

---

# Sympathetisches Kühlen von ${}^6\text{Li}$ mit ${}^{87}\text{Rb}$

---

— Dissertation —

zur Erlangung des Grades eines Doktors  
der Naturwissenschaften  
der Fakultät für Mathematik und Physik  
an der Eberhard-Karls Universität Tübingen

vorgelegt von

Christian Silber aus Tübingen, 2006



Tag der mündlichen Prüfung: 20. Januar 2006

Dekan:	Prof. Dr. Peter Schmid
1. Berichterstatter:	Prof. Dr. Claus Zimmermann
2. Berichterstatter:	Prof. Dr. Franz Hasselbach
3. Berichterstatter:	Prof. Dr. Axel Görlitz



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Berechnung von Magnetfeldern</b>	<b>5</b>
2.1	Allgemeine numerische Methoden . . . . .	7
2.1.1	Direkte numerische Integration des Gesetzes von Biot-Savart . . . . .	7
2.1.2	Numerische Lösung der Maxwell-Gleichungen . . . . .	7
2.2	Potenzreihenansatz für Systeme mit Symmetrie . . . . .	8
2.2.1	Ansatz für ein zylindersymmetrisches System . . . . .	8
2.2.2	Ansatz für ein quasi-zweidimensionales (planares) System . . . . .	11
2.3	Lösungen auf der Basis elliptischer Integrale . . . . .	12
2.4	Simulation von Magnetfallen . . . . .	18
2.4.1	Feld eines Drahtelements . . . . .	18
2.4.2	Feld einer Spule . . . . .	18
2.4.3	Analyse des Fallenpotentials . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Magnetfallen-Design</b>	<b>23</b>
3.1	Atome im Magnetfeld . . . . .	24
3.2	Sphärische Quadrupolfalle . . . . .	26

3.2.1	Lebensdauer in der sphärischen Quadrupolfalle . . . . .	27
3.3	Die Ioffefalle . . . . .	30
3.3.1	Das Ioffeprinzip . . . . .	31
3.3.2	Lebensdauer in der Ioffefalle . . . . .	33
3.3.3	Ioffe-Geometrie und Instabilitäten . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Realisierte Magnetfalle</b>	<b>48</b>
4.1	Doppeldraht-Ioffefalle . . . . .	50
4.1.1	Realisierung und Kenndaten . . . . .	52
4.1.2	Potentialnäherungen . . . . .	56
4.1.3	Ioffe-Transfer . . . . .	60
4.2	Mikrofalle . . . . .	63
4.2.1	Mikro-Transfer . . . . .	66
4.2.2	Anharmonisches Potential . . . . .	68
4.3	Tripel-Transfer . . . . .	71
4.4	Mechanischer Aufbau . . . . .	76
<b>5</b>	<b>Kühlen ins entartete Regime</b>	<b>80</b>
5.1	Kühlen von Rubidium . . . . .	80
5.1.1	Evaporatives Kühlen mit Mikrowellen . . . . .	81
5.1.2	Zustandsbereinigung . . . . .	83
5.1.3	Kondensation von Rubidium . . . . .	85
5.2	Kühlen von Lithium . . . . .	89
5.2.1	Ausgangsbedingungen . . . . .	89
5.2.2	Sympathetisches Kühlen . . . . .	90

5.2.3	Fermi-Gas . . . . .	98
<b>A</b>	<b>Magnetfelder</b>	<b>102</b>
A.1	Bessel-Laplace Integrale . . . . .	102
A.2	Wing-Theorem für Feldextrema . . . . .	103
A.2.1	1.Fall: Maximum (Beweis durch Widerspruch) . . . . .	104
A.2.2	2.Fall: Minimum Existenzbeweis durch Demonstration . . . . .	105
<b>B</b>	<b>Simulations-Toolbox</b>	<b>107</b>
B.1	Felderzeugende Elemente . . . . .	108
B.1.1	Ausdruck für eine Spule . . . . .	108
B.1.2	Ausdruck für einen Draht . . . . .	109
B.1.3	Ausdruck für ein Offsetfeld . . . . .	110
B.1.4	Umwandlung in die programmspezifische Form . . . . .	110
B.2	Routinen zur Visualisierung und Analyse des Magnetfelds . . . . .	112
B.2.1	Visualisierung . . . . .	112
B.2.2	Feldanalyse . . . . .	113
B.3	Unsere Falle . . . . .	114
B.3.1	Doppeldraht-Ioffefalle . . . . .	116
B.3.2	Mikrofalle . . . . .	116
	<b>Literatur</b>	<b>124</b>





# Kapitel 1

## Einleitung

Die Entwicklung effizienter Kühlmethoden, mit denen gespeicherte Atomensembles bei Temperaturen von wenigen Nanokelvin präpariert werden können, hat der Quantenoptik seit einigen Jahren faszinierende, neue Gebiete erschlossen. Ultrakalte Atome bieten sehr einfache und reine Modellsysteme, anhand welchen grundlegende Fragestellungen der Festkörper- und Astrophysik experimentell untersucht werden können. Phasenraumdichten nahe eins, bei Teilchendichten 100000-mal kleiner als bei Luft unter Normalbedingungen, sind Ausgangspunkt für Experimente, bei denen die Wechselwirkung zwischen den Atomen über einen weiten Bereich gezielt manipuliert und extrem sensitiv gemessen werden kann. Quantenstatistische Effekte [Ein25], die unter Normalbedingungen vollständig im thermischen Rauschen untergehen, werden im sogenannten entarteten Regime zum bestimmenden Faktor und dominieren die Eigenschaften des Quantengases. Besonders herausragend ist die mit dem Nobelpreis ausgezeichnete erstmalige Erzeugung eines Bose-Einstein Kondensats [And95, Dav95a, Bra95], sowie die Erzeugung atomarer Fermigase [DeM99].

Technische Voraussetzung für die Präparation von ultrakalten Atomen ist der Einschluss der Atome in einer effizienten Falle. Magnetfallen realisieren besonders tiefe und steile Potentiale, in denen die Atome sehr gut eingeschlossen werden können. Miniaturisierte Elemente erfüllen diese Anforderungen bei gleichzeitig sehr geringen Erregerströmen. Extrem steile oder anisotrope Potentialverläufe werden auf diese Weise erst möglich.

Evaporatives Kühlen, die meist verwendete Standardmethode in Magnetfallen, funk-

tioniert für bosonische Atomspezies (ganzzahliger Spin) wie  $^{87}\text{Rubidium}$  sehr gut. Ausgehend von in einer magnetooptischen Falle vorgekühlten Atomen werden hierbei durch Verdampfen selektiv besonders energiereiche Atome aus der Falle entfernt, während das verbliebene Atomensemble rethermalisiert und dabei kälter wird. Sukzessive Verkleinerung der Evaporationsschwelle führt trotz drastischer Reduktion der Teilchenzahl zu immer tieferen Temperaturen und schließlich zum Erreichen des entarteten Regimes. Aufgrund der Quantenstatistik entsteht durch einen Phasenübergang ein Bose-Einstein Kondensat und die Energieverteilung der Atome ist insgesamt nicht mehr thermisch.

$^6\text{Lithium}$  als fermionisches Element (halbzahliger Spin) kann mit diesem Verfahren nur sehr eingeschränkt gekühlt werden. Damit Atome in Magnetfallen stabil speicherbar sind, müssen sie spinpolarisiert sein. Aufgrund des Pauli-Prinzips können bei identischen Fermionen also nur Partialwellen mit ungeradem Drehimpuls zur Wechselwirkung zwischen den Atomen beitragen. Thermalisierende Stöße nehmen mit tiefer werdender Temperatur immer weiter ab und frieren schließlich aufgrund der Zentrifugalbarriere aus. Direktes evaporatives Kühlen von  $^6\text{Lithium}$  in einer Magnetfalle kommt noch weit vor dem Erreichen des entarteten Regimes zum Erliegen.

Auswege sind entweder der Verzicht auf die Spinpolarisierung in optischen Dipolfallen oder die Verwendung einer zweiten Atomspezies zum sympathetischen Kühlen. In beiden Fällen werden thermalisierende Stöße wieder möglich. Sympathetisches Kühlen ist eine besonders effiziente Methode, die für  $^6\text{Lithium}$  und  $^{87}\text{Rubidium}$  im Rahmen dieser Arbeit zum ersten Mal realisiert werden konnte. Unter ausschließlicher Evaporation von Rubidiumatomen wird das durch Stöße thermisch angekoppelte Lithiumensemble simultan mitgekühlt. Beim Erreichen des entarteten Regime tritt nun verstärkt Pauli-Blocking auf, das verhindert, dass Fallenzustände mehrfach besetzt werden können. Man spricht von der Ausbildung eines Fermi-Gases.

Die Koexistenz eines  $^{87}\text{Rubidium}$  Kondensats mit einem  $^6\text{Lithium}$  Fermi-Gas in der Falle ermöglicht viele interessante Untersuchungen. Insbesondere die Erzeugung polarer Dimere z.B. durch Photoassoziation oder die Verwendung von Feshbach-Resonanzen ist ein völlig neues Feld. Für das  $\text{RbLi}$ -Dimer erwartet man ein permanentes elektrisches Dipolmoment von 4.3 Debye [Ige86]. Im Gegensatz zu den sonst dominanten Van der Waals-Kräften aufgrund induzierter Dipol-Dipol-Wechselwirkung handelt es sich hier um eine langreichweitige Wechselwirkung. Die

Eigenschaften eines gespeicherten RbLi-Quantengases unterscheiden sich deshalb gravierend von unpolaren Quantengasen. Da parallel ausgerichtete, nebeneinander liegende Dipole eine repulsive Wechselwirkung, kollineare Dipole aber eine attraktive Wechselwirkung erfahren, kann die effektive Wechselwirkung im Gesamtsystem durch Wahl der Fallengeometrie stark beeinflusst werden. In pfannkuchenförmigen Fallen mit senkrecht zur Ebene stehenden Dipolen ergibt sich also eine effektiv repulsive, in zigarrenförmigen Fallen eine effektiv attraktive Wechselwirkung unter den Dimeren [San00].

Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit war eine Apparatur [Sil00, Sil03], mit der erstmalig heteronukleare Photoassoziation für  ${}^6\text{Li}{}^7\text{Li}$  [Sch03a, Sch01a, Sch02, Sch03b] demonstriert werden konnte. Die Messungen wurden an Atomen in einer magnetooptischen Falle durchgeführt. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde die Anlage durch eine neuartige Magnetfalle und den Laseraufbau zum Betrieb der magnetooptischen Falle für Rubidium erweitert. Der gesamte Aufbau wurde besonders im Hinblick auf Zuverlässigkeit und Langzeitstabilität vollständig überarbeitet. Mit dieser weltweit einzigartigen Experimentieranlage war es jetzt erstmals möglich,  ${}^6\text{Lithium}$  durch Rubidium sympathetisch ins entartete Regime zu kühlen. Die so präparierbaren Quantengase sind ein exzellenter Ausgangspunkt für künftige Untersuchungen.

Der erste Teil dieser Arbeit widmet sich grundsätzlichen Überlegungen zu Magnetfallen. Kapitel 2 stellt verschiedene Methoden zur Berechnung und Näherung der Magnetfelder felderzeugender Elemente vor, die in die Entwicklung einer Simulations-Toolbox (Anhang B) für Magnetfelder auf der Basis von Mathematica und der Programmiersprache C eingeflossen sind. Insbesondere der Potenzreihenansatz für zylinder- und ebenensymmetrische Felder dient dann in Kapitel 3 zu grundsätzlichen Überlegungen zum Design von Magnetfallen. Verschiedene Typen der Magnetfalle werden untersucht und hinsichtlich Feldgeometrie, Falltiefe, Lebensdauer der gespeicherten Atome und Aspektverhältnis verglichen.

Kapitel 4 diskutiert den auf der Basis der Erkenntnisse der ersten beiden Kapitel entwickelten Aufbau in unserem Experiment. Besonderes Augenmerk liegt auf der neuartigen Doppeldraht-Ioffefalle, sowie ihrer Kombinierbarkeit mit der zusätzlich eingebauten Mikrofalle. Die Vorgehensweise beim Transfer der Atome in die Ioffefalle und dabei auftretenden kritische Punkte werden vorgestellt.

Den Abschluss der Arbeit bildet Kapitel 5 mit der Darstellung der Funktionsfähigkeit der Anlage anhand erster Experimente. Aus der Untersuchung der Thermalisierung zwischen Rubidium und Lithium konnte der für weitere Arbeiten zentrale Betrag der bislang noch unbekanntes Interspezies-Streulänge gewonnen werden.

# Kapitel 2

## Berechnung von Magnetfeldern

Zur Realisierung möglichst effizienter Fallen für die Speicherung kalter Atome ist es notwendig, sämtliche Parameter und ihre Auswirkungen auf den magnetischen Einschluss zu kennen. Die Simulation des Magnetfelds ist daher ein wichtiges Element für die Entwicklung einer an die jeweiligen Ansprüche angepassten Magnetfalle.

Im Folgenden werden zunächst verschiedene Methoden zur Berechnung von Magnetfeldern vorgestellt und diskutiert. Der Potenzreihenansatz für zylinder- und ebensymmetrische Systeme ist ein sehr allgemeines Verfahren, mit dessen Hilfe aus dem Feld auf der Symmetrieebene oder -ebene eine Näherung für das Feld im Raum gewonnen wird. Zum Einsatz kommt dieses Verfahren vor allem bei grundsätzlichen Überlegungen zum Design von Magnetfallen (Kapitel 3), wo auf diese Weise einfache symbolische Ausdrücke für das Fallenpotential zu Verfügung stehen und untersucht werden können. Die Simulation der genauen Fallenparameter erfolgt über ein im Rahmen dieser Arbeit entwickeltes Programmpaket, dessen Berechnungen auf den in Abschnitt 2.3 beschriebenen elliptischen Integralausdrücken basieren.

Die Bestimmung von Magnetfeldern unter Annahme beliebiger Stromverteilungen, Materialien und Zeitabhängigkeiten ist eine sehr komplexe Aufgabenstellung. Man muss eine Lösung für die vollen Maxwell-Gleichungen mit den gegebenen Randbedingungen finden. Es ist daher nicht verwunderlich, dass analytische Lösungen nur in speziellen Fällen mit gegebener Symmetrie oder anderen Einschränkungen existieren.

