:

Sei D eine in $\langle X, \tau \rangle$ dichte Menge und wir nehmen an, es gäbe eine offene Menge A mit $0 \neq |A \cap D| = n \in \mathbb{N}$.

Sei $A \cap D = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.
Da X T_1 erfüllt, ist $B := X - \{x_1\}$ eine offene Menge und es gibt für alle $2 \leq i \leq n$ offene Umgebungen A_i mit $x_1 \in A_i$ und $x_i \notin A_i$.
$\Rightarrow C := A \cap \bigcap_{2 \leq i \leq n} A_i$ ist eine offene Menge mit $D \cap C = \{x_1\}$.

Da $\langle X, \tau \rangle$ ein $\aleph_0$-maximaler Raum ist, muss $|C| \geq \aleph_0$ gelten und somit ist $B \cap C$ eine nicht leere und offene Menge.

$\Rightarrow \emptyset \neq D \cap (C \cap B) = (D \cap C) \cap B = \{x_1\} \cap (X - \{x_1\}) = \emptyset$, ein Widerspruch.

Also muss $|D \cap A| \geq \aleph_0$ für alle $A \in (\tau - \{\emptyset\})$ gelten.

Sei $\tau(D) := \tau \cup \{A \cap D; A \in \tau\} \cup \{A \cup (D \cap B); A, B \in \tau\}$ die um D erweiterte Topologie.
Dann gilt noch immer $\triangle(\langle X, \tau(D)\rangle) = \aleph_0$ und da $\langle X, \tau\rangle$ ein $\aleph_0$-maximaler Raum ist, kann $\tau(D)$ keine echte Erweiterung sein.
Es gilt also $\tau = \tau(D)$, jede in $\langle X, \tau\rangle$ dichte Menge ist also auch offen. Es kann also niemals zwei dichte und disjunkte Mengen in geben, $\langle X, \tau\rangle$ ist somit nicht auflösbar.

Da aber $|X| = \aleph_0$ gilt, gibt es eine Aufzählung $X = \{x_i; i \in \mathbb{N}\}$ mit $x_i \neq x_j$ für alle $i \neq j$.

$\Rightarrow X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{x_i\}$ und $inn(\{x_i\}) = \emptyset$ für alle $i \in \mathbb{N}$, X ist also fast-auflösbar.

Somit ist auch (4) nicht umkehrbar. □

Korollar 4.2.8 *Es gibt einen T_1-Raum X mit $\triangle(X) = \aleph_0$, der fast-$\aleph_0$-auflösbar aber nicht auflösbar ist.*

Beweis. Wir betrachten wieder den Raum $\langle X, \tau\rangle$ aus Satz 4.2.7.
X ist ein $\aleph_0$-maximaler Raum, also gilt $\triangle(X) = \aleph_0$.
Sei $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ wieder die Zerlegung von X. Da X ist ein $\aleph_0$-maximaler Raum ist, schneidet jede Menge $A \in \tau - \{\emptyset\}$ in unendlich viele dieser Partitionsmengen, X ist also auch fast-$\aleph_0$-auflösbar.

Da aber der Raum X nicht einmal auflösbar ist, kann er nicht $\aleph_0$-auflösbar sein.

Somit ist also auch (1) nicht einmal für Räume mit abzählbar unendlichem Dispersions-Charakter umkehrbar. □

Bemerkung 4.2.9 *Ein T_0-Raum besitzt genau dann keine isolierten Punkte, wenn sein Dispersions-Charakter unendlich ist.*

Beweis. Sei X ein T_0-Raum ohne isolierte Punkte und A eine offene Menge mit $|A| = n \in \mathbb{N}_{>0}$. Zu je zwei Punkten aus A, muss es eine offene Umgebung geben, die nur einen der beiden Punkte enthält. Wir verfahren induktiv:

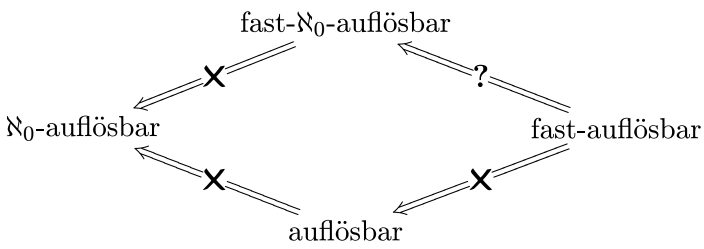
Ist $n = 2$, so gibt es eine Umgebung U, die nur einen Punkt aus A enthält. Dann ist $|U \cap A| = 1$ und X enthält doch isolierte Punkte.
Ist $|A| = n+1$ und sind $x_0, x_1 \in A$ zwei verschiedene Punkte, so muss $A \cap (X - \overline{\{x_i\}}) \neq \emptyset$ für mindestens einen Punkt gelten, denn sonst wäre $\overline{\{x_i\}} \supseteq A$ für $i = 1, 2$, also $\overline{\{x_0\}} = \overline{A} = \overline{\{x_1\}}$, ein Widerspruch zu T_0.
Sei o.B.d.A. x_0 der Punkt mit $B := A \cap (X - \overline{\{x_i\}}) \neq \emptyset$.
Dann ist $1 \leq |B| \leq n$ und wir finden wieder in B isolierte Punkte.

Ein T_0-Raum X hat also genau dann keine isolierten Punkte, wenn $\triangle(X) \geq \aleph_0$ gilt. $\square$

Satz 4.2.10 (Theorem 2.6 in [CoHu2])
Sei $\langle R, \tau \rangle$ ein topologischer Raum, der T_0 und $T_{3\frac{1}{2}}$ erfüllt.
Ist R ein n-auflösbarer Raum für eine natürliche Zahl n, dann gibt es eine Erweiterung $\sigma \supseteq \tau$, für die $\langle R, \sigma \rangle$ ebenfalls n-auflösbar ist, T_0 und $T_{3\frac{1}{2}}$ erfüllt, aber nicht $(n+1)$-auflösbar ist.

Jeder n-auflösbare T_0-Raum besitzt unendlichen Dispersions-Charakter. Falls dieser Raum nicht $(n+1)$-auflösbar ist, kann er nach [Il] nicht $\aleph_0$-auflösbar sein.
W. W. Comfort und Wanjun Hu haben also die Umkehrung von (3) auch für Räume mit unendlichem Dispersions-Charakter widerlegt.

Insgesamt konnten wir bisher auch für Räume mit unendlichem Dispersions-Charakter folgenden Zusammenhang beobachten:



Anhand der Definitionen von fast-$\aleph_0$-auflösbar und fast-auflösbar (S. 48) stellt sich nun die Frage, ob sich diese Eigenschaften überhaupt unterscheiden. Tatsächlich können wir im Axiomen-System ZSF+V=L folgenden Satz beweisen:

Satz 4.2.11 *In ZSF+V=L:*
Jeder T_0-Raum X mit $\triangle(X) \geq \aleph_0$ ist fast-$\aleph_0$-auflösbar.

Beweis. O. Pavlov konnte beweisen (Theorem 3.16 in [Pa]), dass in ZSF+V=L jeder Baire-Raum ohne isolierte Punkte (d.h. $\triangle(X) \geq 2$) $\aleph_0$-auflösbar ist, also insbesondere auch jeder Baire-Raum, der T_0 erfüllt und keine isolierten Punkte besitzt.
Nach J. Angoa, M. Ibarra und A. Tamariz-Mascarúa (Korollar 5.19 in [AIT]) ist dies aber gerade äquivalent dazu, dass jeder T_0-Raum ohne isolierte Punkte fast-$\aleph_0$-auflösbar ist. □

Die Implikation (2) kann also unter $V = L$ umgekehrt werden:

Korollar 4.2.12 *In ZSF+V=L gilt, dass jeder fast-auflösbare T_0-Raum X mit $\triangle(X) \geq \aleph_0$ auch fast-$\aleph_0$-auflösbar.*

Besteht also doch kein Unterschied zwischen fast-auflösbaren und fast-$\aleph_0$-auflösbaren T_0-Räumen ohne isolierte Punkte? Im kleinen, armen Universum $V = L$ gibt es ihn nicht. Setzten wir allerdings die Existenz messbarer Kardinalzahlen voraus - befinden wir uns also in einem sehr reichen Universum - ist dies aber möglich:

Satz 4.2.13 (4.2 in [TaVi])
Gibt es eine messbare Kardinalzahl, so gibt es einen T_0-Raum ohne isolierte Punkte der fast-auflösbar aber nicht fast-$\aleph_0$-auflösbar ist.