Im Bezug auf die Simulation von Magnetfallen ist es sehr hilfreich, dass man es hier

in den meisten Fällen mit statischen Feldern und nicht-ferromagnetischen Materialien zu tun hat. Ausnahmen sind Magnetfallen, die mit ferromagnetischen Polschuhen, Permanentmagneten oder ähnlichem ausgestattet sind [Tol95, Des98], um in spezialisierten Experimenten gezielten Nutzen daraus zu ziehen.

Wenn man sich auf ein magnetostatisches Problem ohne Materialeffekte, also eine reine Stromverteilung, beschränkt, kann diese mit Hilfe des Gesetzes von Biot-Savart [Jac75] gelöst werden:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r' \quad (2.1)$$

Aus dem Gesetz von Biot-Savart folgt direkt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.2)$$

und zusammen mit der Kontinuitätsgleichung  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}. \quad (2.3)$$

Dies sind die grundlegenden Gesetze der Magnetostatik.

Bei ausschließlicher Betrachtung von quellenfreien Gebieten mit verschwindender Stromdichte vereinfacht sich die Situation noch weiter. Der Ausdruck  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$  erlaubt die Beschreibung der magnetischen Induktion

$$\vec{B} = -\vec{\nabla}\Phi \quad (2.4)$$

als Gradient eines skalaren magnetischen Potentials  $\Phi$ . Gleichung (2.2) reduziert sich dann zur Laplace-Gleichung für das magnetische Potential  $\Phi$ :

$$\nabla^2\Phi = 0. \quad (2.5)$$

Durch die Reduktion der ursprünglichen Vektor-Differentialgleichungen auf die Laplace-Gleichung für das magnetische Potential lassen sich zwar viele Probleme direkt lösen, eine analytische Form existiert aber für die wenigsten realen Probleme oder ist nur sehr schwer zu finden. In den meisten Fällen müssen daher numerische Lösungsmethoden für die Differentialgleichungen oder sogar die direkte numerische Integration des Gesetzes von Biot-Savart angewandt werden.

## 2.1 Allgemeine numerische Methoden

### 2.1.1 Direkte numerische Integration des Gesetzes von Biot-Savart

Die auf den ersten Blick einfachste Methode ist die direkte numerische Integration des Gesetzes von Biot-Savart (Gleichung 2.1). Jedes stromführende Element wird dabei in viele, möglichst kleine Stromelemente zerlegt, deren jeweilige Feldbeiträge am Aufpunkt summiert werden. Sehr vorteilhaft an dieser Methode ist, dass Elemente beliebiger Form sehr einfach berechnet werden können. Man benötigt keinerlei Koordinatentransformationen oder die Ausnutzung zugrundeliegende Symmetrien, welche die Implementierung des Algorithmus komplizierter machen würde. Nachteile hat das Verfahren bei Systemen, die sehr komplex sind, oder wenn eine hohe Genauigkeit erforderlich ist. Theoretisch kann die Genauigkeit zwar durch immer weitere Verfeinerung der Stromelemente beliebig erhöht werden, praktisch stößt man jedoch ziemlich schnell an Grenzen der Rechengeschwindigkeit und der numerischen Genauigkeit. Die Anzahl der nötigen Rechenschritte wächst mit der gewünschten Genauigkeit sehr stark an. Bei einer 3-dimensionalen Stromverteilung erkennt man leicht, dass eine Verdoppelung der linearen Stromelementdichte zu einer 8-fach erhöhten Anzahl an auszuwertenden Stromelementen führt. Es gibt zwar Ansätze, die ausnutzen, dass die Dichte der Stromelemente je nach Abstand zum Aufpunkt verschiedenen Einfluß auf die Genauigkeit haben, die Implementierung eines solchen Verfahrens gestaltet sich jedoch im Allgemeinfall wiederum sehr aufwendig.

Zusammenfassend ist die direkte numerische Integration des Gesetzes von Biot-Savart ein sehr einfaches und leicht implementierbares Verfahren, das bei höheren Ansprüchen an die benötigte Rechenzeit bei gleichzeitig hoher Genauigkeit des Ergebnisses an Grenzen stößt.

### 2.1.2 Numerische Lösung der Maxwell-Gleichungen

Verfahren, die die Maxwell-Gleichungen direkt numerisch lösen beruhen meist auf der Finite-Element-Methode (FEM) oder auch der Randelement-Methode (BEM,

**Boundary Element Method**). Das System wird dazu in Volumenelemente (FEM) oder Flächenelemente (BEM) zerlegt, die als Stützpunkte für die numerische Bestimmung der Lösung dienen. Auch hier besteht die Kunst darin, die Aufteilung in die Elemente möglichst so zu gestalten, dass der Rechenaufwand für eine gewünschte Genauigkeit minimal ist. In Regionen, in denen sich das Feld räumlich schnell ändert und an Grenzflächen müssen die Elemente daher enger liegen, als in Gebieten mit fast konstantem Feld. Um eine bestimmte Genauigkeit zu erreichen, kann daher gut in iterativen Schritten, bei denen die Elementdichte selektiv verändert wird, vorgegangen werden. Besonders an scharfen Grenzflächen muss die Elementdichte hier sehr hoch gewählt werden.

Insgesamt sind diese allgemeinen Methoden sehr aufwändig und lohnen sich nur, wenn keine andere Methode anwendbar ist. Dies kann insbesondere der Fall sein, wenn ferromagnetische Materialien oder komplexe Systeme ohne vereinfachende Symmetrie untersucht werden. Wegen des hohen Programmieraufwands werden solche Verfahren fast nur in professionellen Differentialgleichungs-Lösern realisiert.

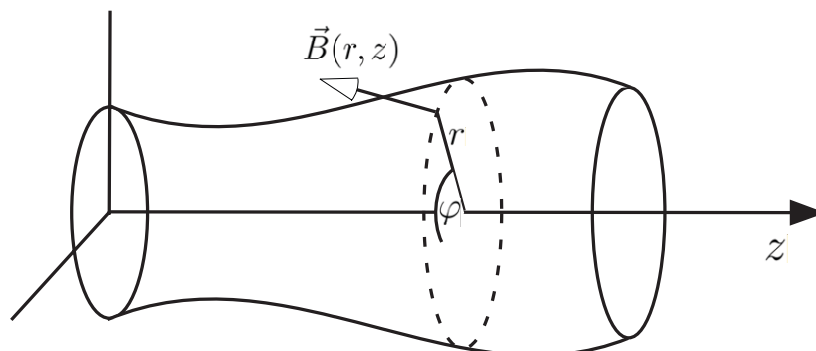
## 2.2 Potenzreihenansatz für Systeme mit Symmetrie

### 2.2.1 Ansatz für ein zylindersymmetrisches System

In zylindersymmetrischen Systemen (Abbildung 2.1) lässt sich ein besonders einfacher Ansatz für die Berechnung des Magnetfeldes realisieren. Bei dieser Methode [Jac99] wird die Kenntnis des Magnetfeldes und dessen Ableitungen auf der Symmetrieachse zur Bestimmung des Feldes im Raum benutzt. Die Gültigkeit des Verfahrens beschränkt sich auf quellenfreie Gebiete, darf also nicht innerhalb von felderzeugenden Elementen ausgewertet werden. Die höchste Genauigkeit wird für achsennahe Punkte erreicht und nimmt besonders in der Nähe der felderzeugenden Elemente rasch ab. Die Art der felderzeugenden Elemente ist nicht ausschlaggebend, so dass es auf Anordnungen von Permanentmagneten ebenso wie auf Spulenanordnungen oder gemischte Systeme angewandt werden kann.

Die Einschränkung des Problems auf quellenfreie Gebiete erlaubt, wie schon be-





**Abbildung 2.1:** Zylindersymmetrische Konfiguration

sprochen, die Verwendung eines magnetischen Potentials  $\Phi$ . Dieses muss zwingend der Laplace-Gleichung (2.5) genügen. Bei diesem speziellen Verfahren wird zur Beschreibung des zylindersymmetrischen Potentials nun folgender Potenzreihenansatz gewählt:

$$\Phi(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z) \cdot r^n. \quad (2.6)$$

Das Potential ist ein Polynom der radialen Variable r mit axialen Funktionen  $a_n(z)$  als Koeffizienten. Setzt man diese Definition in die Laplace-Gleichung (2.5) ein, erhält man

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ a_n(z) \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} r^n \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (a_n(z)) \cdot r^n \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ a_n(z) \cdot n^2 \cdot r^{n-2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (a_n(z)) \cdot r^n \right] = 0. \end{aligned}$$

Man erkennt, dass die Idee des gewählten Potenzreihenansatzes darin besteht, dass die radialen und axialen Abhängigkeiten im Potential separiert wurden, so dass die Terme des Laplace-Operators nur auf die jeweils entsprechenden Teile wirken. Durch Vergleich der Koeffizienten vor den jeweiligen Potenzen kann nun eine einfache Rekursionsformel für die Koeffizienten

$$a_n(z) = -\frac{1}{n^2} \cdot \partial_z^2 (a_{n-2}(z)) \quad (2.7)$$

angegeben werden, wobei  $\partial_z^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  ist. Da die radiale Ableitung von  $\Phi(r, z)$  für  $r = 0$  aufgrund der Zylindersymmetrie verschwinden muss, ist  $a_1(z) = 0$ . Alle ungeraden Koeffizienten müssen damit auch verschwinden. Durch Einsetzen von  $a_0(z) = \Phi(0, z)$  kann nun von der Rekursionsformel auf den direkten Ausdruck

$$a_{2n}(z) = (-1)^n \frac{\partial_z^{2n}(a_0(z))}{(n!)^2 \cdot 2^{2n}}. \quad (2.8)$$

geschlossen werden. Setzt man dies in die ursprüngliche Definition der Potenzreihe ein, bekommt man

$$\Phi(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\partial_z^{2n}(a_0(z))}{(n!)^2 \cdot 2^{2n}} \cdot r^{2n}. \quad (2.9)$$

Mit Hilfe von Gleichung 2.4 kann man nun wieder zur magnetischen Flußdichte übergehen und bekommt für die axialen und radialen Anteile

$$B_z(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\partial_z^{2n}(b_0(z))}{(n!)^2 \cdot 2^{2n}} \cdot r^{2n} \quad (2.10)$$

$$B_r(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\partial_z^{2n+1}(b_0(z))}{(n+1)! \cdot n! \cdot 2^{2n+1}} \cdot r^{2n+1} \quad (2.11)$$

wobei  $b_0(z)$  folgendermaßen gegeben ist:

$$b_0(z) := B_z(0, z) = -\frac{\partial}{\partial z} \Phi(r, z) \Big|_{r=0} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{\partial}{\partial z} [a_n(z)] \cdot r^n \Big|_{r=0} = -\frac{\partial}{\partial z} a_0(z). \quad (2.12)$$

Die Funktion  $b_0(z)$  beschreibt den Verlauf des Magnetfelds auf der Symmetrieachse  $z$ . Das Magnetfeld der zylindersymmetrischen Anordnung ist somit ausschließlich durch den Verlauf des Magnetfelds und dessen Ableitungen auf der Symmetrieachse gegeben.

Zur Demonstration des Verfahrens kann man den 3-dimensionalen Feldverlauf eines sphärischen Quadrupols sehr einfach herleiten. Man startet dazu mit der Annahme eines linearen Verlaufs auf der  $z$ -Achse

$$B_z(0, z) = b_0(z) = 2\alpha z, \quad (2.13)$$

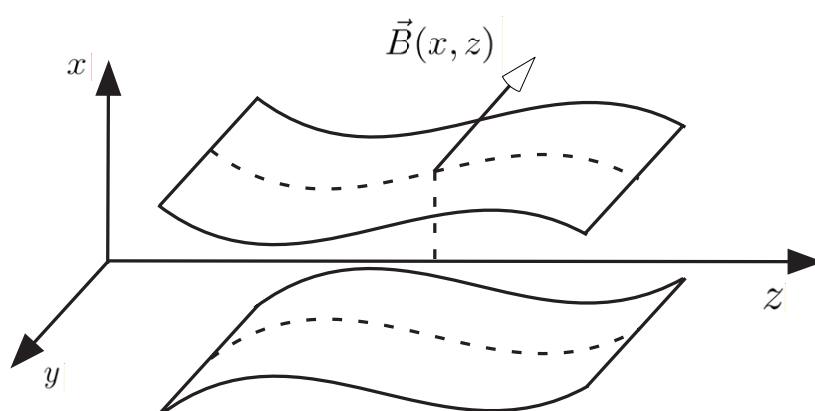
wobei  $(2\alpha)$  der Gradient des Feldes in Achsenrichtung ist. Einsetzen in die Gleichungen 2.10 ergibt direkt

$$B_z(r, z) = 2\alpha z \quad (2.14)$$

$$B_r(r, z) = \alpha r \quad (2.15)$$

Durch die lineare Form von  $b_0(z)$  und das damit verbundene Wegfallen höherer Ableitungen ergibt sich das Magnetfeld hier in trivialer Weise.

### 2.2.2 Ansatz für ein quasi-zweidimensionales (planares) System



**Abbildung 2.2:** Quasi-zweidimensionale (planare) Konfiguration. Das System ist symmetrisch zur  $y$ - $z$ -Ebene und invariant unter Translation entlang der  $y$ -Achse.

Analog zum geschilderten Fall mit Zylindersymmetrie lässt sich das Verfahren auf den Fall einer Symmetrie zur  $y$ - $z$ -Ebenen mit gleichzeitiger  $y$ -Translationsinvarianz (Abbildung 2.2) anwenden. Wie beim zylindersymmetrischen Fall reduziert sich das Problem durch die Symmetrie auf zwei Dimensionen.