Beweis. Ist κ eine messbare Kardinalzahl, so gibt es auf κ einen κ-vollständigen, freien Ultrafilter $\mathfrak{F}$.
Wie in [TaVi] betrachten wir $X = \kappa \cup \{\mathfrak{F}\}$ und definieren

$$\tau := \{A \subseteq X; \mathfrak{F} \in A \text{ und } A \cap X \in \mathfrak{F}\} \cup \{\emptyset\}\,.$$

1. τ ist eine Topologie:

   Wir sehen sofort, dass X, $\emptyset \in \tau$ gilt.
   Ist $\mathfrak{B} \subseteq \tau$ und $B \in \mathfrak{B}$ mit $B \neq \emptyset$, dann ist auch $\mathfrak{F} \in C$ und $C \cap X \in \mathfrak{F}$ für alle

$C \supseteq B$, also auch $\bigcup \mathfrak{B} \in \tau$.
Ist $\mathfrak{B}$ eine endliche Teilmenge und $\emptyset \notin \mathfrak{B}$, dann ist wegen der κ-Vollständigkeit von $\mathfrak{F}$ auch $\bigcap_{B \in \mathfrak{B}} B \cap X \in \mathfrak{F}$, also ist auch $\bigcap \mathfrak{B} \in \tau$.

2. X ist ein T_0-Raum:

   Seien x, y zwei verschiedene Punkte aus X und o.B.d.A. sein $x \neq \mathfrak{F}$.
   Dann ist $x \notin \{\mathfrak{F}\}$, also $x \in \kappa$.
   Da $\mathfrak{F}$ κ-vollständig ist, enthält der Filter keine Mengen, die kleiner als κ-mächtig sind.
   Insbesondere ist $\{x\} \notin \mathfrak{F}$ und somit $\kappa - \{x\} \in \mathfrak{F}$ ($\mathfrak{F}$ ist Ultrafilter auf κ).
   Dann ist $A := (\kappa - \{x\}) \cup \{\mathfrak{F}\}$ eine offene Menge mit $x \notin A$ und da $y \in \kappa$ oder $y = \mathfrak{F}$ gelten muss, ist A auch eine offene Umgebung von y.

3. X ist auflösbar:

   κ und $\{\mathfrak{F}\}$ sind zwei dichte und disjunkte Mengen mit $X = \kappa \cup \mathfrak{F}$.

4. Es gilt $\triangle(X) \geq \kappa$:

   Sei A offen und nicht leer.
   $\Rightarrow A \cap \kappa \in \mathfrak{F}$
   $\Rightarrow |A| \geq |A \cap \kappa| \geq \kappa$, denn sonst wäre $\mathfrak{F}$ nicht κ-vollständig
   $\Rightarrow \triangle(X) \geq \kappa$

5. X ist nicht fast-$\aleph_0$-auflösbar:

   Sei $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$ mit $Y_n \subset Y_{n+1}$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{F} \in Y_{n_0}$.
   Angenommen für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $Y_n \cap \kappa \notin \mathfrak{F}$.
   $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \kappa - (Y_n \cap \kappa) \in \mathfrak{F}$
   $\Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\kappa - (Y_n \cap \kappa)) \in \mathfrak{F}$ (κ-Vollständigkeit)
   $\Rightarrow \emptyset = \kappa - X = \kappa - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n = \kappa - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (Y_n \cap \kappa) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\kappa - (Y_n \cap \kappa)) \in \mathfrak{F}$, ein Widerspruch.

   Also muss es ein $n_1 \in \mathbb{N}$ geben mit $Y_{n_1} \cap \kappa \in \mathfrak{F}$.
   Sei $n_2 := max(n_0, n_1)$.
   $\Rightarrow \mathfrak{F} \in Y_{n_2}$ und $Y_{n_2} \cap \kappa \in \mathfrak{F}$
   $\Rightarrow Y_{n_2} \in \tau$
   $\Rightarrow inn(Y_{n_2}) \neq \emptyset$

   Nach Satz 4.2.3 kann X also nicht fast-$\aleph_0$-auflösbar sein. $\square$

Somit gilt im Axiomensystem $ZSF+AC+$“Es gibt eine messbare Kardinalzahl” folgendes Diagramm auch für Räume mit unendlichem Dispersions-Charakter:

$$\begin{tikzcd}
 & \text{fast-}\aleph_0\text{-auflösbar} \arrow[dl, Rightarrow, "\times" marking] & \\
\aleph_0\text{-auflösbar} & & \text{fast-auflösbar} \arrow[ul, Rightarrow, "\times" marking] \arrow[dl, Rightarrow, "\times" marking] \\
 & \text{auflösbar} \arrow[ul, Rightarrow, "\times" marking] &
\end{tikzcd}$$

Nun stellt sich natürlich die Frage, ob nicht auch die Existenz kleinerer Kardinalzahlen, z.B. die Existenz schwach-kompakter Kardinalzahlen, ausreicht, um einen T_0-Raum mit unendlichem Dispersions-Charakter zu konstruieren, der nicht fast-$\aleph_0$-auflösbar aber doch fast-auflösbar ist.
Diese Frage können wir wie folgt mit ”Nein“ beantworten:

Theorem 4.2.14 *Sei E=”Es gibt eine schwach-kompakte Kardinalzahl“.*
In $ZSF + AC + E$ lässt sich die Existenz eines Raumes mit unendlichem Dispersions-Charakter, der nicht fast-$\aleph_0$-auflösbar ist, nicht beweisen.

Beweis. Angenommen, in $ZSF + AC + E$ kann die Existenz eines solchen Raumes gezeigt werden.

Mit Korollar 5.19 in [AIT] gibt es also auch einen Baire-Raum ohne isolierte Punkte, der nicht fast-$\aleph_0$-auflösbar ist.
Nach R. Jensen gilt $Con(ZSF + AC + E) \longrightarrow Con(ZSF + E + V = L)$, also gibt es auch in $ZSF + V = L$ einen nicht fast-$\aleph_0$-auflösbaren Baire-Raum. Dieser Baire-Raum ist insbesondere nicht $\aleph_0$-auflösbar, im Widerspruch zu 3.16 in [Pa].

Dies bedeutet, dass $ZSF + AC + E$ nicht konsistent ist oder ein solcher Raum nicht existiert.

Da die Inkonsistenz von $ZSF + AC + E$ nicht gezeigt werden kann, kann die Existenz eines solchen Raumes mit $ZSF + AC + E$ alleine nicht bewiesen werden. $\square$

Bemerkung 4.2.15 *Im Beweis von Satz 4.2.14 wird für das Axiom E nur die Verträglichkeit mit $V = L$ benötigt. Der Satz gilt auch für jedes anderer Axiom A mit $Con(ZSF + A) \longrightarrow Con(ZSF + A + V = L)$.*
Damit also ein T_0-Raum ohne isolierte Punkte mit unendlichem Dispersions-Charakter, der nicht fast-$\aleph_0$-auflösbar aber fast-auflösbar ist, überhaupt existieren kann, benötigen wir ein sehr reiches, großes Universum.

5 Weitere Kardinalitätsfunktionen auf dem κ-Box-Produkt

5.1 Zellularität des κ-Box-Produkts

Definition 5.1.1 Sei $\langle X, \tau \rangle$ ein topologischer Raum.

1. Eine Familie paarweise disjunkter und offenen Mengen wird *zellulare Familie* genannt.

2. Wir bezeichnen mit $z(X) = sup\,\{|\mathfrak{M}|\,;\mathfrak{M} \subseteq \tau \textit{ ist eine zellulare Familie}\}$ die *Zellularität* eines topologischen Raumes.

Für jeden topologischen Raum X gilt $z(X) \leq d(X)$.
Da die Zellularität über das Supremum gebildet wird, ist nicht klar, ob es in einem Raum X mit $z(X) = \mu$ überhaupt eine zellulare Familie der Mächtigkeit μ gibt (*sup=max-Problem*).

Da wir bereits die Dichtigkeit für das κ-Box-Produkt abschätzen konnten (siehe 3.1.4), können wir auch für die Zellularität eine Abschätzung angeben indem wir uns teilweise den Beweisen von R. Hodel in [Ho] anschließen:

Satz 5.1.2 *Seien $\mu, \kappa \in \mathbb{K}$ mit $\aleph_0 \leq \kappa \leq \mu$ und sei $\square^{\kappa}_{i\in I} X_i$ ein κ-Box-Produkt.*
Gilt $d(X_i) \leq \mu$ für alle $i \in I$, dann gilt $z(\square^{\kappa}_{i\in I} X_i) \leq \mu^{<\kappa}$.

Bemerkung. Die Behauptung gilt für Räume mit $|I| \leq 2^{\mu}$:
Nach Theorem 3.1.4 ist sogar $d(\square^{\kappa}_{i\in I} X_i) \leq \mu^{<\kappa}$ erfüllt, insbesondere gilt also auch $z(\square^{\kappa}_{i\in I} X_i) \leq \mu^{<\kappa}$.

Anders als bei der Dichtigkeit spielt bei der Abschätzung der Zellularität die Kardinalität der Index-Menge also keine Rolle.

Beweis. (Verallgemeinerung von [Ho])
Angenommen, $z(\square^{\kappa}_{i\in I}X_i) > \mu^{<\kappa}$, also $z(\square^{\kappa}_{i\in I}X_i) \geq (\mu^{<\kappa})^+$.
Sei $\{B_\alpha\}_{\alpha\in(\mu^{<\kappa})^+}$ eine zellulare Familie offener Basiselemente und
$I_\alpha := supp(B_\alpha) \in P_{<\kappa}(I)$ für alle $\alpha \in (\mu^{<\kappa})^+$.
Sei $J := \bigcup_{\alpha\in(\mu^{<\kappa})^+} I_\alpha$.

$\Rightarrow |J| \leq (\mu^{<\kappa})^+ \cdot \kappa = (\mu^{<\kappa})^+$ und für $B^*_\alpha := pr_J(B_\alpha)$ ist auch $\{B^*(\alpha)\}_{\alpha\in(\mu^{<\kappa})^+}$ eine zellulare Familie in $\square^{\kappa}_{j\in J}X_j$, also $z(\square^{\kappa}_{j\in J}X_j) \geq (\mu^{<\kappa})^+$.

Da aber $d(X_i) \leq \mu \leq \mu^{<\kappa}$ und $|J| \leq (\mu^{<\kappa})^+ \leq 2^{(\mu^{<\kappa})}$ ist mit dem Satz von Hewitt-Marczewski-Pondiczery für das κ-Box-Produkt gilt dann $d(\square^{\kappa}_{j\in J}X_j) \leq (\mu^{<\kappa})^{<\kappa}$.

Da $\left(\mu^\lambda\right)^\nu = \mu^{\lambda\cdot\nu} = \mu^\lambda$ für alle $\nu \leq \lambda$ gilt ist auch

$$\left(sup\left\{\mu^\lambda; \lambda < \kappa\right\}\right)^\nu = sup\left\{\mu^\lambda; \lambda < \kappa\right\} = \mu^{<\kappa}$$

für alle $\nu < \kappa$.
$\Rightarrow (\mu^{<\kappa})^{<\kappa} = sup\left\{\left(sup\left\{\mu^\lambda; \lambda < \kappa\right\}\right)^\nu; \nu < \kappa\right\} = sup\left\{sup\left\{\mu^\lambda; \lambda < \kappa\right\}; \nu < \kappa\right\} = \mu^{<\kappa}$

Also gilt $d(\square^{\kappa}_{j\in J}X_j) \leq \left(\mu^{<\kappa}\right)^{<\kappa} = \mu^{<\kappa}$ im Widerspruch zu $z(\square^{\kappa}_{j\in J}X_j) \geq (\mu^{<\kappa})^+$. $\square$

Proposition 5.1.3 *Seien κ, μ mit $\aleph_0 \leq \kappa \leq \mu$ und sei $\square^{\kappa}_{i\in I}X_i$ ein κ-Box-Produkt. Gilt $z(\square^{\kappa}_{i\in J}X_i) \leq \mu$ für alle $J \in P_{<\kappa}(I)$, dann gilt auch $z(\square^{\kappa}_{i\in I}X_i) \leq \mu^{<\kappa}$.*

Beweis. (Verallgemeinerung von [Ho])
Angenommen, es gilt $z(\square^{\kappa}_{i\in I}X_i) > \mu^{<\kappa}$. Dann sei $\{B_\alpha\}_{\alpha\in(\mu^{<\kappa})^+}$ eine zellulare Familie von Basiselementen.
Definiere wieder $I_\alpha := supp(B_\alpha) \in P_{<\kappa}(I)$ für alle $\alpha \in (\mu^{<\kappa})^+$.

Für die reguläre Kardinalzahl $(\mu^{<\kappa})^+$ gilt:
Sei $\delta < (\mu^{<\kappa})^+$ und $\gamma < \kappa$
$\Rightarrow \delta \leq \mu^{<\kappa}$ und $\gamma < \kappa$
$\Rightarrow \delta^\gamma \leq (\mu^{<\kappa})^\gamma \leq \left(\mu^{<\kappa}\right)^{<\kappa} = \mu^{<\kappa} < \left(\mu^{<\kappa}\right)^+$

Da mit $\mu \geq \kappa$ auch $(\mu^{<\kappa})^+ \geq \kappa$ erfüllt ist, können wir also das Δ-System-Lemma für reguläre Kardinalzahlen von Erdős-Rado 2.1.19 auf $\mathfrak{I} := \left\{I_\alpha; \alpha \in (\mu^{<\kappa})^+\right\} \subseteq P_{<\kappa}(I)$

anwenden und erhalten so eine Teilmenge $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{I}$ mit $|\mathfrak{J}| = (\mu^{<\kappa})^+$ und eine Indexmange $J \in P_{<\kappa}(I)$ mit:

$$\forall X, Y \in \mathfrak{J} : X \neq Y \Rightarrow X \cap Y = J$$

1. Fall: $J = \emptyset$

   Dann gibt es aber $\alpha, \beta \in (\mu^{<\kappa})^+$ mit $\alpha \neq \beta$ und $I_\alpha \cap I_\beta = \emptyset$.
   $\Rightarrow B_\alpha \cap B_\beta \neq \emptyset$, da sich die Träger nicht schneiden, im Widerspruch zur paarweisen Disjunktheit von $\{B_\alpha\}_{\alpha \in (\mu^{<\kappa})^+}$

2. Fall: $J \neq \emptyset$

   Dann ist $\{pr_j(B_\alpha)\}_{\alpha \in (\mu^{<\kappa})^+}$ immer noch eine zellulare Familie auf $\Box^\kappa_{j \in J} X_j$ im Widerspruch zu $z(\Box^\kappa_{j \in J} X_j) \leq \mu$. $\Box$

Nun können wir die Zellularität eines κ-Box-Produkts nur mit Hilfe der Zellularität der Grundräume abschätzen wie es bereits D. Kurepa 1962 in [Ku] für das Tychonoff-Produkt getan hat:

Theorem 5.1.4 *Seien κ, μ mit $\aleph_0 \leq \kappa \leq \mu$ und sei $\Box^\kappa_{i \in I} X_i$ ein κ-Box-Produkt mit $z(X_i) \leq \mu$ für alle $i \in I$.*
Dann gilt

$$z\left(\Box^\kappa_{i \in I} X_i\right) \leq 2^{(\mu^{<\kappa})}.$$

Beweis. (Verallgemeinerung des Beweises aus [Ho])
Es reicht aus, für Indexmengen I mit $|I| < \kappa$ zu beweisen, dass $z\left(\Box^\kappa_{i \in I} X_i\right) \leq 2^{(\mu^{<\kappa})}$ gilt.