Durch die in den hier gewählten kartesischen Koordinaten andere Form des Laplace-Operators hat die Laplace-Gleichung nun die folgende Form:

$$\nabla^2 \Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ a_n(z) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} (x^n) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (a_n(z)) \cdot x^n \right] \quad (2.16)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ a_n(z) \cdot n(n-1) \cdot x^{n-2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (a_n(z)) \cdot x^n \right] \quad (2.17)$$

$$= 0 \quad (2.18)$$

Aus einem Koeffizientenvergleich der ergibt sich hier der rekursive Ausdruck

$$a_n(z) = -\frac{1}{n(n-1)} \cdot \partial_z^2 a_{n-2}(z), \quad (2.19)$$

der zusammen mit  $a_0(z) = \Phi(0, z)$  und der durch die Symmetrie gegebenen Bedingung  $a_1(z) = 0$  (Ableitungen nach  $x$  müssen auf der Achse verschwinden)

$$a_{2n} = (-)^n \cdot \frac{\partial_z^{2n} a_0(z)}{(2n)!} \quad (2.20)$$

ergibt. Einsetzen in die Definitionsgleichung ergibt also

$$\Phi(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{\partial_z^{2n} (a_0(z))}{(2n)!} \cdot x^{2n}. \quad (2.21)$$

Durch Einsetzen in die Definitionsgleichung (2.4) für das magnetische Potential erhält man

$$B_z(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{\partial_z^{2n} (b_0(z))}{(2n)!} \cdot x^{2n} \quad (2.22)$$

$$B_x(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-)^{n+1} \frac{\partial_z^{2n+1} (b_0(z))}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} \quad (2.23)$$

mit  $b_0(z) = -\frac{\partial}{\partial z} a_0(z)$ .

Dieser Ansatz eignet sich besonders zur Diskussion von verschiedenen Feldgeometrien, wobei ausgehend vom Feld in der Symmetrieebene auf den räumlichen Feldverlauf geschlossen werden kann. Mit Kenntnis der einer Ioffefalle zugrundeliegenden Prinzipien (Kapitel 3.3) gewinnt man auch besonders einfache analytische Ausdrücke (Kapitel 4.1.2) für die Beschreibung des Ioffefelds.

## 2.3 Lösungen auf der Basis elliptischer Integrale

Eine weitere Möglichkeit, die sich besonders zur Berechnung von Spulen eignet basiert auf der Lösung des Feldes einer zirkularen Leiterschleife. Eine beliebige zylindersymmetrische Stromverteilung wird bei diesem Ansatz [Con01] als Volumenverteilung von Leiterschleifen dargestellt. Man verwendet die Greensfunktion der Magnetostatik in Zylinderkoordinaten (entspricht einer Leiterschleife) zur Lösung der

Maxwell-Gleichungen für die gesamte Stromverteilung. Die Anwendung von Rekursionsrelationen und Integralsätzen bewirkt, dass diese Lösung als direkte Funktion von elliptischen Integralen dargestellt werden kann. Obwohl zu elliptischen Integralen nur numerische Lösungen existieren, werden für die Berechnung des Magnetfelds der Stromverteilung weit weniger Schritte benötigt, als für die direkte numerische Integration des Gesetzes von Biot-Savart. Dies gilt auch deswegen, weil es sehr effiziente Algorithmen zur Berechnung der elliptischen Integralfunktionen gibt.

Ausgehend von den Grundgleichungen der Magnetostatik

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (2.24)$$

erkennt man, dass das Verschwinden der Divergenz von  $B$  die Einführung eines Vektorpotentials  $\vec{A}$  gestattet, dass die Beziehung  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  erfüllt. Außerdem kann man das Vektorpotential  $\vec{A}$  so wählen, dass  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$  (Coulomb-Eichung) gilt. Aus dieser Definition folgt direkt eine vektorwertige Poisson-Gleichung

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \quad (2.25)$$

für das Vektorpotential  $\vec{A}$ . Durch die Beschränkung auf achsensymmetrische Stromverteilungen und die Wahl eines Zylinderkoordinatensystems vereinfacht sich die Situation drastisch, da in diesem Fall nur die toroidale Komponente der Vektorgleichung beitragen kann.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A_\theta}{\partial r} \right) - \frac{A_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = -\mu_0 J_\theta(r, z) \quad (2.26)$$

Daraus ergeben sich die entsprechenden axialen und radialen Komponenten der magnetischen Induktion in Zylinderkoordinaten:

$$B_z(r, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta(r, z)) \quad (2.27)$$

$$B_r(r, z) = -\frac{\partial A_\theta(r, z)}{\partial z} \quad (2.28)$$

Conway [Con01] führt nun die Greensfunktion für die Magnetostatik in Zylinderkoordinaten ein:

$$G(r, r', z - z') = \frac{\mu_0}{2} \int_0^\infty ds J_1(sr') J_1(sr) \exp(-s|z - z'|) \quad (2.29)$$

Hier ist  $(r, z)$  ein allgemeiner Aufpunkt und  $(r', z')$  der Ort einer infinitesimalen Quelle. Bei  $J_1$  handelt es sich um die Besselfunktion erster Ordnung. Die allgemeine Lösung der Vektor-Laplace-Gleichung (2.26) für eine beliebige Stromdichte ergibt sich mit der Greensfunktion zu

$$A_\theta(r, z) = \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_0^{\infty} r' dr' J_\theta(r', z') G(r, r', z - z') \quad (2.30)$$

Die Stromdichte  $J_\theta(r', z')$  ist hier die Dichtefunktion einer beliebigen Verteilung kreisförmiger Leiterschleifen, die achsensymmetrisch am axialen Ort  $z'$  und beim Radius  $r'$  liegen.

Für den Fall einer einzelnen Leiterschleife mit der Stromdichte

$$J_\theta(r', z') = i_0 \cdot \delta(r' - r_0) \cdot \delta(z' - z_0) \quad (2.31)$$

sieht man leicht, dass die Integrale über  $r$  und  $z$  verschwinden und die obige Greensfunktion mit Vorfaktoren Strom  $i_0$  und Radius  $r_0$  als Vektorpotential übrigbleibt.

$$A_\theta(r, z) = i_0 r_0 G(r, r_0, z - z_0) \quad (2.32)$$

Die zur Leiterschleife gehörenden B-Felder sind damit:

$$B_z(r, r_0, z - z_0) = \frac{\mu_0 i_0 r_0}{2} \int_0^{\infty} ds s J_1(sr_0) J_1(sr) \exp(-s|z - z_0|) \quad (2.33)$$

$$B_r(r, r_0, z - z_0) = \text{sign}(z - z_0) \frac{\mu_0 i_0 r_0}{2} \int_0^{\infty} ds s J_1(sr_0) J_1(sr) \exp(-s|z - z_0|) \quad (2.34)$$

Es ist gut zu erkennen, dass in den Ausdrücken (2.29) - (2.34) immer der selbe Typ Integral auftritt. Conway führt deshalb die allgemeine Form des Bessel-Laplace Integrals ein:

$$I_{(\lambda, \mu, \nu)}(r', r, z - z') \equiv \int_0^{\infty} ds s^\lambda J_\mu(sr') J_\nu(sr) e^{-s|z - z'|} \quad (2.35)$$

Er stellt fest, dass es prinzipiell immer möglich ist, ein Integral dieses Typs in elliptischen Integralen darzustellen. Dabei verwendet er Rekursionsrelationen, die aus Besselfunktions-Identitäten abgeleitet werden können. Die besonders häufig verwendeten Formen sind im Anhang (A.1) aufgelistet. Weitere findet man in ([Con01] und Referenzen darin).

Werden diese Umformungen auf den Fall der symmetrisch zur  $z$ -Achse liegenden Leiterschleife (Abbildung 2.3), angewandt, so ergeben sich die bekannten Resultate, wie sie auch z.B. Jackson [Jac75] (dort in Kugelkoordinaten) herleitet:

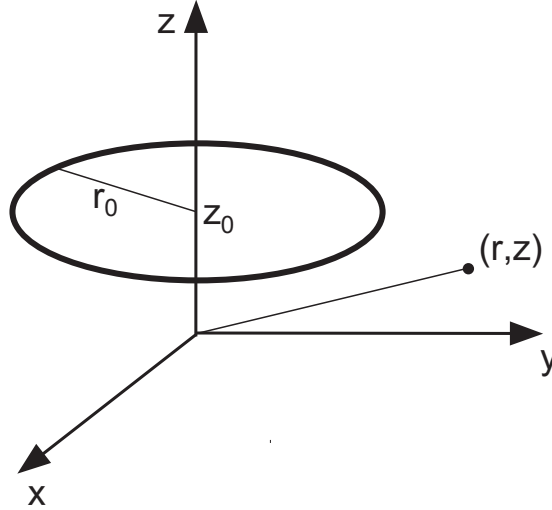


Abbildung 2.3: Leiterschleife

$$A_\theta(r, r_0, z - z_0) = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi k} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/2} [(2 - k^2) K(k) - 2 E(k)] \quad (2.36)$$

$$B_z(r, r_0, z - z_0) = \frac{\mu_0 i_0 k [k^2(r_0^2 - r^2 - z^2) E(k) + 4rr_0(1 - k^2) K(k)]}{16\pi(1 - k^2)(r_0 r)^{3/2}} \quad (2.37)$$

$$B_r(r, r_0, z - z_0) = \frac{\mu_0 i_0 (z - z_0) k [(2 - k^2) E(k) - 2(1 - k^2) K(k)]}{8\pi(1 - k^2)(r_0 r^3)^{1/2}} \quad (2.38)$$

mit

$$k = \sqrt{\frac{4rr_0}{(r + r_0)^2 + (z - z_0)^2}} \quad (2.39)$$

und

$$\beta = \arcsin \left( \frac{z - z_0}{\sqrt{(r - r_0)^2 + (z - z_0)^2}} \right). \quad (2.40)$$

Auf der Symmetrieachse ( $r=0$ ) reduzieren sich die Ausdrücke für das Feld auf die bekannten Ausdrücke ohne elliptische Integrale:

$$B_z(r = 0, r_0, z - z_0) = \frac{\mu_0 i_0 r_0^2}{2((z - z_0)^2 + r_0^2)^{3/2}} \quad \text{und} \quad B_r(r = 0, r_0, z - z_0) = 0 \quad (2.41)$$

Für den Fall der Leiterschleife ist dieser Zugang über die Greensfunktion mit nachfolgender Umformung in die Form mit den elliptischen Integralen noch nicht zu rechtfertigen, da man das Ergebnis auch direkt durch Integration des Gesetzes von Biot-Savart gewinnen kann. Vorteile bringt der Zugang jedoch bei der Betrachtung von aufwändigeren Anordnungen. Conway [Con01] leitet analytische Ausdrücke für das Feld dünner zylindrischer Spulen, scheibenförmiger Spulen und sogar allgemeiner 3-dimensionaler zylindersymmetrischer Stromverteilungen her. Die Errungenschaft seiner Arbeit ist die Realisierung der analytischen Form dieser Ausdrücke, die zumindest für die 3-dimensionale Spule zuvor noch nicht angegeben werden konnten. Anwendungen, insbesondere für die Felder von unendlich ausgedehnten stromführenden Scheiben gibt es vor allem in der Astrophysik und durch Übertragung der Methoden in der klassischen Gravitationstheorie.

Für unsere Zielsetzung, die möglichst genaue und schnelle Berechnung von Magnetfeldern von Spulen, sind Conways Ausdrücke nur teilweise von Nutzen. Wir sind zwar nicht auf die analytische Darstellung angewiesen, können aber ihre einfache Form nutzen, um Ausdrücke bereitzustellen, die mit wenigen numerischen Schritten berechnet werden können. Es hat sich als sinnvoll erwiesen (siehe Abschnitt 2.4.2), den symbolischen Ausdruck für eine dünne zylinderförmige Spule (Abbildung 2.4) mit konstantem Radius zu verwenden und numerisch auszuwerten. Felder von realistischen, 3-dimensionalen Spulen können durch Segmentierung in ineinandergeschachtelte dünne Spulen berechnet werden.

Zur Bestimmung des Feldes der dünnen zylinderförmigen Spule mit konstantem Radius wird Gleichung (2.30) direkt mit der, der Spule entsprechenden Stromdichte integriert. Das Ergebnis lässt sich mit Hilfe der Bessel-Laplace Integrale (A.1) darstellen.

Axiale Komponente im Bereich ( $z < z_1$ ):

$$B_z(r, z, r_0, z_1, z_2) = \frac{\mu_0 i_0 r_0}{2} [I_{(0,1,0)}(r_0, r, |z_1 - z|) - I_{(0,1,0)}(r_0, r, |z_2 - z|)] \quad (2.42)$$

Axiale Komponente im Bereich ( $z_1 < z < z_2$ ):

$$B_z(r, z, r_0, z_1, z_2) = \frac{\mu_0 i_0 r_0}{2} [2I_{(0,1,0)}(r_0, r, 0) - I_{(0,1,0)}(r_0, r, |z_1 - z|) - I_{(0,1,0)}(r_0, r, |z_2 - z|)] \quad (2.43)$$



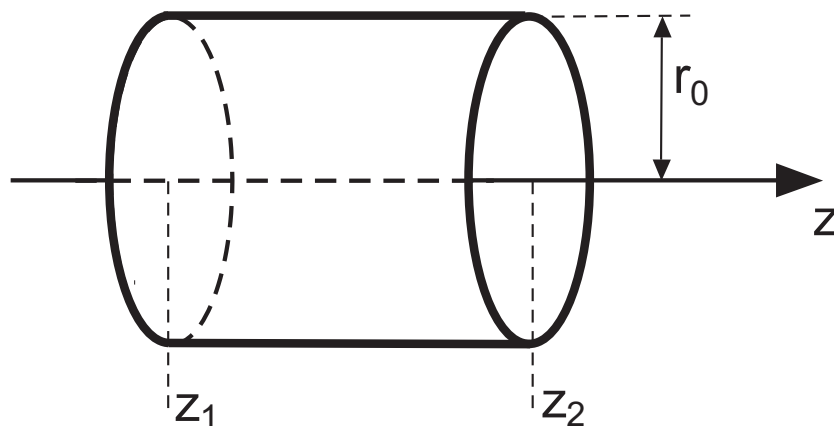


Abbildung 2.4: Dünne zylindersymmetrische Spule

Axiale Komponente im Bereich ( $z > z_2$ ):

$$B_z(r, z, r_0, z_1, z_2) = \frac{\mu_0 i_0 r_0}{2} [I_{(0,1,0)}(r_0, r, |z_2 - z|) - I_{(0,1,0)}(r_0, r, |z_1 - z|)] \quad (2.44)$$

Radiale Komponente für alle drei Bereiche:

$$B_r(r, z, r_0, z_1, z_2) = \frac{\mu_0 i_0 r_0}{2} [I_{(0,1,1)}(r_0, r, |z_2 - z|) - I_{(0,1,1)}(r_0, r, |z_1 - z|)] \quad (2.45)$$

Auf der Symmetrieachse ( $r=0$ ) können die Ausdrücke wieder ohne elliptische Integrale formuliert werden:

$$B_z(r = 0, z, r_0, z_1, z_2) = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi(z_2 - z_1)} \left( \frac{z - z_1}{\sqrt{(z - z_1)^2 + r_0^2}} - \frac{z - z_2}{\sqrt{(z - z_2)^2 + r_0^2}} \right) \quad (2.46)$$

$$B_r(r = 0, z, r_0, z_1, z_2) = 0 \quad (2.47)$$

Da das Verfahren von Conway direkt analytische Ausdrücke für die Felder von zylindersymmetrischen Stromverteilungen liefert, bietet sich außerdem die Möglichkeit der Lösung von magnetostatischen Randwertproblemen,

## 2.4 Simulation von Magnetfallen

Grundlage für die Simulation von Magnetfallen ist die numerische Berechnung der Magnetfelder, die von den stromdurchflossenen Spulen und Drahtelementen erzeugt werden. Im Rahmen dieser Arbeit wurde zu diesem Zweck ein Programmpaket entwickelt, mit dem Felder berechnet, visualisiert und analysiert werden können (siehe Anhang B). Visualisierung und Analyse geschehen auf der Basis von Mathematica. Zur Beschleunigung der numerischen Berechnungen sind diese in C realisiert.