Denn dann gilt auch für jede größere Indexmengen J nach Proposition 5.1.3
$z\left(\Box^\kappa_{i \in J} X_i\right) \leq \left(2^{(\mu^{<\kappa})}\right)^{<\kappa}$ und somit auch:

$$\begin{aligned} z\left(\Box^\kappa_{i \in J} X_i\right) &\leq \left(2^{(\mu^{<\kappa})}\right)^{<\kappa} = sup\left\{\left(2^{(\mu^{<\kappa})}\right)^{\nu}; \nu < \kappa\right\} = sup\left\{2^{(\mu^{<\kappa})\cdot\nu}; \nu < \kappa\right\} \\ &= sup\left\{2^{(\mu^{<\kappa})}; \nu < \kappa\right\} = 2^{(\mu^{<\kappa})}, \text{ da } \mu^{<\kappa} \geq \nu \text{ für alle } \nu < \kappa \text{ ist.} \end{aligned}$$

Sei also $|I| < \kappa$ und wir nehmen an, dass es eine zellulare Familie $\mathfrak{Z} = \{B_\alpha\}_{\alpha \in (2^{(\mu^{<\kappa})})^+}$ von Basiselementen gibt.

Wir definieren $P_0 = \emptyset$ und für alle $i \in I$ sei

$$P_i := \{\{B_\alpha; B_\beta\}; pr_i(B_\alpha) \cap pr_i(B_\beta) = \emptyset\} - \bigcup_{j \leq i} P_j \subseteq P_2(\mathfrak{Z}).$$

Da $\mathfrak{Z}$ aus paarweise disjunkten Basiselementen besteht, gilt

$$P_2(\mathfrak{Z}) = \bigcup_{i \in I} P_i.$$

Nach Erdős (siehe 2.1.16) gilt

$$\left(2^{(\mu^{<\kappa})}\right)^+ \longrightarrow \left((\mu^{<\kappa})^+\right)^2_{\mu^{<\kappa}}.$$

Es gibt also zu jeder $\mu^{<\kappa}$-mächtigen Zerlegung von $P_2(\mathfrak{Z})$ eine $(\mu^{<\kappa})^+$-mächtige homogene Teilmenge.

Da wir aber nur eine maximal $|I|$-mächtige Zerlegung mit $|I| < \kappa$ haben, gibt es auch hier ein $i \in I$ und ein $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{Z}$ mit $|\mathfrak{Y}| = (\mu^{<\kappa})^+$ und $P_2(\mathfrak{Y}) \subseteq P_i$.

Für diese $B_\alpha, B_\beta \in \mathfrak{Y}$ mit $B_\alpha \neq B_\beta$ gilt also $pr_i(B_\alpha) \cap pr_i(B_\beta) = \emptyset$.

$\Rightarrow z(X_i) \geq (\mu^{<\kappa})^+ > \mu^{<\kappa} \geq \mu$, im Widerspruch zu den Voraussetzungen. □

Bemerkung 5.1.5 *Diese Abschätzung gilt auch für Räume mit $z(X_i) \leq \mu^{<\kappa}$, denn dann ist*

$$z(\Box^{\kappa}_{i \in I} X_i) \leq 2^{\left((\mu^{<\kappa})^{<\kappa}\right)} = 2^{(\mu^{<\kappa})}.$$

5.2 Kompaktheitsgrad des κ-Box-Produkts

Um verschieden Grade der Kompaktheit untersuchen zu können, benötigen wir folgenden Begriff:

Definition 5.2.1 Ein topologischer Raum X ist *vom Kompaktheitsgrad κ* für eine Kardinalzahl κ, falls für jede offene Überdeckung $\mathfrak{O}$ eine Teilüberdeckung $\mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{U}$ mit $|\mathfrak{V}| < \kappa$ gibt. Wir nennen X dann auch einfach κ-kompakt.

Bemerkung 5.2.2 *Ein topologischer Raum vom Kompaktheitsgrad $\aleph_0$ ist ein kompakter Raum.*
Statt dem Begriff des Kompaktheitsgrades wird in der Literatur oft der Begriff des Lindelöff-Grades verwendet, der analog eingeführt und in der Regel mit $L(X)$ bezeichnet wird. Die Definitionen sind allerdings nicht einheitlich und oft wird mit $L(X) = \kappa$ ein κ^+-kompakter Raum gemeint (siehe z.B. [Ho], [Ju]). Um Verwechslungen zu vermeiden, benutzen wir deshalb nur den Begriff des Kompaktheitsgrades.

Wie im ersten Kapitel erwähnt wurde, stieß das Box-Produkt und somit auch das κ-Box-Produkt auf Ablehnung, da es die Kompaktheit der Grundräume nicht erhielt:

Beispiel 5.2.3 *Sei $D = \{0,1\}$ der diskrete, zweielementige Raum.*
D ist ein kompakter Raum und somit ist auch $\square^{\aleph_0}_{ß\in\mu} D$ kompakt für jede beliebige Kardinalzahl μ (siehe Theorem 5.2.8).

Ist dann auch der feinere Raum $\square^{\aleph_1}_{\aleph_0} D$, also das volle Box-Produkt, kompakt?

Angenommen, die Kompaktheit würde sich auch auf diesen Raum vererben.
Sei $\mathfrak{F} = \{f : \aleph_0 \longrightarrow \{0,1\}\}$ die Menge aller Funktionen von $\aleph_0$ nach D und für alle $f \in \mathfrak{F}$ sei p_f der Punkt mit $pr_i(p_f) = f(i)$ für alle $i \in \aleph_0$.
Dann ist $\{p_f\}$ offen in $\square^{\aleph_1}_{\aleph_0} D$ und da $\mathfrak{F}$ alle Funktionen enthält ist $\{\{p_f\}\,; f \in \mathfrak{F}\}$ eine offene Überdeckung von $\square^{\aleph_1}_{\aleph_0} D$.
Es muss also eine endliche Teilüberdeckung $\{\{p_f\}\,; f \in \mathfrak{G}\}$ mit $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}$ geben.
Somit ist $2^{\aleph_0} = \left|\square^{\aleph_1}_{\aleph_0} D\right| = \left|\bigcup_{f\in\mathfrak{G}} \{p_f\}\right| = |\mathfrak{G}| < \aleph_0$, ein Widerspruch.