Die Grundelemente der meisten Magnetfallen (Drahtelemente, Spulen) sind zylindersymmetrisch. Die Berechnung des Magnetfeldes an einem beliebigen Punkt P kann deshalb immer auf die selbe Weise erfolgen. Im ersten Schritt wird der Punkt P im Zylinderkoordinatensystem des Feldelements ( $z$  als Symmetrieachse) dargestellt. Die Ausdrücke für die Bestimmung der Vektorkomponenten des Felds können jetzt auf einfache Weise ausgewertet werden. Durch Rücktransformation werden die Komponenten des Magnetfelds nun wieder im ursprünglichen kartesischen Koordinatensystem dargestellt. Dieser Ablauf wird auf sämtliche Elemente angewandt und die Feldbeiträge aufsummiert.

### 2.4.1 Feld eines Drahtelements

Das Magnetfeld eines Drahtelements endlicher Länge (Abbildung 2.5) lässt sich mit dem Gesetz von Biot-Savart in Zylinderkoordinaten sehr einfach darstellen:

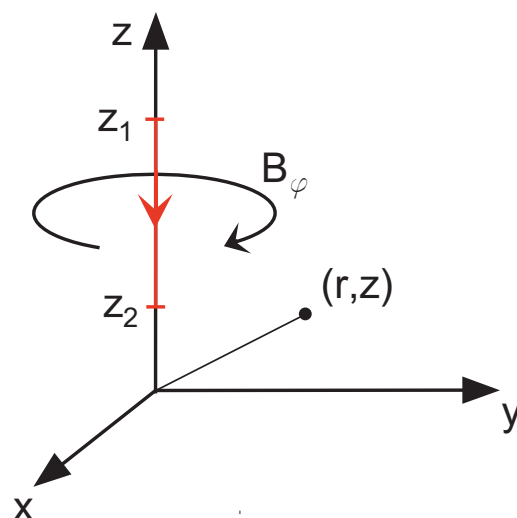
$$B_\varphi(r, z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{z_2 - z}{r \sqrt{r^2 + (z_2 - z)^2}} - \frac{z_1 - z}{r \sqrt{r^2 + (z_1 - z)^2}}. \quad (2.48)$$

Durch das lineare Drahtelement fließt ein Strom  $I$  vom Ort  $z_1$  nach  $z_2$ . Es gibt ausschließlich Feldbeiträge in  $\varphi$ -Richtung.

Der Effekt einer endlichen Dicke hat keinen Einfluß auf das Feld außerhalb des Drahts.

### 2.4.2 Feld einer Spule

Im Gegensatz zum Drahtelement kann das Feld einer ausgedehnten Spule nicht exakt bestimmt werden. Es existieren zwar analytische Ausdrücke [Con01], welche jedoch

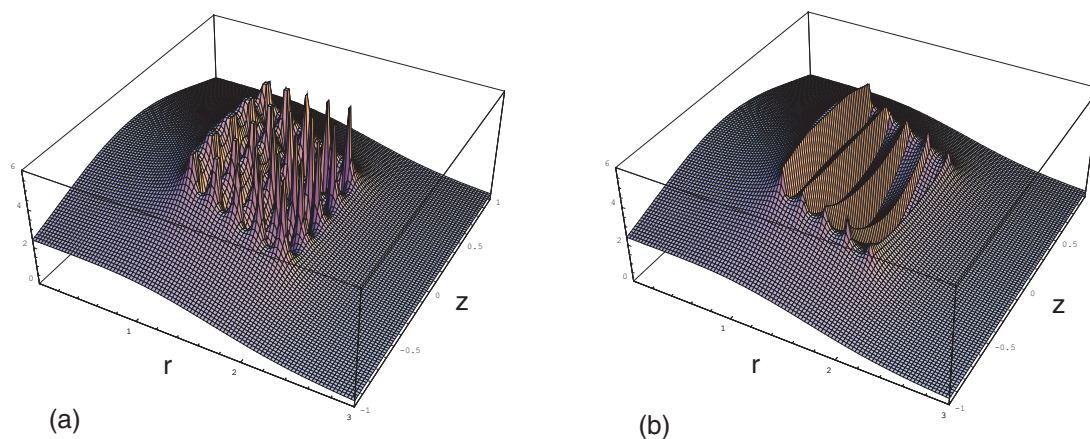


**Abbildung 2.5:** Drahtsegment endlicher Länge auf der  $z$ -Achse. Der Strom fließt von  $z_1$  nach  $z_2$ .

durch sehr komplexe Integralausdrücke gegeben sind und ausschließlich numerisch ausgewertet werden können. Für die Bestimmung des Spulenfelds in Zylinderkoordinaten ist daher am Einfachsten, die Spule in Segmente zu unterteilen und deren Feldanteil einzeln numerisch zu berechnen.

Die Segmentierung kann auf verschiedene Weisen erfolgen. Bei der direkten numerischen Integration des Gesetzes von Biot-Savart ersetzt man die Stromdichte im Volumen der Spule durch möglichst kurze, diskrete Drahtelemente. Das Feld der einzelnen Elemente kann hier zwar exakt bestimmt werden, die Diskretisierung führt aber zusätzlich einen Fehler ein.

Ein geringerer Diskretisierungsfehler tritt auf, wenn die Lösung der infinitesimalen Leiterschleife (Gleichungen 2.37 und 2.38) verwendet wird. Der durch die numerische Auswertung der elliptische Integrale bedingte Fehler ist sehr gering, da diese mit geeigneten Algorithmen [cep] bis auf einen relativen Fehler kleiner  $10^{-15}$  ausgewertet werden können. Den geringsten Fehler durch die Diskretisierung erhält man durch die Segmentierung in ineinander geschachtelte infinitesimal dünne Spulen (Gleichungen 2.42 bis 2.47). Abbildung 2.6 zeigt den Verlauf des Magnetfelds in einer Schnittebene durch die Spule. Beim Beispiel mit Leiterschleifen (Fall (a)) erkennt man das prinzipiell unvermeidbare Auftreten von Polstellen am Ort des Stromfa-

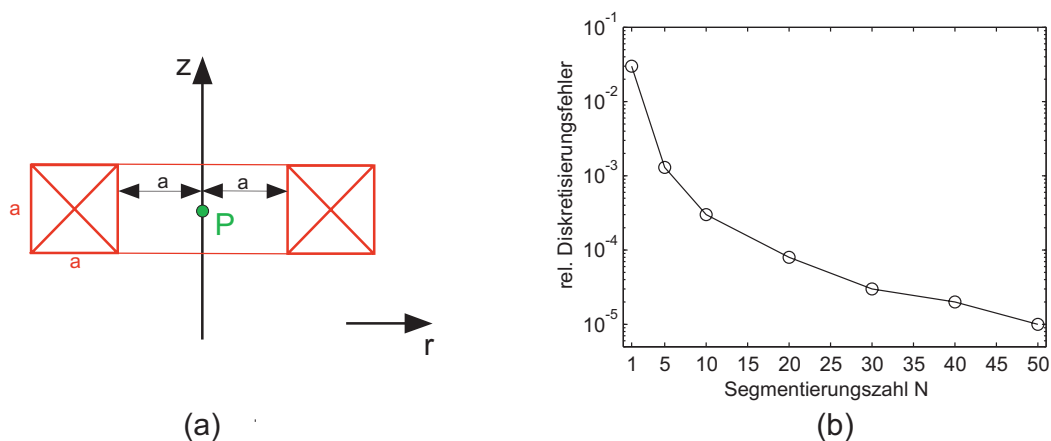


**Abbildung 2.6:** Segmentierung der Spule. Darstellung des Magnetfeldbetrags in einer Schnittenebene durch die halbe Spule. Die Symmetrieachse ist links. In Fall (a) wird die Spule durch 5x5 Leiterschleifen dargestellt. Der Betrag des Magnetfeldes divergiert jeweils am Ort einer Leiterschleife. Fall (b) zeigt die selbe Spule in der Darstellung durch 5 infinitesimal dünne Spulen. Man erkennt deutlich den Wegfall der Polstellen.

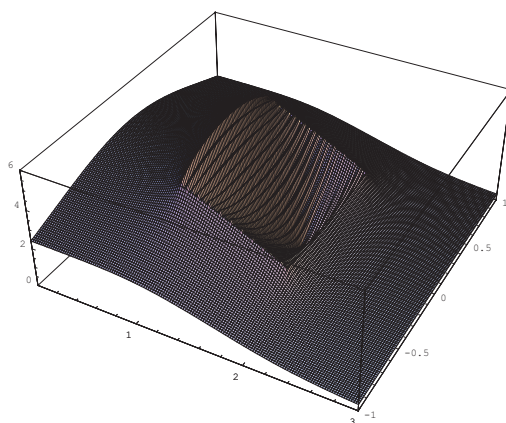
dens. Für ineinander geschachtelte dünne Spulen sind die Polstellen aufgehoben, wodurch numerische Auswertefehler vermieden werden.

Zur Gewinnung einer Abschätzung für den Diskretisierungsfehler wurde das Magnetfeld im Zentrum einer Spule für eine verschiedene Anzahl von Segmenten ausgewertet. Die Abhängigkeit des relativen Diskretisierungsfehlers von der Anzahl der Segmente ist in Abbildung 2.7 dargestellt. Da die Auswertung im Zentrum der Spule erfolgt, ist der Unterschied zwischen  $N \times N$  Leiterschleifen und  $N$  dünnen Spulen vernachlässigbar klein gegen den Diskretisierungsfehler. Bewegt man den Auswertungspunkt radial in Richtung der Spuleninnenseite, so nimmt der Fehler für die Segmentierung in Leiterschleifen stärker zu, als bei der Aufteilung in dünne Spulen. Zur Erfüllung einer bestimmten Rechengenauigkeit erfordert somit entweder die Verwendung von  $N$  dünnen Spulen oder mindestens  $N \times N$  Leiterschleifen. Obwohl der Rechenaufwand zur Auswertung des Felds einer dünnen Spule größer ist, braucht man also für hohe Genauigkeiten trotzdem weit weniger Rechenschritte.

Da man es für typische Magnetfallen mit Feldern im Bereich von wenigen Hundert Gauss zu tun hat und für die meisten Untersuchungen eine Genauigkeit von 0.1 Gauss ausreicht, werden im Simulationsprogramm standardmäßig  $N=20$  dünne Spu-



**Abbildung 2.7:** Effekt der Unterteilung der Spule auf relativen Diskretisierungsfehler. Die Untersuchung wurde beispielhaft am Punkt P im Zentrum einer Spule mit der charakteristischen Größe  $a$  durchgeführt. Graph (b) zeigt den numerisch bestimmten Verlauf des Fehlers in Abhängigkeit von der Anzahl der Segmente aus denen die Spule aufgebaut ist. Der Fehler ist als relative Abweichung vom Wert für  $N=200$  Segmente angegeben.



**Abbildung 2.8:** Im Simulationsprogramm standardmässig verwendete Segmentierung der Spule in  $N=20$  dünnen Spulen.

len verwendet (siehe Abbildung 2.8). Berechnungen mit einer höheren Genauigkeit sind nur sehr selten nötig, da die modellhafte Spule (konstante Stromdichte über den Querschnitt) nur für sehr dünne Drähte gut genug mit der Realität übereinstimmt. Schlecht modellierbare Störungen, wie das Erdmagnetfeld, Streufelder von ferromagnetischen Materialien in der Umgebung der Magnetfalle oder die genaue Lage der Zuleitungen verhindern eine exakte Beschreibung der realen Falle grundsätzlich. Für eine möglichst gute Übereinstimmung mit den berechneten Feldern ist deshalb darauf zu achten, dass die mechanischen Abmessungen möglichst genau realisiert werden können. Man erreicht dies durch die Verwendung von Spulenkörpern und mechanisch fixierten Zuleitungen.

### 2.4.3 Analyse des Fallenpotentials

Bei der Entwicklung von Magnetfallen ist es nicht ausreichend, nur das Magnetfeld aller felderzeugenden Elemente zu kennen. Um das von zu speichernden Atomen erfahrene Potential zu parametrisieren müssen weitere Auswertungen gemacht werden.

Die typische Vorgehensweise bei der Analyse beginnt damit, zunächst den Ort des Potentialminimums zu bestimmen. Je nachdem, ob das Feld linear (Quadrupolfalle) oder harmonisch (typische Ioffefalle) verläuft, sind Feldgradienten oder Krümmungen die gesuchten Parameter. Im harmonischen Fall bestimmt man die Hesse-Matrix (zweifache Richtungsableitungen in Matrixform), diagonalisiert diese und erhält so die Hauptachsen der Falle (Eigenvektoren) und die entsprechenden Krümmungen (Eigenwerte). Diese lassen sich dann unter Berücksichtigung der charakteristischen Eigenschaften der Atome in Fallenfrequenzen umrechnen.

In dem hier vorgestellten Programmpaket gibt es noch zusätzliche Funktionen zur graphischen Darstellung von Ebenen-Schnitten mit Äquipotentiallinien und dem Feldverlauf auf einer Geraden im Raum. Eine kurze Beschreibung der Befehle ist in Anhang B gegeben.

# Kapitel 3

## Magnetfallen-Design

Aus der heutigen Quantenoptik ist der Umgang mit sehr kalten und in externen Potentialen eingeschlossenen Atomen (bis auf wenige Ausnahmen Alkalimetalle) nicht mehr wegzudenken. Im Gegensatz zu Untersuchungen an Dampfzellen oder Strahlapparaturen stehen hier sehr viel dichtere und kältere Atomensembles zu Verfügung und ermöglichen erst die Präparation von Bose-Einstein-Kondensaten und Fermigasen.

Eine Falle, die den externen Einschluss der Atome erbringt, kann sehr unterschiedlich realisiert werden. Inhomogene Mikrowellen- oder Lichtfelder erzeugen Potentiale, in denen Kräfte auf das in den Atomen induzierte elektrische Dipolmoment wirken. Inhomogene Magnetfelder erzeugen eine Kraft auf das permanente magnetische Dipolmoment eines Atoms.

Den besten Einschluss und das effizienteste Fangen der Atome lässt sich mit der auf der spontanen Lichtkraft beruhenden magnetooptischen Falle erzielen. Im Unterschied zu den anderen Möglichkeiten handelt es sich hier nicht um ein konservatives Kraftfeld. Die Speicherung der Atome ist untrennbar mit dissipativen Reibungskräften verbunden, wodurch ein Einfangen und Kühlen freier Atome erst möglich wird. Grenzen hat dieses Verfahren bei den erreichbaren Temperaturen. Aufgrund der Linienbreite der Atome und dem Schrotrauschen des eingesetzten nahresonanten Lichts können Temperaturen unterhalb einigen  $10 \mu\text{K}$  prinzipiell nicht erreicht werden. Dennoch bietet die magnetooptische Falle ausgezeichnete Ausgangsbedingungen für eine weitere Speicherung in den meist viel flacheren konservativen Potentia-

len und wird in den meisten Experimenten mit kalten Atomen als erster Kühlschritt eingesetzt.

Zum Erreichen tieferer Temperaturen kann ein gefangenes Atomensemble in eine konservative Falle umgeladen werden. Durch die im Vergleich zu den resonanten Lichtkräften viel schwächere Kopplung der Atome an die elektromagnetischen Felder und die damit verbundene geringe Heizrate sind konservative Fallen kein begrenzender Faktor für die Realisierung von Temperaturen im Bereich von wenigen nK. Der Kühlmechanismus muss hier jedoch separat implementiert werden. Die einfachste und am weitesten verbreitete Methode ist das evaporative Kühlen. Da diese in Magnetfallen besonders einfach und effizient zu realisieren ist, ist der Einsatz von Magnetfallen heute eines der wichtigsten Verfahren zur Präparation von Bose-Einstein-Kondensaten und Fermigasen.

### 3.1 Atome im Magnetfeld

Wird ein Atom in ein äußeres Magnetfeld\* gebracht, so ergibt sich aufgrund seines permanenten magnetischen Dipolmoments ein Potential

$$U(\vec{r}) = -\vec{m} \cdot \vec{B}(\vec{r}). \quad (3.1)$$

Dabei ist  $\vec{m}$  das magnetische Moment des Atoms, dessen Größe sich aus Elektronenspin  $S$ , Kernspin  $I$  und Bahndrehimpuls  $L$  seines Zustands ergibt. In sehr schwachen statischen Magnetfeldern (Zeeman-Effekt) ist der Gesamtdrehimpuls  $F$  eine gute Quantenzahl und es gilt

$$U(\vec{r}) = -m_F g_F \mu_B |\vec{B}(\vec{r})| \quad (3.2)$$

mit der Magnetquantenzahl  $m_F$ , dem g-Faktor  $g_F$  und dem Bohrschen Magneton  $\mu_B$ . Diese Beschreibung setzt voraus, dass die vom Atom erfahrene zeitliche Richtungsänderung  $d/dt\theta$  des Magnetfelds während seiner Bewegung im Potential

---

\*Hier und im Folgenden wird die magnetische Induktion  $\vec{B}$ , wie im Umgang mit Magnetfallen sehr gebräuchlich fälschlicherweise als Magnetfeld bezeichnet. Diese begriffliche Vereinfachung ist unproblematisch, da Magnetfeld  $\vec{H}$  und magnetische Induktion  $\vec{B}$  im Vakuum die Beziehung  $\vec{H} = \mu_0 \vec{B}$  erfüllen. Als Einheit wird  $[B] = 1\text{Gauss} = 10^{-4}\text{Tesla}$  verwendet.



klein gegen die momentane Larmorfrequenz  $\omega_L = U(\vec{r})/\hbar$  ist. Wird diese Adiabaticitätsbedingung nicht erfüllt, treten Übergänge zu Zuständen mit anderen Magnetquantenzahlen auf und das Potential ist nicht mehr dasselbe.

Eine Erweiterung des Potentials auf höhere Felder kann für Alkalimetalle im Grundzustand ( $S=1/2$ , ein Außenelektron) mit der Breit-Rabi-Formel formuliert werden. Beschränkt man sich jedoch auf gestreckte Zustände, also Zustände mit maximalem  $m_F = \pm F$ , so gilt der lineare Ansatz weiterhin.

Die Realisierung einer Magnetfalle für eine Atomwolke der Temperatur  $T$  stellt bestimmte Forderungen an das Potential: Es muss ein lokales Minimum und eine Tiefe von einigen  $k_B T$  haben. Je nach Zustand der Atome könnte dies durch ein lokales Maximum oder Minimum des Magnetfeldbetrags erreicht werden. Da dieser aber aufgrund des Wing-Theorems ([Win84] und Kapitel A.2) im freien Raum kein Maximum haben kann, basieren alle statischen Magnetfallen auf dem Einschluss der Atome in einem Magnetfeldminimum. Atome in Zuständen, die dort eingeschlossen werden, nennt man "low field seeker".

In unserem Experiment verwenden wir die beiden Grundzustände:

$$^{87}\text{Rb} : \quad 5 \ ^1S_{1/2} \text{ mit } |F, m_F\rangle = |2, 2\rangle \text{ und } g_F = 1/2,$$

sowie

$$^6\text{Li} : \quad 2 \ ^1S_{1/2} \text{ mit } |F, m_F\rangle = |3/2, 3/2\rangle \text{ und } g_F = 2/3,$$

wodurch sich in beiden Fällen ein effektives magnetisches Moment von

$$\mu = m_F g_F \mu_B = 1 \mu_B$$

ergibt. Typische Magnetfallen erreichen Fallentiefen von 10 bis einigen 100 Gauss, was einer Potentialtiefe im Bereich von wenigen Millikelvin entspricht.

Eine weitere Bedingung für das Speichern von Atomen (zumindest auf der Erde) ist die Überwindung der Schwerkraft. Die von einem Magnetfeldgradienten auf ein Atom ausgeübte Kraft ist:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r}) = \mu \vec{\nabla}B(\vec{r}). \quad (3.3)$$

Der mindestens benötigte Feldgradient in Richtung der Schwerkraft ist also

$$\alpha_g = \frac{d}{dz} B = \frac{m}{\mu} g. \quad (3.4)$$

Für Rubidium entspricht dies dem Wert 15.2 G/cm, für Lithium dem Wert 1.1 G/cm. Lineare Fallen werden durch die Wirkung der Schwerkraft 'verkippt', in Fallen mit quadratischem Potentialverlauf sacken die Atome durch den zusätzlichen Gradienten etwas durch (gravitational sag).

## 3.2 Sphärische Quadrupolfalle

Mit der Annahme eines in alle Raumrichtungen linear verlaufenden Magnetfelds

$$\vec{B}_{QP}(\vec{r}) = (\alpha_x x, \alpha_y y, \alpha_z z) \quad (3.5)$$

mit den Richtungsgradienten  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$ ,  $\alpha_z$  und den Maxwell-Gleichungen folgt direkt:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{dB_x}{dx} + \frac{dB_y}{dy} + \frac{dB_z}{dz} = \alpha_x + \alpha_y + \alpha_z = 0. \quad (3.6)$$

Für  $\alpha_z = 0$  ergibt sich ein linearer Quadrupol mit  $\alpha_x = -\alpha_y$ , für den zylindersymmetrischen Fall  $\alpha_r = \alpha_x = \alpha_y$  ein sphärischer Quadrupol mit  $\alpha_r = -1/2\alpha_z$ .

Das für den Einschluss von Atomen benötigte Potential ergibt sich zu:

$$U_{QP}(\vec{r}) = -\mu |\vec{B}_{QP}(\vec{r})| = -\mu \sqrt{\alpha_x^2 x^2 + \alpha_y^2 y^2 + \alpha_z^2 z^2}. \quad (3.7)$$

Da der Kraftvektor  $\mu \vec{\nabla} |B_{QP}(\vec{r})|$  hier nur an speziellen Orten radial gerichtet ist (gilt allgemein nur für ein isotropes harmonisches Potential) erkennt man direkt, dass die Bewegung eines Atoms in der Falle nicht in unabhängige Einzelbewegungen entlang der Koordinaten separierbar ist. Als Folge ist der Drehimpuls  $L$  des Atoms keine Erhaltungsgröße.

Der sphärische Quadrupol kann sehr einfach durch zwei entlang der selben Achse angeordneten Spulen mit gegeneinander gepolten Magnetfeldern (Anti-Helmholtz-Anordnung) realisiert werden. In der Umgebung des so erzeugten Magnetfeldnullpunkts zwischen den Spulen verläuft das Feld linear, in größerem Abstand zum Zentrum gilt diese Näherung nicht mehr.

Die erste Magnetfalle [Mig85], in der Atome gespeichert werden konnten war eine sphärische Quadrupolfalle. Diese Technik ist auch heute noch sehr verbreitet, da sich mit dem Quadrupol sehr effiziente und tiefe magnetische Transferszenarien für Atome im Temperaturbereich von  $100 \mu\text{K}$  und heißer realisieren lassen. Eine Speicherung von kälteren Atomwolken, insbesondere Bose-Einstein-Kondensaten ist jedoch nicht möglich, da hier starke Verluste, sogenannte Majorana-Spinflips, auftreten und die Lebensdauer eines Atoms in der Falle drastisch reduzieren.

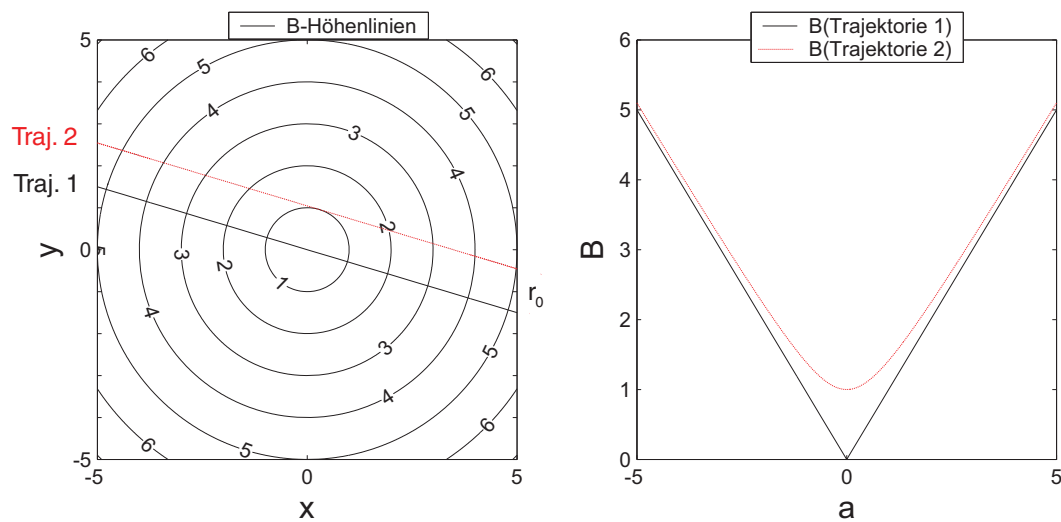
### 3.2.1 Lebensdauer in der sphärischen Quadrupolfalle

Majorana-Spinflips treten dann auf, wenn Atome die oben genannte Adiabazitätsbedingung nicht mehr erfüllen können, da sie sich zu nahe am Nullpunkt des Magnetfelds bewegen. Hier nimmt die Larmorfrequenz  $\omega_L = \mu B$  stark ab, die Änderung des Magnetfelds dagegen stark zu. Auf diese Weise werden Übergänge zu Zuständen mit anderen Magnetquantenzahlen, die nicht mehr gefangen sind, möglich.

Für die zu erwartende Lebensdauer in Abhängigkeit von der Temperatur kann folgende Abschätzung in Erweiterung der Überlegungen von Petrich [Pet95] gemacht werden. Vereinfachend wird ein Magnetfeld mit dem isotropen Gradienten  $\alpha$  (Modellannahme, nicht realisierbar) angenommen.

Atome die sich in der Falle direkt durch den Nullpunkt (Trajektorie 1 in Abb. 3.1) bewegen klappen ihren Spin auf jeden Fall um und gehen verloren, da sich die Richtung des Feldes hier schlagartig umkehrt und der Spin nicht adiabatisch folgen kann. Für Atome hingegen, die sich im Abstand  $r_0$  am Ursprung vorbei bewegen (Trajektorie 2 in Abb. 3.1) dreht sich das Feld mit endlicher Geschwindigkeit. Man erkennt leicht, dass sich das Feld, das ein solches Atom sieht, in zwei Komponenten zerlegen lässt: Ein homogenes Feld  $B_{\perp} = B_0$  senkrecht zur Ebene und das lineare Feld  $B_{\parallel}(a) = \alpha a$  mit Nulldurchgang in der Ebene. Der Betrag des Magnetfelds  $B(a) = \sqrt{\alpha^2 a^2 + B_0^2}$  entlang der Trajektorie hat den in der rechten Grafik von Abb. 3.1 gezeigten Verlauf.