Ein höherer Kompaktheitsgrad wird allerdings auch nicht ohne weiteres auf ein Tychonow-Produkt vererbt, nicht einmal auf das Produkt von nur zwei Räumen.
So ist zum Beispiel die Sorgenfrey-Linie $\mathfrak{S}$ (die reellen Zahlen versehen mit der Topologie der halb-offenen Intervalle) ein $\aleph_1$-kompakter Raum, $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$ ist aber bereits nur noch $2^{\aleph_1}$-kompakt. Die $\aleph_1$-Kompaktheit kann also nicht auf das Tychonow-Produkt vererbt werden. Die Autoren A. Hajnal und I. Juhász konnten sogar beweisen, dass die Potenz (bzw. die Nachfolgerzahl) nicht ausreicht, um den möglichen Anstieg des Kompaktheitsgrades zu begrenzen:

Satz 5.2.4 *[HaJu]*
Sei E="Es gibt $\aleph_1$-kompakte, 0-dimensionale T_2-Räume, so dass ihr Produkt nur noch $\aleph_3$-kompakt und nicht $\aleph_2$-kompakt ist".
Für dieses Axiom gilt:

$$Con(ZSF) \longrightarrow Con(ZSF + AC + CH + E).$$

(0-dimensional bedeutet, dass es eine Basis aus abgeschlossen und gleichzeitig offen Mengen (clopen) gibt.)

Anders als bei der Zellularität (siehe Theorem 5.1.4) war es also nicht ohne weiteres möglich, den Kompaktheitsgrad für das Tychonow-Produkt durch Potenzen oder Nachfolgerzahlen zu beschränken.

Ein weiteres Problem ergibt sich zudem noch daraus, dass der Kompaktheitsgrad nicht so einfach durch bereits besser untersuchte Kardinalitätsfunktionen abgeschätzt werden kann.
Jeder topologische Raum X mit $\kappa := min\,\{w(X); |X|\}$ ist zwar κ^+-kompakt, diese Abschätzung ist allerdings viel zu grob.

Mit Hilfe des κ-Box-Produkts können wir nun aber für große Kardinalzahlen κ beweisen, dass sich die κ-Kompaktheit doch vererbt. Dazu benötigen wir folgende folgende Propositionen:

Proposition 5.2.5 *Sei $\mathfrak{F}$ ein κ-vollständiger Filter auf einer Menge M.*
Dann sind äquivalent:

1. $\forall A \subseteq M\,((\forall F \in \mathfrak{F} : A \cap F \neq \emptyset) \Rightarrow A \in \mathfrak{F}\,)$
2. *$\mathfrak{F}$ ist ein Ultrafilter.*

Beweis. Diese Proposition wurde z.B. in [Fe3] bewiesen, dort allerdings nicht für κ-vollständige Filter.

1) $\Rightarrow$ 2):

Angenommen, $\mathfrak{F}$ ist kein Ultrafilter, dann gibt es einen erweiterten Filter $\mathfrak{F}^* \supset \mathfrak{F}$ und ein Element $B \in \mathfrak{F}^*$ mit $B \notin \mathfrak{F}$.

klar: $B \subseteq M$ und $\forall F \in \mathfrak{F}^* : B \cap F \neq \emptyset$.
Da $\mathfrak{F}^* \supset \mathfrak{F}$ gilt auch $\forall F \in \mathfrak{F} : B \cap F \neq \emptyset$, nach Voraussetzung gilt also $B \in \mathfrak{F}$, ein Widerspruch.

2) $\Rightarrow$ 1):

Angenommen, es gäbe ein $A \subseteq M$ mit $\forall F \in \mathfrak{F} : A \cap F \neq \emptyset$ aber $A \notin \mathfrak{F}$.
Wir definieren $\mathfrak{Y} := \{B \subseteq M; \exists F \in \mathfrak{F} : A \cap F \subseteq B\}$.
Wir zeigen nun, dass $\mathfrak{Y}$ eine Erweiterung von $\mathfrak{F}$ sein müsste:

1. klar: $\emptyset \notin \mathfrak{Y}$ und $M \in \mathfrak{Y}$.
2. Seien $B_1, B_2 \subseteq M$ mit $B_1 \subseteq B_2$ und $B_1 \in \mathfrak{Y}$.
   Sei $F_1 \in \mathfrak{F}$ mit $A \cap F_1 \subseteq B_1$, dann ist auch $A \cap F_1 \subseteq B_2$, also $B_2 \in \mathfrak{F}$

3. Sei $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y}$ mit $\mathfrak{X} = \{X_i\}_{i \in I}$ und $|I| < \kappa$.
   Für alle $i \in I$ sei $F_i \in \mathfrak{F}$ mit $A \cap F_i \subseteq X_i$.
   Dann ist $\bigcap_{i \in I} (A \cap F_i) = A \cap \bigcap_{i \in I} F_i$ und da $\mathfrak{F}$ κ-vollständig ist, ist auch $\bigcap_{i \in I} F_i \in \mathfrak{F}$.
   $\Rightarrow A \cap \bigcap_{i \in I} F_i = \bigcap_{i \in I} (A \cap F_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} X_i$
   $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} X_i \in \mathfrak{Y}$

$\mathfrak{Y}$ ist also ein κ-vollständiger Filter. Da offensichtlich $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{Y}$ gilt, ist $\mathfrak{Y}$ eine echte Erweiterung zu $\mathfrak{F}$, ein Widerspruch. □

Definition 5.2.6 Sei M eine Menge und κ eine unendliche Kardinalzahl.
Wir sagen, dass eine Familie $\mathfrak{X} \subseteq P(M)$ die *κ-Durchschnittseigenschaft* (oder kurz *κ-DE*) erfüllt, falls gilt:

$$\forall \mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X} : 1 \leq |\mathfrak{Y}| < \kappa \Rightarrow \bigcap \mathfrak{Y} \neq \emptyset.$$

Die $\aleph_0$-DE wird auch endliche Durschnittseigenschaft (EDE) gennant.
Jeder Filter erfüllt somit die $\aleph_0$-DE, und jeder κ-vollständige Filter die κ-DE.

Proposition 5.2.7 *Sei X ein topologischer Raum und κ eine unendliche Kardinalzahl. Dann sind äquivalent:*

1. *X ist κ-kompakt.*
2. *Jede Familie $\mathfrak{A}$ abgeschlossener Mengen mit der κ-DE hat nicht leeren Durchschnitt, also $\bigcap \mathfrak{A} \neq \emptyset$.*

Beweis. Die analoge Version für kompakte Räume und Familien mit der EDE wurde z.B. in [Fe3] bewiesen.

1) $\Rightarrow$ 2):

Angenommen, es gibt eine Familie $\mathfrak{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ abgeschlossener Mengen, wo $\mathfrak{A}$ die κ-DE erfüllt, aber $\bigcap \mathfrak{A} = \emptyset$.
Dann ist $\{A_i^c\}_{i \in I}$ eine Familie offener Mengen und es gilt $\bigcup_{i \in I} A_i^c = X$.
Da X κ-kompakt ist, gibt es ein $J \in P_{<\kappa}(I)$ mit $\bigcup_{i \in J} A_i^c = X$.
$\Rightarrow \bigcap_{i \in J} A_i = X^c = \emptyset$, $\mathfrak{A}$ erfüllt also nicht die κ-DE, ein Widerspruch.

2) $\Rightarrow$ 1):

Sei $\mathfrak{M} = \{M_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X und o.B.d.A. sei $\emptyset \notin \mathfrak{M}$.
$\Rightarrow \bigcap_{i\in I} M_i^c = \emptyset$
Da diese M_i^c abgeschlossene Mengen sind, kann nach Voraussetzung $\{M_i^c\}_{i\in I}$ die κ-DE nicht erfüllen.
Es gibt also ein $J \in P_{<\kappa}(I)$ mit $\bigcap_{i\in J} M_i^c = \emptyset$.
$\Rightarrow \bigcup_{i\in J} M_i = \left(\bigcap_{i\in J} M_i^c\right)^c = X$

Zu jeder beliebigen Überdeckung $\mathfrak{M}$ gibt es also eine Teilüberdeckung $\mathfrak{N}$ mit $|\mathfrak{N}| < \kappa$, der Raum X ist also κ-kompakt. $\square$

Nun können wir mit Hilfe der beiden Propositionen folgendes Theorem beweisen:

Theorem 5.2.8 *Sei $\{\langle X_i, \tau_i\rangle\}_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume. Für jede stark-kompakte Kardinalzahl κ sind äquivalent:*

1. *Für alle $i \in I$ ist X_i κ-kompakt.*
2. *Das κ-Box-Produkt $\square^{\kappa}_{i\in I} X_i$ ist κ-kompakt.*

Beweis. Einen Beweis für dieses Theorem in analoger Form für $\kappa = \aleph_0$ gibt es [Fe3].