Zur Beschreibung des Spinflips als Landau-Zener-Übergang ([Rub81], siehe auch Kapitel 5.1.1) betrachtet man die Energiedifferenz  $\Delta$  zwischen dem gefangenen Zustand des Atoms und dem Zustand nach dem Spinflip in Abhängigkeit vom Ver-



**Abbildung 3.1:** Die linke Grafik zeigt eine Höhenliniendarstellung des linearen Feldes in der  $xy$ -Ebene. Es sind zwei Trajektorien für Atome in dem Potential eingezeichnet. Trajektorie 1 zeigt den Pfad eines Atoms, das sich genau durch den Magnetfeldnullpunkt bewegt. Atome auf diesem Pfad klappen ihren Spin auf jeden Fall um und sind damit aus der Falle verloren. Trajektorie 2 zeigt den Pfad eines Atoms, das sich im Abstand  $r_0$  am Ursprung vorbei bewegt. Die rechte Grafik zeigt den räumlichen Verlauf des Magnetfeldbetrags auf der Trajektorie. Der lineare Feldverlauf wird in der Nähe des Ursprungs abgerundet und unterschreitet den Wert  $B_0$  nicht.

lauf des Feldes  $B_{\parallel}$ . Am Nullpunkt sind beide Zustände entartet und kreuzen sich (Level-crossing). Das Feld  $B_{\perp}$  kann als Kopplung der Zustände  $V = \Delta m_F g_F \mu_B B_0$  interpretiert werden, wodurch die Entartung bei Betrachtung in der adiabatischen Basis (Dressed-State Bild) aufgehoben wird. Laut Sukumar et al. gilt für Spinflips in erster Näherung die Auswahlregel  $\Delta m_F = \pm 1$ , der Spin klappt also bevorzugt in energetisch benachbarte Zustände um.

Die Spinflipwahrscheinlichkeit ist

$$P = 1 - e^{-2\pi\Gamma} \quad \text{mit} \quad \Gamma = \frac{V^2}{4\hbar \frac{d}{dt} \Delta}. \quad (3.8)$$

Die Verstimmrate

$$\frac{d}{dt} \Delta = \frac{d\Delta}{da} \cdot \frac{da}{dt} = \Delta m_F g_F \mu_B \alpha \cdot v \quad (3.9)$$

ergibt sich mit der Geschwindigkeit  $v = \frac{da}{dt}$  des Atoms am Ort des Übergangs. Zusammen mit  $B_0 = \alpha r_0$  erhält man

$$\Gamma = \frac{g_F \mu_B \alpha r_0^2}{4\hbar v}. \quad (3.10)$$

Damit lässt sich der Radius  $r_0$  der Kugel ermitteln, innerhalb der durchfliegende Atome höchstens mit der Wahrscheinlichkeit  $1/e$  in der Falle verbleiben können:

$$r_0 = \left( \frac{2\hbar v}{\pi g_F \mu_B \alpha} \right)^{1/2}. \quad (3.11)$$

Da am Fallenboden die volle thermische Energie der Atome als kinetische Energie vorliegt, kann die mittlere thermische Geschwindigkeit mit  $v = \sqrt{2k_B T/m}$  angesetzt werden. Für eine Rb-Wolke der Temperatur von  $T = 50 \mu\text{K}$  in einer Falle mit dem Gradienten  $\alpha = 140 \text{ G/cm}$  hat das Loch in der Mitte der Falle damit den Radius  $r_0 = 1.2 \mu\text{m}$ .

Die Dichteverteilung der Atome in der radialsymmetrischen linearen Falle (Modellannahme) ist

$$n(r) = n_0 \cdot \exp\left(-\frac{g_F m_F \mu_B \alpha \cdot r}{k_B T}\right) \quad \text{mit} \quad n_0 = \frac{N}{8\pi} \left(\frac{g_F m_F \mu_B \alpha}{k_B T}\right)^3 \quad (3.12)$$

Für Temperaturen  $T \gg \frac{r_0 \alpha}{k_B}$  kann man also annehmen, dass die Dichte in Bereich des Lochs mit Radius  $r_0$  konstant ist und den Wert  $n_0$  annimmt. Der Fluss der Atome

durch das Loch ist in dieser Näherung

$$\Phi = n_0 \cdot v \cdot A_{Loch} = n_0 \cdot v \cdot 4\pi r_0^2 \quad (3.13)$$

und die Lebensdauer  $\tau$  der Atome kann durch Einsetzen der Werte als

$$\tau = \frac{N}{\Phi} = \frac{\pi m}{2\hbar m_F} \left( \frac{k_B T}{g_F \mu_B \alpha} \right)^2 \quad (3.14)$$

bestimmt werden.

Eine Korrektur der zu Beginn der Überlegungen gemachten Annahme, dass die Falle radialsymmetrisch sei ergibt für den realen Quadrupol (Lochoberfläche wird Ellipsoid) mit  $\alpha_z = 2\alpha$  eine Lebensdauer

$$\tau_{QP} = 0.7 \cdot \tau. \quad (3.15)$$

Für Rubidium erhält man mit dieser Abschätzung bei einem Gradienten von  $\alpha = 140$  G/cm und einer Temperatur von  $T = 200 \mu\text{K}$  die Lebensdauer  $\tau_{QP} = 136$  s, bei  $T = 100 \mu\text{K}$  sind es 34s und bei  $T = 10 \mu\text{K}$  nur noch 0.3 s. Bei Lithium ist die Lebensdauer schon bei  $T = 400 \mu\text{K}$  nur 28s, bei  $T = 100 \mu\text{K}$  ganze 1.8s.

Diese grobe Abschätzung scheint die Lebensdauern etwas zu unterschätzen, deckt sich aber trotzdem ganz gut mit unseren Beobachtungen in der Praxis. Besonders für die durch ihre geringe Masse nur sehr kurz speicherbaren Lithiumatome ist es daher essentiell eine Falle zu verwenden, die auch für sehr kalte Atome nur sehr geringe Verlustraten hat.

### 3.3 Die Ioffefalle

Das Konzept der Ioffefalle ([Ber87, Got62]) stammt aus der Plasmaphysik und realisiert Magnetfallen, deren Feldbetrag im ganzen Fallenvolumen keine Werte annimmt, die kleiner als ein positives Offsetfeld  $B_0 > 0$  sind. Als direkte Folge davon hat die Larmorfrequenz  $\omega_L = \mu B$  der Atome in der Falle eine untere Grenze, die bewirkt, dass Spinflipverluste im Minimum um Größenordnungen unterdrückt werden können.

Die Einführung dieses Nullfelds geht gezwungenermaßen mit einer Aufhebung der Symmetrie einher. Das Magnetfeld hat als Vektorgröße im Minimum eine bestimmte Richtung und den Betrag  $B_0 \neq 0$ .

### 3.3.1 Das Ioffeprinzip

Um eine Ioffefalle zu erhalten, genügt es bei einem sphärischen Quadrupol eine Komponente des Felds durch eine Funktion ohne Nulldurchgang zu ersetzen. Das durch Betragsbildung gewonnene Potential hat dann auch keine Nullstelle mehr.

Realisiert werden kann dies, indem man das Feld eines linearen Quadrupols ( $\alpha_z = 0$ ,  $\alpha_r = \alpha_x = -\alpha_y$ ) mit einem zusätzlichen Einschluss in z-Richtung kombiniert. Dieser kann im Minimum am einfachsten durch den Ausdruck

$$B_z(r = 0, z) = B_0 + 1/2\beta_z z^2 \quad (3.16)$$

mit der axialen Krümmung  $\beta_z$  und dem Offsetfeld  $B_0 > 0$  beschrieben werden. Aufgrund der Maxwell'schen Gleichungen für quellenfreie Gebiete muss der Feldverlauf für kleine Abstände  $r$  zur Achse um zusätzliche radiale und axiale Komponenten ergänzt werden, die sich mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung für Zylindersymmetrie (Gleichungen 2.10 und 2.11) von Kapitel 2.2 einfach zu

$$B_z(r, z) = B_0 + 1/2\beta_z(z^2 - 1/2r^2) \quad (3.17)$$

$$B_r(r, z) = -1/2\beta_z r z \quad (3.18)$$

bestimmen lassen. Kombiniert ergibt sich aus radialem (lin. Quadrupol) und axialem Einschluss das Vektorfeld

$$\vec{B}_J(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix} + 1/2\beta_z \begin{pmatrix} -xz \\ -yz \\ z^2 - 1/2(x^2 + y^2) \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

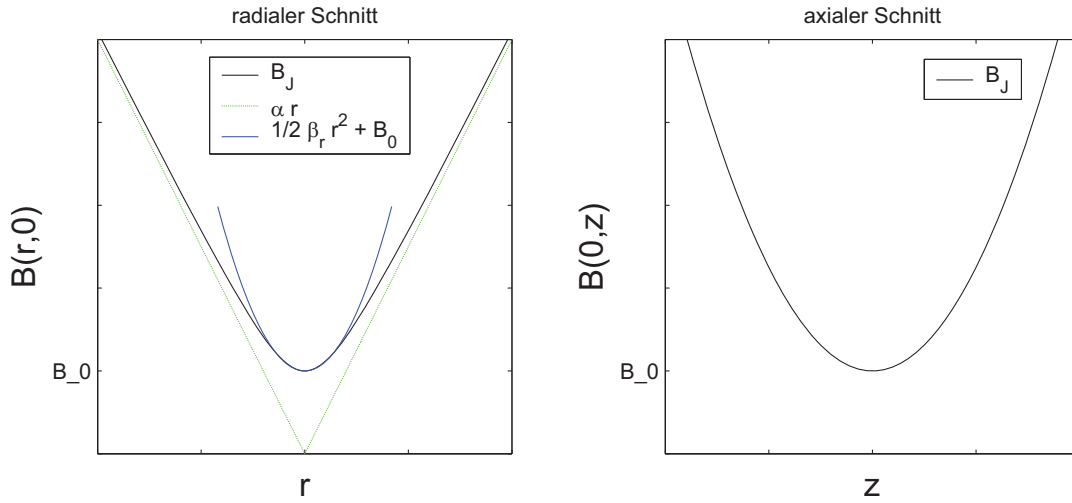
für die Ioffefalle.

Abbildung 3.2 zeigt den Verlauf des Feldebetrags im radialen und axialen Schnitt. In radialer Richtung wird das Potential des linearen Quadrupols für kleine  $r$  abgerundet. Eine Reihenentwicklung um den Ursprung zeigt den in erster Näherung quadratischen Verlauf

$$B_J(r, 0) \approx B_0 + 1/2\beta_r r^2 \quad (3.20)$$

mit der Krümmung

$$\beta_r = \frac{\alpha^2}{B_0} - \beta_z \approx \frac{\alpha^2}{B_0}. \quad (3.21)$$



**Abbildung 3.2:** Schnitte durch das Minimum der Ioffefalle. Am radialen Schnitt erkennt man die Modifikation des ursprünglichen linearen Quadrupolfelds. Für große  $r$  bleibt es nahezu unverändert ( $B = \alpha r$ ), für kleine  $r$  ist es abgerundet und lässt sich durch  $B = B_0 + 1/2\beta_r r^2$  annähern. Sehr kalte Atome sehen so in radialer Richtung einen quadratischen, heiße Atome einen linearen Einschluss. Der axiale Schnitt zeigt den quadratischen Verlauf gemäß dem obigen Ansatz.

In axialer Richtung ist der quadratische Verlauf durch Konstruktion gegeben.

Sehr kalte Atomensembles, wie Bose-Einstein-Kondensate oder Fermigase, befinden sich vollständig im quadratischen Teil des Potentials, wo dieses sehr gut durch das harmonische Oszillatorpotential angenähert werden kann. Die Fallenfrequenzen  $\omega$  folgen direkt aus den Krümmungen:

$$\omega_r = \sqrt{\frac{\mu}{m}\beta_r} \approx \sqrt{\frac{\mu}{m}\frac{\alpha^2}{B_0}} \quad \text{bzw.} \quad \omega_z = \sqrt{\frac{\mu}{m}\beta_z} \quad (3.22)$$

Hier geht das magnetische Moment  $\mu$  und die Masse  $m$  eines Atoms ein. Heiße Atome bewegen sich in einem Potential, das sich radial näherungsweise linear und axial quadratisch verhält.

In der Praxis wird der axiale Einschluss meist sehr schwach gewählt, so dass die zentrale Dichte durch den Gradient in radialer Richtung bestimmt wird. Im Vergleich zur sphärischen Quadrupolfalle mit linearem Einschluss in allen drei Raumrichtungen erreicht man im Minimum keine so hohen Dichten.



### 3.3.2 Lebensdauer in der Ioffefalle

Zwar sind nichtadiabatische Spinflipverluste in Ioffefallen gegenüber vergleichbaren Quadrupolfallen deutlich unterdrückt, bei steilen Fallen oder geringen Offsetfeldern sind sie jedoch trotzdem möglich.

Eine quantitative Abschätzung für die Übergangsrate wird in Sukumar et. al [Suk97] gezeigt. Aus einer quantenmechanischen Betrachtung bestimmt der Autor das Übergangsmatrixelement für Atome im Grundzustand (Bose-Einstein-Kondensat) in den nächsttieferen Zustand mit  $\Delta m_F = \pm 1$ . Er bestimmt die Übergangsrate für den Grundzustand zu

$$w \approx \frac{\pi\omega}{2} \exp\left(-\frac{E_0}{2\hbar\omega}\right), \quad (3.23)$$

wobei  $\omega$  die Fallenfrequenz und  $E_0 = 2\mu_B B_0 + \hbar\omega$  die kinetische Energie des Atoms nach einem Übergang ist.

Selbst für die hohe Fallenfrequenz  $\omega = 2\pi \cdot 10$  kHz und ein Offsetfeld  $B_0 = 0.5$  Gauss ist die Übergangsrate für Rb mit  $w = 88$  Hz entsprechend der Lebensdauer von ungefähr 11 ms noch recht moderat. Bei typischen Fallendaten ist dieser Verlustkanal völlig zu vernachlässigen, weil Lebensdauern von mehreren Minuten ohne Einschränkungen möglich sind. Für eine untere Abschätzung der Lebensdauer genügt es außerdem, die Richtung mit der größten Fallenfrequenz zu betrachten.

Kritischer ist die Spinfliprate bei thermischen Atomen mit einer Temperatur  $T$ . Wie beim Quadrupol steigt die Wahrscheinlichkeit eines Spinflips mit der mittleren Geschwindigkeit der Atome im Fallenminimum an. Sukumar leitet für  $k_B T > 2\hbar\omega$  in einer harmonischen Falle den folgenden Ausdruck her:

$$w = \frac{\pi\hbar\omega^2}{k_B T} \exp\left(-\frac{E_0}{k_B T}\right). \quad (3.24)$$

Da eine Ioffefalle in radialer Richtung nur für sehr kleine Auslenkungen harmonisch ist, heiße Atome aber auch sehr große Schwingungsamplituden haben können, muss eine Fallunterscheidung gemacht werden.

Der abgerundete harmonische Bereich der Ioffefalle liegt innerhalb eines Radius  $r_0 = B_0/\alpha$ . Für  $\mu B_0 \gg k_B T$  befindet sich die Atomwolke komplett in diesem Bereich und Ausdruck 3.24 kann mit  $\omega = \sqrt{\mu\alpha^2/mB_0}$  direkt in die Lebensdauer der Wolke

umgewandelt werden.

$$\tau = 1/w = \frac{k_B T}{\pi \hbar} \cdot \frac{m B_0}{\mu \alpha^2} \cdot \exp\left(\frac{2\mu B_0}{k_B T}\right) \quad (3.25)$$

Im Falle von  $\mu B_0 \ll k_B T$  befinden sich die Atome vor allem im linearen Bereich des Potentials. Geht man davon aus, dass Spinflips nur nahe am Minimum, im runden Bereich der Falle erfolgen, verlängert sich die Lebensdauer gegenüber dem obigen Fall um einen Faktor  $k = T/T'$ , wobei  $T$  die Periodendauer einer gesamten Schwingung im linearen Bereich und  $T'$  die Dauer des Aufenthalts im runden Bereich ist.

Eine Schwingung im linearen Potential mit dem Gradienten  $\alpha$  braucht die Zeit  $T = \sqrt{32a_0 m / \alpha \mu}$  und ist im Unterschied zum harmonischen Potential von der maximalen Amplitude des Atoms abhängig. Ein mittleres Atom mit der Energie  $k_B T$  erreicht seinen äußeren Umkehrpunkt bei der Auslenkung  $a_0 = k_B T / \mu \alpha$ , womit sich  $T = \sqrt{32 m k_B T / \mu^2 \alpha^2}$  ergibt. Die Geschwindigkeit des Atoms im Minimum ist  $v_{min} = \sqrt{2 k_B T / m}$  und damit die Dauer für zwei Durchflüge durch die Abrundung  $T' = 2r_0 / v_{min} = 2B_0 / \alpha \cdot \sqrt{m / 2 k_B T}$ . Zusammengenommen wird die Lebensdauer um den Faktor

$$k = \frac{T}{T'} = \frac{4 k_B T}{\mu B} \quad (3.26)$$

verlängert:

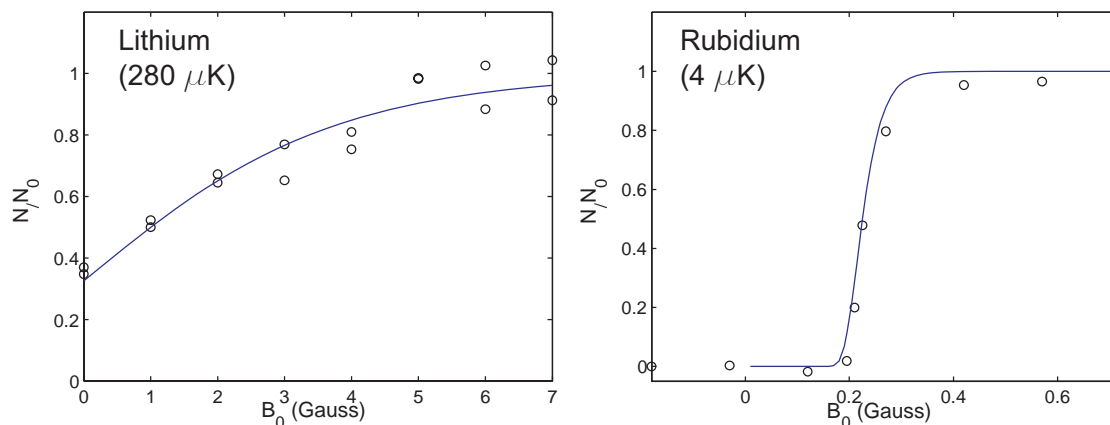
$$\tau = \frac{k}{w} = \frac{4}{\pi} \frac{m}{\hbar} \left(\frac{k_B T}{\mu \alpha}\right)^2 \exp\left(\frac{2\mu B_0}{k_B T}\right). \quad (3.27)$$

Dieser Ausdruck steht in sehr guter Übereinstimmung mit unseren experimentellen Beobachtungen. Hierzu wurden Atomwolken einer festen Temperatur bei verschiedenen Offsetfeldern  $B_0$  in der Falle gehalten und untersucht, welcher Anteil der ursprünglich  $N_0$  Atome nach einer Zeit  $t_0$  noch vorhanden war. Man erwartet, dass nach einer Haltezeit  $t$  noch der Anteil

$$\frac{N}{N_0} = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (3.28)$$

in der Falle ist.

Abbildung 3.3 zeigt die Beobachtungen für Lithium- und Rubidiumatome nach einer Haltezeit von 3 s bzw 10 s. Man erkennt dass der Anteil heißer Lithiumatome nach



**Abbildung 3.3:** Anteil der in der Falle verbliebenen Atome nach einer festen Wartezeit. Die Beobachtungen wurden für Lithiumatome einer Temperatur von  $280 \mu\text{K}$  nach einer Haltezeit  $t=3 \text{ s}$  und für Rubidiumatome einer Temperatur von  $4 \mu\text{K}$  und einer Haltezeit von  $t=10 \text{ s}$  gemacht.

3 s auch für  $B_0=0$  noch nicht ganz verschwunden ist. Dieser Wert stimmt recht gut mit der für Atome im Quadrupol nach Gleichung 3.15 erwarteten Größe überein. Die aus beiden Modellen gewonnenen Lebensdauern unterscheiden sich zwar um einen Faktor 1.5, da der verbleibende Anteil aber weit stärker von der Temperatur und dem Offsetfeld abhängt, macht dies keinen großen Unterschied. Für Rubidiumatome bei der Temperatur  $T=4 \mu\text{K}$  ist man im Bereich  $\mu B_0 \gg k_B T$ , weshalb hier Gleichung 3.25 angewandt werden muss.

### 3.3.3 Ioffe-Geometrie und Instabilitäten

Das Ioffeprinzip, wie es im Abschnitt 3.3.1 eingeführt wurde, ist eine modellhafte Grundidee. Je nach verwendeter Geometrie und Realisierung durch verschiedene Feldelemente gibt es Vorteile und Begrenzungen bezüglich Falltiefe und Stärke des Einschlusses. Zur näheren Untersuchung wird ein allgemeineres Modell betrachtet.

Analog zum vorgestellten Ioffeprinzip ist der radiale Einschluss hier durch einen

linearen Quadrupol

$$\vec{B}_{linQP}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \alpha_r x \\ -\alpha_r y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

mit dem radialen Gradient  $\alpha_r$  gegeben. In Erweiterung zum vorigen Modell wird der Einschluss auf der  $z$ -Achse hier aber durch eine beliebige Funktion  $B_J(z)$  ersetzt, die sich im Punkt  $z = z_0$  entwickeln lässt:

$$B_J(z - z_0) = B_J(z_0) + B'_J(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2}B''_J(z_0)(z - z_0)^2. \quad (3.30)$$

Unter der Annahme von Zylindersymmetrie für den  $z$ -Einschluss kann nun die Potenzreihenentwicklung nach den Gleichungen 2.10 und 2.11 durchgeführt werden und man erhält die Ausdrücke

$$B_z(r, z - z_0) = B_J(z_0) + B'_J(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2}B''_J(z_0) [(z - z_0)^2 - \frac{1}{2}r^2] \quad (3.31)$$

$$B_r(r, z - z_0) = -\frac{1}{2}B'_J(z_0)r. \quad (3.32)$$

Das Feld der Ioffefalle in der Umgebung des Punkts  $\vec{r} = (0, 0, z_0)$  ist damit

$$\vec{B}_J(x, y, z - z_0) = \begin{pmatrix} [\alpha_r - \frac{1}{2}B'_J(z_0)] x \\ -[\alpha_r + \frac{1}{2}B'_J(z_0)] y \\ B_J(z_0) + B'_J(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2}B''_J(z_0) [(z - z_0)^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)] \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

Eine Betrachtung der  $x$ - und  $y$ -Komponente des Ioffefelds legt nun schon nahe, dass der radiale Gradient je nach Betrag und Vorzeichen von  $B'_J(z_0)$  verstärkt, abgeschwächt oder sogar aufgehoben werden kann. Die Wirkung auf die beiden Komponenten ist genau entgegengesetzt.

Erfüllt der Betrag des Ioffefelds eine der Bedingungen

$$\left. \frac{d^2}{dx^2} B_J(x, 0, z_0) \right|_{x=0} = 0 \quad \text{oder} \quad \left. \frac{d^2}{dy^2} B_J(0, y, z_0) \right|_{y=0} = 0, \quad (3.34)$$

so ist der radiale Einschluss im Punkt  $(0, 0, z_0)$  aufgehoben und man spricht von einem Instabilitätspunkt der Falle. Einsetzen und Umformen führt zu

$$B_J(z_0) = \frac{(2\alpha_r \pm B'_J(z_0))^2}{2B''_J(z_0)} \quad (\text{zylindrisches Ioffefeld}), \quad (3.35)$$

einem einfachen Kriterium für Instabilitätspunkte unter Annahme von Zylindersymmetrie des Ioffefelds. Wenn das Kriterium erfüllt ist, verschwindet die Krümmung des Potentials entweder in x-Richtung (-) oder in y-Richtung (+). Die funktionale Darstellung des Kriteriums eignet sich gut für die numerische oder grafische Bestimmung der Instabilitäten aus den Schnittpunkten der rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Kriteriums-Funktion mit dem Ioffefeld  $B_J(z)$  selbst.

Da Atome in einer Ioffefalle an Instabilitätspunkten keinen Einschluss erfahren, beschränken diese die nutzbare Potentialtiefe der Falle massiv. Beim Fallendesign muss deshalb darauf geachtet werden, dass diese nicht oder erst bei so hohen Feldern auftreten, dass die Funktionalität der Falle nicht beschränkt wird.

Analog zur Betrachtung für ein zylindersymmetrisches Ioffefeld kann der Ansatz für Instabilitäten auch für ein planares System mit xz-Ebenenymmetrie gemacht werden. Da hier das Feld der Ioffefalle

$$\vec{B}_J(x, y, z - z_0) = \begin{pmatrix} [\alpha_r - B'_J(z_0)] x \\ -\alpha_r y \\ B_J(z_0) + B'_J(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2}B''_J(z_0) [(z - z_0)^2 - x^2] \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

in der y-Komponente dem ursprünglichen Quadrupol entspricht, ist eine Instabilität in dieser Richtung vollständig unterdrückt. Für Instabilitäten in x-Richtung wird das Kriterium zu:

$$B_J(z_0) = \frac{(\alpha_r + B'_J(z_0))^2}{B''_J(z_0)} \quad (\text{planares Ioffefeld}). \quad (3.37)$$

Im Folgenden werden verschiedene Ioffegeometrien und Konfigurationen der Ioffefalle auf ihre Instabilitäten untersucht.

### Die Standard-Ioffefalle

Die mit dem Ioffeprinzip eingeführte Ioffefalle könnte man als Standardversion ansehen, da sie am einfachsten verständlich und sehr verbreitet ist. Die Kombination von Elementen, die einen linearen Quadrupol erzeugen, mit Elementen, die für einen zumindest näherungsweise harmonischen Einschluss in der verbliebenen Richtung sorgen, ergibt sich direkt aus den obigen Überlegungen. Realisiert wird sie z.B. in der klassischen Ioffefalle [Ber87, Got62] mit vier Ioffebars und Pinchcoils oder der Cloverleaf-Anordnung [Mew96] aus der Gruppe von Ketterle.