1) $\Rightarrow$ 2):

Sei $\mathfrak{A}$ eine Familie in $\square^{\kappa}_{i\in I} X_i$ abgeschlossener Mengen, die die κ-DE erfüllt.
Wir wollen zeigen, dass auch $\bigcap \mathfrak{A} \neq \emptyset$ gilt, denn somit wäre nach Proposition 5.2.7 auch $\square^{\kappa}_{i\in I} X_i$ κ-kompakt.

Wir erweitern $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{A}^*$ wie folgt:

$$\mathfrak{A}^* := \left\{B; \exists \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{A} : 1 < |\mathfrak{X}| < \kappa \wedge \bigcap \mathfrak{X} \subseteq B\right\}.$$

Es ist klar, dass $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}^*$ gilt und wir zeigen, dass es sich bei $\mathfrak{A}^*$ um einen κ-vollständigen Filter handelt:

1. klar: $\prod_{i\in I} X_i \in \mathfrak{A}^*$.
   Da $\mathfrak{A}$ die κ-DE erfüllt, gilt für alle $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{A}$ mit $|\mathfrak{X}| < \kappa$ auch automatisch $\bigcap \mathfrak{X} \neq \emptyset$.
   Somit muss $\emptyset \notin \mathfrak{A}^*$ gelten.
2. Seien $B_1, B_2 \in \mathfrak{A}^*$ und seien entsprechend $\mathfrak{X}_i \subseteq \mathfrak{A}$ mit $|\mathfrak{X}_i| < \kappa$ und $\bigcap \mathfrak{X}_i \subseteq B_i$ für $i = 1, 2$.
   $\Rightarrow \bigcap (\mathfrak{X}_1 \cup \mathfrak{X}_2) = \bigcap \mathfrak{X}_1 \cap \bigcap \mathfrak{X}_2 \subseteq B_1 \cap B_2$
   Da auch $\mathfrak{X}_1 \cup \mathfrak{X}_2 \subseteq \mathfrak{A}$ und $|\mathfrak{X}_1 \cup \mathfrak{X}_2| < \kappa$ gilt, ist auch $\mathfrak{X}_1 \cup \mathfrak{X}_2 \in \mathfrak{A}^*$.
3. Sei $B \in \mathfrak{A}^*$.
   Dann gibt es ein $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{A}$ mit $|\mathfrak{X}| < \kappa$ und $\bigcap \mathfrak{X} \subseteq B$.
   Somit gilt für alle $C \supseteq B$ auch $\bigcap \mathfrak{X} \subseteq B \subseteq C$, C ist also auch eine Element aus $\mathfrak{A}^*$.
4. Sei $\mathfrak{Y} = \{Y_i; i \in I\} \subseteq \mathfrak{A}^*$ mit $|\mathfrak{Y}| < \kappa$.
   Dann gibt es für alle $i \in I$ ein entsprechendes $\mathfrak{X}_i \subseteq \mathfrak{A}$ mit $|\mathfrak{X}_i| < \kappa$ und $\bigcap \mathfrak{X}_i \subseteq Y_i$.
   Dann ist auch $\bigcup_{i\in I} \mathfrak{X}_i \subseteq \mathfrak{A}$. Da κ eine stark-kompakte Kardinalzahl ist, ist sie insbesondere eine reguläre Kardinalzahl, also ist auch $\left|\bigcup_{i\in I} \mathfrak{X}_i\right| < \kappa$ erfüllt.
   Dann ist $\bigcap \left(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{X}_i\right) = \bigcap_{i\in I} \left(\bigcap \mathfrak{X}_i\right) \subseteq \bigcap \mathfrak{Y}$.
   Somit ist gilt auch $\bigcap \mathfrak{Y} \in \mathfrak{A}^*$.

$\mathfrak{A}^*$ ist also ein κ-vollständiger Filter.

Da κ eine stark-kompakte Kardinalzahl ist, können wir nach Tarski (siehe Definition der stark-kompakten Kardinalzahlen) den κ-vollständigen Filter $\mathfrak{A}^*$ zu einem κ-vollständigen Ultrafilter $\mathfrak{F}$ erweitern.

Da der Ultrafilter $\mathfrak{F}$ κ-vollständig ist, erfüllt er und auch die Menge der Projektionen auf die Grundräume $\{pr_i(F); F \in \mathfrak{F} \text{ und } i \in I\}$ die κ-DE.

Somit erfüllt auch für alle $i \in I$ die Menge $\mathfrak{F}_i := \left\{\overline{pr_i(F)}; F \in \mathfrak{F}\right\} \subseteq P(X_i)$ die κ-DE.
Da die Grundräume X_i κ-kompakt sind und $\mathfrak{F}$ eine Menge von abgeschlossenen Teilmengen ist, die die κ-DE erfüllt, muss nach Proposition 5.2.7 auch $\bigcap \mathfrak{F}_i \neq \emptyset$ gelten.

Wir wählen nun für alle $i \in I$ ein $r_i \in \bigcap \mathfrak{F}_i \subseteq X_i$ und ein $r \in \prod_{i\in I} X_i$ mit $pr_i(r) = r_i$ für alle $i \in I$.

Wir wollen nun zeigen, dass für dieses r gilt:

$$\forall F \in \mathfrak{F} : r \in \overline{F}$$

Sei $i \in I$ und W_i eine offene Umgebung von r_i in X_i.
$\Rightarrow r_i \in W_i$ und $r_i \in \bigcap \mathfrak{F}_i$
$\Rightarrow r_i \in W_i \cap \bigcap \mathfrak{F}_i$
$\Rightarrow \forall F \in \mathfrak{F} : \emptyset \neq W_i \cap pr_i(F)$, denn sonst wäre $\overline{pr_i(F)} \subseteq W_i^c$ und $W_i \cap \overline{pr_i(F)} = \emptyset$, was wegen $r_i \in W_i \cap \bigcap \mathfrak{F}_i \subseteq W_i \cap \overline{pr_i(F)}$ nicht möglich ist.
$\Rightarrow \forall F \in \mathfrak{F} : pr_i^{-1}(W_i) \cap F \neq \emptyset$

Mit Proposition 5.2.5 kommt also das Urbild jeder offene Menge, die r_i enthält, bereits aus dem Filter $\mathfrak{F}$:

$$\forall i \in I \forall W_i \in \tau_i : r_i \in W_i \Rightarrow pr_i^{-1}(W_i) \in \mathfrak{F}.$$

Ist $\left\{pr_i^{-1}(W_i); i \in I, W_i \in \tau_i \text{ und } r_i \in W_i\right\}$ eine Menge solcher Urbilder, dann gilt wegen der κ-Vollständigkeit von $\mathfrak{F}$:

$$\forall J \in P_{<\kappa}(I) : \bigcap_{i \in J} pr_i^{-1}(W_i) \in \mathfrak{F}.$$

Da jedes Element der kanonischen Basis $\mathfrak{B}$ von $\square^{\kappa}_{i \in I} X_i$, welches r enthält, eine solche Darstellung hat, gilt

$$\{B; B \in \mathfrak{B} \text{ und } r \in B\} \subseteq \mathfrak{F}.$$

Insbesondere gilt also:

$$\forall F \in \mathfrak{F} \forall B \in \mathfrak{B} \left(r \in B \Rightarrow B \cap F \neq \emptyset\right).$$

Somit kann es kein $F \in \mathfrak{F}$ mit $r \notin \overline{F}$ geben, denn sonst gäbe es ein $B \in \mathfrak{B}$ mit $B \subseteq \left(\overline{F}\right)^c$, $r \in B$ und $B \cap F = \emptyset$.

$\Rightarrow \forall F \in \mathfrak{F} : r \in \overline{F}$.
$\Rightarrow \forall A \in \mathfrak{A} : r \in \overline{A} = A$, da $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{F}$ eine Familie abgeschlossener Mengen ist
$\Rightarrow r \in \bigcap \mathfrak{A}$

Also hat jede Familie in $\square_{i\in I}^{\kappa} X_i$ abgeschlossener Mengen, die die κ-DE erfüllen nicht leeren Durchschnitt.

Mit Proposition 5.2.7 ist $\square_{i\in I}^{\kappa} X_i$ auch κ-kompakt.

2) $\Rightarrow$ 1):

Sei $\mathfrak{U}$ eine offene Überdeckung von X_i für ein festes $i \in I$.
Dann ist $\mathfrak{U}^* := \left\{pr_i^{-1}(U); U \in \mathfrak{U}\right\}$ eine offene Überdeckung von $\square_{i\in I}^{\kappa} X_i$, denn $pr_i^{-1}(U)$ sind sogar Elemente der kanonischen Basis.
Da $\square_{i\in I}^{\kappa} X_i$ ein κ-kompakter Raum ist, gibt es eine Teilmenge $\mathfrak{V}^* \in P_{<\kappa}(\mathfrak{U}^*)$, die bereits ganz $\square_{i\in I}^{\kappa} X_i$ überdeckt.

Dann ist aber auch

$$\mathfrak{V} = \{pr_i(V), V \in \mathfrak{V}^*\} = \left\{pr_i(pr_i^{-1}(U)), pr_i^{-1}(U) \in \mathfrak{V}^*\right\} \subseteq \mathfrak{U}$$

eine Überdeckung von X_i mit

$$|\mathfrak{V}| = |\mathfrak{V}^*| < \kappa$$

und somit ist X_i ein κ-kompakter Raum. $\square$

Wir haben also selbst für die Vererbung der Kompaktheit der Grundräume auf das Tychonoff-Produkt ein Analogon für das κ-Box-Produkt gefunden und konnten somit eins der stärksten Argumente gegen die Verwendung des κ-Box-Produkts abschwächen. Da alle anderen Ergebnisse über die Eigenschaften des κ-Box-Produkts für den Spezialfall $\kappa = \aleph_0$ die bekannten Ergebnisse des Tychonow-Produkts liefern, ist es nicht verständlich, dass die κ-Box-Topologie bisher nur in wenigen Artikeln behandelt wurde und noch keinen Einzug - kurze Erwähnungen ausgeschlossen - in die Lehrbücher gefunden hat.
Ich hoffe, dass ich mit dieser Arbeit einen kleinen Beitrag zur Verbreitung des κ-Box-Produkts leisten konnte.

6 Auflistung wesentlicher Ergebnisse

Im Folgenden sind κ, λ und μ unendliche Kardinalzahlen und X_i Mengen versehen mit einer Topologie τ_i für eine Indexmenge I und $\langle R, \tau \rangle$ ein topologischer Raum.
Falls sonst noch zusätzliche Bedingungen gestellt werden, wird darauf hingewiesen.

Zur Dichtigkeit (3.1):

Theorem 3.1.4 (S. 23) *Ist $\kappa \leq \mu$, $|I| \leq 2^\mu$ und $d(X_i) \leq \mu$ für alle $i \in I$, dann gilt:*

$$d\left(\square_{i \in I}^{\kappa} X_i\right) \leq \mu^{<\kappa}.$$

Satz 3.1.8 (S. 24) *Ist $|I| \geq \kappa$ und besitzt jeder Grundraum X_i zwei disjunkte, offene und nicht leere Mengen (z.B. T_1-Räume), so gilt:*

$$log\left(|I|\right) \cdot d_I\left(\square_{i \in I}^{\kappa} X_i\right) \leq d\left(\square_{i \in I}^{\kappa} X_i\right) \leq \left(log\left(|I|\right) \cdot d_I\left(\square_{i \in I}^{\kappa} X_i\right)\right)^{<\kappa}.$$

Zur Homöomorphie (3.2):

Satz 3.2.3 (S. 26) *Gilt für die Kardinalzahlen $\lambda < \kappa \leq \mu$ und $z(R) = d(R) = \mu = \mu^{<\lambda} < \mu^+ = \mu^{<\kappa}$ und gibt es in R eine zellulare Familie der Mächtigkeit μ, dann gilt:*

$$R_\lambda^\mu \ncong R_\kappa^\mu.$$

Satz 3.2.9 (S. 29) *Für $\mu \leq \kappa = cf(\kappa)$ gilt:*

$$R_\kappa^\kappa \cong \left(R_\kappa^\mu\right)_\kappa^\kappa.$$

Zur Existenz generalisiert unabhängiger Familien (3.3):

Satz 3.3.6 (S. 34) *Auf jeder Menge, die mindestens $\mu^{<\kappa}$ viele Elemente hat, existiert eine 2^μ-mächtige $(\kappa, 1, \mu)$-generalisiert unabhängige Familie.*

Zur maximalen Auflösbarkeit (4.1):

Satz 4.1.11 (S. 43) *Ist $\kappa \leq \mu$ und sind alle X_i maximal-auflösbar, dann ist auch $\square^\kappa_{i\in\mu} X_i$ maximal-auflösbar.*

Satz 4.1.12 (S. 45) *Sei $\lambda \geq \kappa$ und X eine dichte Teilmenge von $\square^\kappa_I D(\lambda)$ mit $|I| \geq \kappa$ wo $D(\lambda)$ ein λ-mächtiger diskreter Raum ist.*
Ist X κ-auflösbar, so ist X auch λ-auflösbar.

Zur $\aleph_0$-Auflösbarkeit (4.2):

Satz 4.2.11 (S. 54) *In ZSF+V=L:*
Jeder T_0-Raum X mit $\triangle(X) \geq \aleph_0$ ist fast-$\aleph_0$-auflösbar.

Theorem 4.2.14 (S. 56) *Sei E="Es gibt eine schwach-kompakte Kardinalzahl". In ZSF+AC+E lässt sich die Existenz eines Raumes mit unendlichem Dispersions-Charakter, der nicht fast-$\aleph_0$-auflösbar ist, nicht beweisen.*

Zur Zellularität (5.1):

Satz 5.1.2 (S. 58) *Ist $\aleph_0 \leq \kappa \leq \mu$ und $d(X_i) \leq \mu$ für alle $i \in I$, dann gilt:*

$$z(\square^\kappa_{i\in I} X_i) \leq \mu^{<\kappa}.$$

Satz 5.1.4 (S. 60) *Ist $\aleph_0 \leq \kappa \leq \mu$ und $z(X_i) \leq \mu$ für alle $i \in I$, dann gilt:*

$$z\left(\square^\kappa_{i\in I} X_i\right) \leq 2^{(\mu^{<\kappa})}.$$

Zum Kompaktheitsgrad (5.2):

Satz 5.2.8 (S. 65) *Für jede stark-kompakte Kardinalzahl κ sind äquivalent:*

1. *Für alle $i \in I$ ist X_i κ-kompakt.*
2. *Das κ-Box-Produkt $\square_{i \in I}^{\kappa} X_i$ ist κ-kompakt.*

Literaturverzeichnis

[AIT] J. Angoa, M. Ibarra, A. Tamariz-Mascarúa: *On ω-resolvable and almost-ω-resolvable spaces.* Comment. Math. Univ. Carolin. 49 (2008), no. 3, S. 485–508.

[AlHo] P. Alexandroff und H. Hopf: *Topologie. Band 1.* Berlin, J. Springer, 1935.

[Bol] R. Bolstein: *Sets of points of discontinuity.* Proc. Amer. Math. Soc. 38 (1973), S. 193–197.

[Bou] N. Bourbaki, *Livre III: Topologie générale. Chapitre 1: Structures topologiques. Chapitre 2: Structures uniformes.(2ième edition).* Paris 1951 (Hermann & Cie.), S. 72.

[Bor] K. Borsuk: *Sur les prolongement des transformations continues.* Fund. Math. 28 (1937), S. 99–110.

[Ce] J. G. Ceder: *On maximally resolvable spaces.* Fund. Math. 55 (1964), S. 87–93.

[CePe] J. G. Ceder and T. Pearson: *On product of maximally resolvable spaces.* Pacific J. Math. 22 (1967), S. 31–45.

[CoHu1] W. W. Comfort and W. Hu: *Resolvability properties via independent families.* Top. Appl. 154 (2007), S. 205–214.

[CoHu2] W. W. Comfort and W. Hu: *Exactly n-resolvable Topological Expansions.* http://arxiv.org (arXiv:1008.5371v1).

[CoNe] W. W. Comfort and S. A. Negrepontis: *On families of large oscillation.* Fund. Math. 75 (1972), S. 275–290.

[Do] C. H. Dowker: *On countably paracompact spaces.* Canadian Journal of Math. 3 (1951), S. 219–224.

[En] R. Engelking: *Cartesian products and dyadic spaces.* Fund. Math. 57 (1965), S. 287–304.

[Fe1] U. Felgner: *Mengenlehre I.* Skript zur Vorlesung SS 2004.

[Fe2] U. Felgner: *Mengenlehre II.* Skript zur Vorlesung WS 2004/2005.

[Fe3] U. Felgner: *Topologie.* Skript zur Vorlesung SS 2005.

[HaJu] A. Hajnal, I. Juhász: *Lindelöf spaces à la Shelah.* Topology, Vol. II (Proc. Fourth Colloq., Budapest, 1978), Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 23, North-Holland, Amsterdam-New York, 1980, S. 555–567.

[He1] E. Hewitt: *A problem of set-theoretical topology.* Duke Math. J.10 (1943), S. 306–333.

[He2] E. Hewitt: *A remark on density characters.* Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), S. 641–643.

[Ho] R. Hodel: *Cardinal functions I.* in: K. Kunen, J. E. Vaughan (Eds.), *Handbook of Set-Theoretic Topology*, North-Holland, Amsterdam (1984), S. 1–61.

[Hu] W. Hu: *Generalized independent families and dense sets of Box-Product spaces.* Appl. Gen. Topol. 7 (2006), no. 2, S. 203–209.

[Il] A. Illanes: *Finite and ω-resolvability.* Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996), no. 4, S. 1243–1246

[Je] T. Jech: *Set theory. The third millennium edition, revised and expanded.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[Ju] I. Juhász: *Cardinal functions in topology - ten years later.* Mathematical Centre Tracts (1980).

[Ke] J. L. Kelley: *General Topology.* New York 1955, S. 107.

[Kn] C. J. Knight: *Box Topologies.* The Quarterly Journal of Math. (Oxford) 15 (1964), S. 41 – 54.

[Ku] D. Kurepa: *The Cartesian multiplication and the cellularity number.* Publ. Inst. Math. Beograd 2 (1962), S. 121–139.

[KST] K. Kunen, A. Szymański, F. Tall: *Baire irresolvable spaces and ideal theory.* Ann. Math. Sil. 2 (14) (1986), S. 98–107.

[Ma] E. Marczewski: *Séparabilité et multiplication cartésienne des espaces topologiques.* Fund. Math. 34 (1937), S. 127–143.

[Pa] O. Pavlov: *On resolvability of topological spaces.* Topology App. 126 (2002), S. 37–47.

[Po] E. S. Pondiczery: *Power problems in abstract spaces.* Duke Math. Journ. 11 (1944), S. 835–837.

[Ru] M. E. Rudin: *A normal space X for wich $X \times I$ is not normal.* Fund. Math. 73 (1971), S. 197–186.

[TaVi] A. Tamariz-Mascarúa and H. Villegas-Rodríguez: *Spaces of continuous functions, box products and almost-ω-resolvable spaces.* Comment. Math. Univ. Carolin. 43 (2002), no. 4, S. 687–705.

[Ti] H. Tietze: *Beiträge zur allgemeinen Topologie. I.* Math. Ann. 88 (1923), no. 3-4, S. 290–312.

[Ty] A. Tychonoff: *Über die topologische Erweiterung von Räumen.* Math. Ann. 102 (1930), S. 544–561.

Symbolverzeichnis

$\aleph_\alpha$ eine Kardinalzahl, siehe Seite 4

$\alpha + 1$ der Nachfolger einer Ordinalzahl α, siehe Seite 4

κ-DE die κ-Durschnittseigenschaft, siehe Seite 64

$\kappa \to (\lambda)^\delta_\theta$ die Erdős-Rado'sche Pfeil-Notation, siehe Seite 8

κ^+ der Nachfolger einer Kardinalzahl κ, siehe Seite 4

$|M|$ die Kardinalität von M, siehe Seite 3

$\mathbb{K}$ die Klasse aller Kardinalzahlen, siehe Seite 4

$\mu^{<\kappa}$ die schwache μ-Potenz von κ, siehe Seite 5

Ω die Klasse aller Ordinalzahlen, siehe Seite 4

$\phi_I(X)$ das Supremum einer Kardinalitätsfunktion ϕ der Grundräume, siehe Seite 11

$\square^\kappa_{i\in\mu} X_i$ κ-Box-Produkt, siehe Seite 11

$\triangle(\langle X;\tau\rangle)$ der Dispersions-Charakter, siehe Seite 38

$cf(\kappa)$ die Konfinalität von κ, siehe Seite 4

$Con(A)$ die Konsistenz von A, siehe Seite 3

$d(X)$ die Dichtigkeit eines top. Raumes, siehe Seite 10

GCH die Generalisierte Continuums-Hypothese, siehe Seite 3

$i\,(\sigma, \kappa, \lambda)$ die kleinste Kardinalzahl ι, so dass es auf einer bestimmten Menge keine $(\kappa, 1, \lambda)$-generalisiert unabhängige Familie der Mächtigkeit ι gibt, siehe Seite 33

IP	das Axiom der Injektiven Potenz, siehe Seite 3
$log(\mu)$	der Logarithmus einer Kardinalzahl μ, siehe Seite 5
$P_{<\kappa}(M)$	die Menge aller Teilmengen von M mit weniger als κ vielen Elementen, siehe Seite 7
$P_\kappa(M)$	die Menge aller Teilmengen von M mit genau κ vielen Elementen, siehe Seite 7
$s(X)$	die Spreizung eines top. Raumes, siehe Seite 11
$supp(B)$	der Träger von B, siehe Seite 11
T_i	das i-te Trennungsaxiom, siehe Seite 13
$V = L$	das Konstuierbarkeitsaxiom, siehe Seite 3
$w(X)$	die Wichte (das Gewicht) eines top. Raumes, siehe Seite 10
$z(X)$	die Zellularität eines top. Raumes, siehe Seite 58

Index

“Of course, like most dabblers with infinity, he went insane.”
Arthur C. Clarke, *3001: The Final Odyssey*