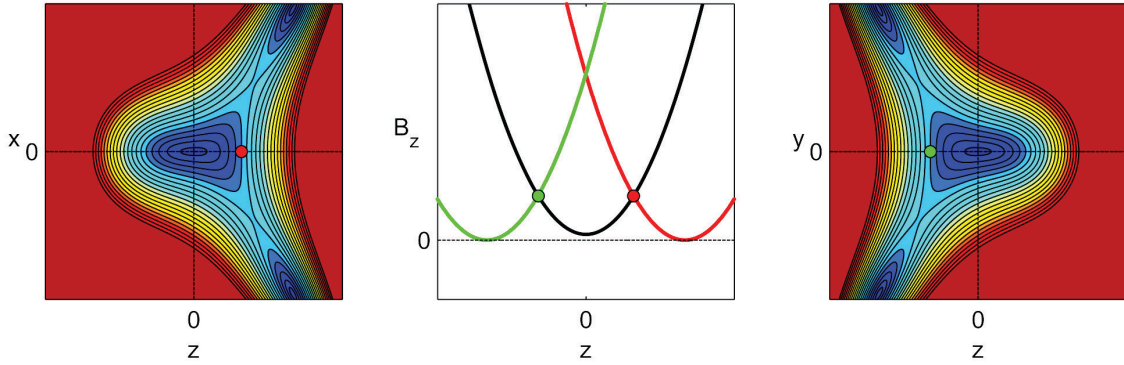
Ausgehend von dem Ansatz

$$B_z(r=0, z) = B_0 + 1/2\beta_z z^2 \quad (3.38)$$

mit der Krümmung  $\beta_z$  und dem Offsetfeld  $B_0$  im Minimum der Falle erhält man durch das Kriterium 3.35 (zylindrische Anordnung) Instabilitätspunkte an den Orten

$$z_{inst} = \pm \left( \frac{\alpha_r}{\beta_z} - \frac{1}{2} \frac{B_0}{\alpha_r} \right) = \pm \frac{B_0}{\alpha_r} \left( \lambda^2 - \frac{1}{2} \right) \approx \pm \frac{B_0}{\alpha_r} \lambda^2 \quad (3.39)$$

auf der  $z$ -Achse (siehe auch [Ket99]). Diese sind in den in Abbildung 3.4 dargestellten Schnitten durch das Fallenvolumen markiert. Man erkennt die von den Instabilitäten

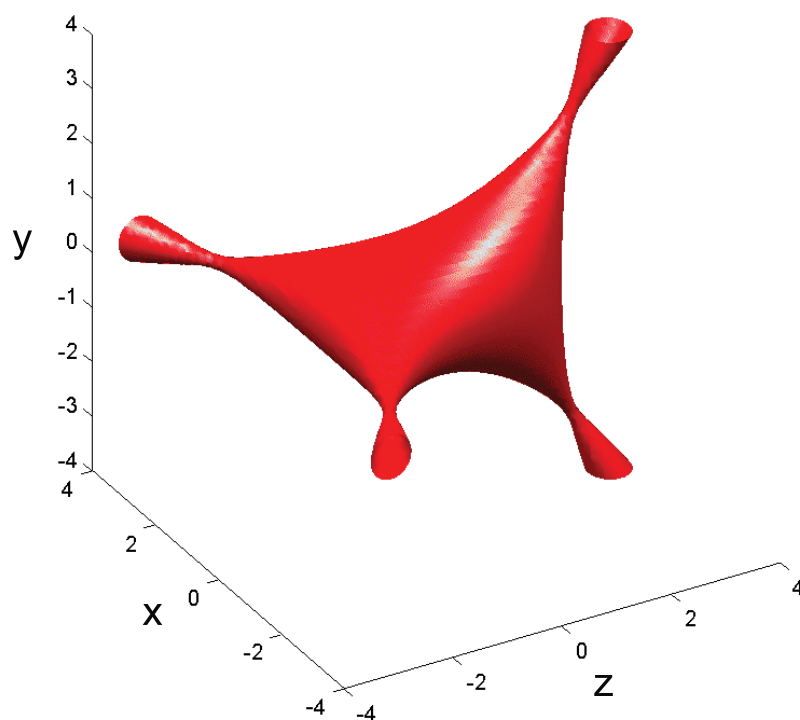


**Abbildung 3.4:** Schnitte durch das Fallenvolumen einer Standard-Ioffefalle in der  $xz$ - und  $yz$ -Ebene. Eingezeichnete Äquipotentiallinien veranschaulichen den Betrag des Magnetfelds. Im der mittleren Grafik ist das Feld auf der  $z$ -Achse (schwarz) und die nach Gleichung 3.35 korrespondierenden Funktionen (Instabilitätskriterium) für die  $xz$ -Ebene (rot), sowie die  $yz$ -Ebene (grün) dargestellt. Die durch gefüllte Kreise hervorgehobenen Schnittpunkte markieren die Orte der Instabilitäten  $z_{inst}$  auf der  $z$ -Achse.

ausgehenden armartigen Ausläufer der Äquipotentiallinien, die die Tiefe des Fallenvolumens über Sattelpunkte begrenzen. Der Wert von  $z_{inst}$  hängt quadratisch vom Aspektverhältnis der Falle  $\lambda = \sqrt{\frac{\beta_r}{\beta_z}} = \frac{\omega_r}{\omega_z}$  ab, das für typische Fallen Werte von ca. 10 und höher annimmt, so dass die Näherung (letzter Schritt in 3.39) in den meisten Fällen gilt. Abbildung 3.5 verdeutlicht den räumlichen Verlauf einer Potentialfläche knapp über den begrenzenden Sattelpunkten. Man erkennt die im rechten Winkel zueinander stehenden Ausläufer in der  $xz$ - und  $yz$ -Ebene.

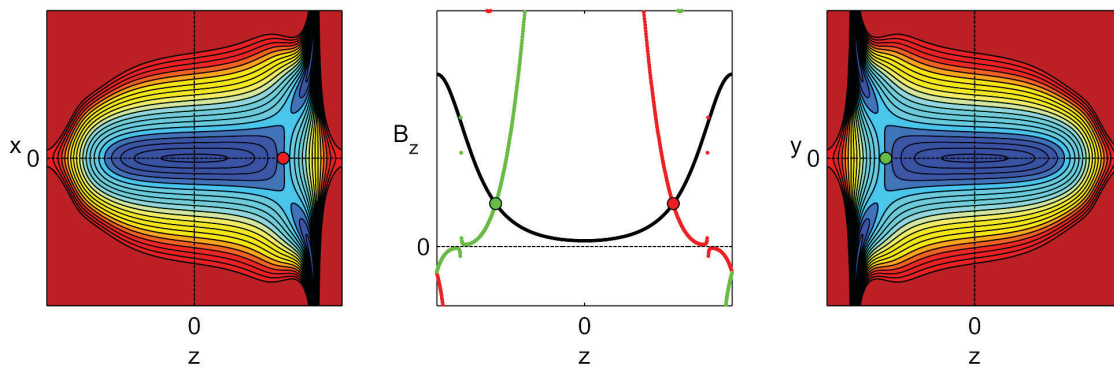
Die Tiefe des Potentials bis zur Instabilität im harmonischen Ioffefeld ergibt sich zu

$$h_{inst} \approx \frac{\alpha^2}{\beta} = \frac{1}{2} B_0 \lambda^2, \quad (3.40)$$



**Abbildung 3.5:** Räumlicher Verlauf einer Potentialfläche knapp über den begrenzenden Sattelpunkten der Standard-Ioffefalle. Man erkennt die im rechten Winkel zueinander stehenden Ausläufer in der  $xz$ - und  $yz$ -Ebene, die von den Orten  $\pm z_{inst}$  auf der  $z$ -Achse ausgehen und die Tiefe der Falle begrenzen.

weshalb dieser Fallentyp mit einem möglichst großen Aspektverhältnis verwendet werden sollte. Gleichung 3.40 erweckt den Anschein, als ob eine Erhöhung des Offsetfelds  $B_0$  die Fallentiefe vergrößern würde. Dies ist aber nicht der Fall, weil das Aspektverhältnis der Falle sich dabei auch ändert. Mit den Kriterien kann man in Abb. 3.4 direkt ablesen, dass die Fallentiefe sogar abnimmt. Da die Kriterien nur von Ableitungen des Ioffefelds abhängen, ändert sich bei Erhöhung von  $B_0$  nur das Feld, die Schnittpunkte wandern weiter zur Mitte und die Fallentiefe wird geringer.

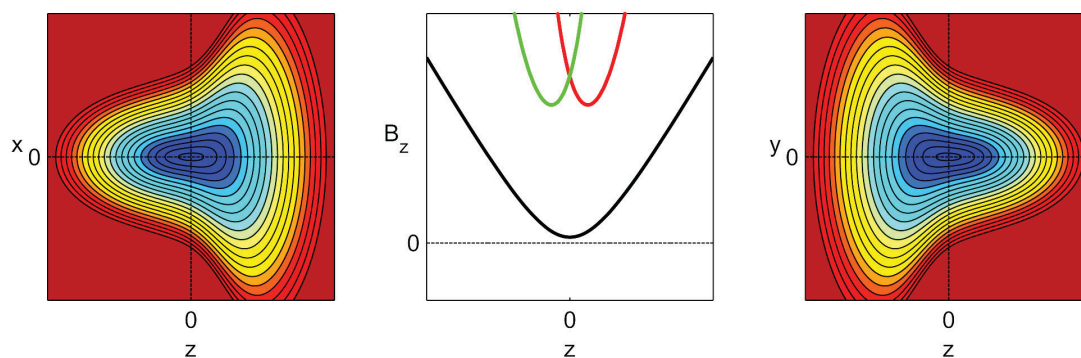


**Abbildung 3.6:** Schnitte durch das Fallenvolumen einer Ioffefalle mit nicht harmonischem Verlauf. Der Verlauf entspricht dem Feld zwischen zwei Spulen (pinchcoils), die so weit auseinander liegen, dass die Krümmung des Felds in der Mitte kleiner ist, als am Rand. Man erkennt, dass das in der Mitte realisierte große Aspektverhältnis die Instabilitäten am Rand nicht verhindert.

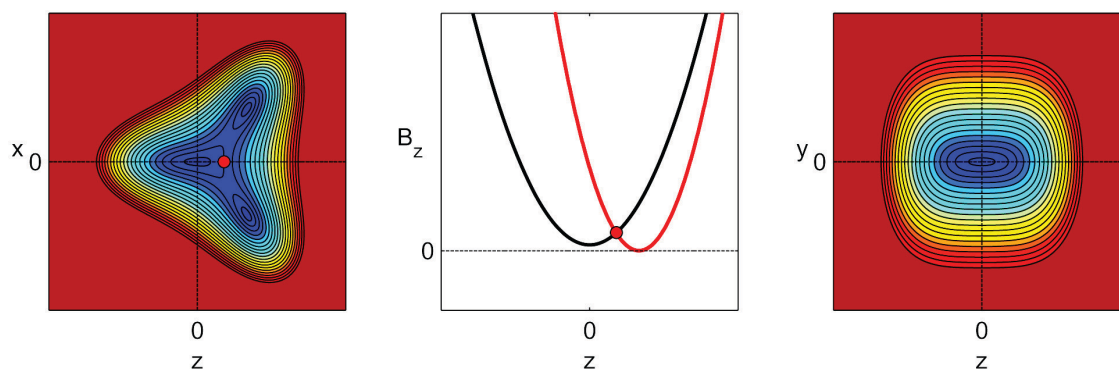
Beim harmonischen Ioffefeld war es möglich die Instabilitätskriterien direkt einzusetzen und so die Orte auf der  $z$ -Achse analytisch zu bekommen. Für kompliziertere Verläufe, wie sie in der Realität meist vorliegen müssen die Schnittpunkte numerisch bestimmt werden. Abbildung 3.6 veranschaulicht den Fall des Feldes zwischen zwei Spulen, die so weit voneinander entfernt sind, dass die Krümmung in der Mitte kleiner ist, als am Rand. Trotz des hohen Aspektverhältnisses im Minimum der Falle treten hier sehr ausgeprägte Instabilitäten auf.

Besonders günstig im Bezug auf Instabilitäten wäre ein Ioffefeld der Form  $B_J(z) = \sqrt{(\alpha_z z)^2 + B_0^2}$  (Abb. 3.7). Da die zweite Ableitung von  $B_J$  mit dem Abstand vom Minimum gegen Null geht, die erste Ableitung aber gegen einen konstanten Wert ansteigt, wird das Kriterium für eine Instabilität nie erfüllt. In der Praxis ist ein solcher Feldverlauf nur durch komplexere Anordnungen von Feldelementen zu realisieren.





**Abbildung 3.7:** Schnitte durch das Fallenvolumen einer Ioffefalle mit dem konstruierten Ioffefeld  $B_J(z) = \sqrt{(\alpha_z z)^2 + B_0^2}$ . Im Bezug auf Instabilitäten ist dieser Verlauf besonders günstig. Da die zweite Ableitung (Krümmung) von  $B_J$  mit dem Abstand vom Minimum gegen Null geht und die erste Ableitung gegen einen konstanten Wert ansteigt, wird das Kriterium für eine Instabilität nicht erfüllt. Man erkennt, dass der Einschluss sehr asymmetrisch ist. Auf jeweils einer Seite verringern die Querkomponenten des Ioffefelds den Einschluss, auf der anderen Seite wird er verstärkt.



**Abbildung 3.8:** Schnitte durch das Fallenvolumen einer harmonischen Falle mit planarer Ioffegeometrie. Durch die veränderte Geometrie ist diese Ioffefalle nur in der  $xz$ -Ebene instabil. Die andere Instabilität ist dafür aber besonders ausgeprägt.

Zur Verdeutlichung des Einflusses der Geometrie zeigt Abbildung 3.8 den zur obigen harmonischen Falle analogen Fall mit planarer Geometrie. Das Ioffefeld hat in diesem Fall keine Komponenten in y-Richtung und eine der Instabilitäten verschwindet (Kriterium 3.37). Die andere ist dafür besonders gravierend.

### Die asymmetrische Ioffefalle

Ein alternativer Ansatz ist das Prinzip der asymmetrischen Ioffefalle. Im Gegensatz zur Standard-Ioffefalle geht man hier von einem sphärischen Quadrupolfeld

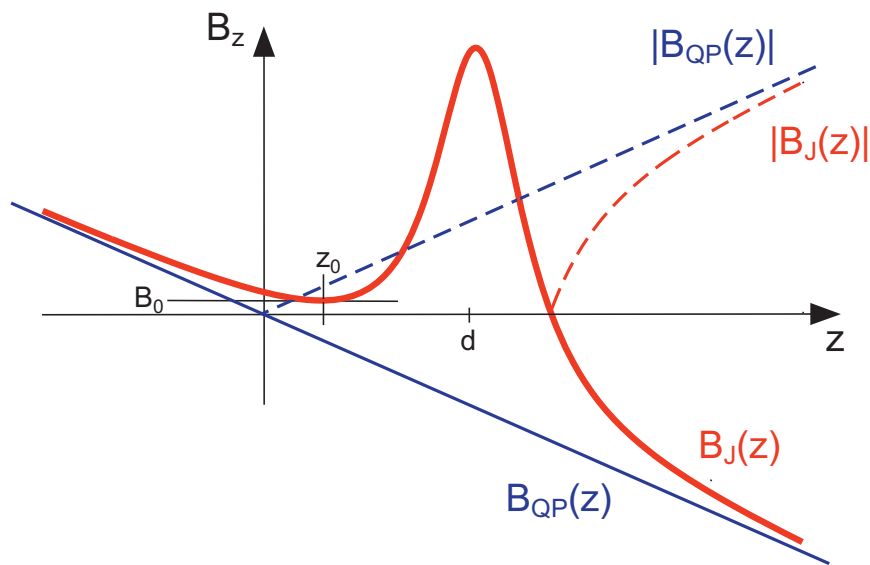
$$\vec{B}_{QP}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -\alpha x \\ 2\alpha y \\ -\alpha z \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

aus und addiert quer zur Symmetrieachse des Quadrupols (hier in Richtung z-Achse) ein Feld, das den Gradienten des Quadrupols lokal aufhebt und dadurch einen Einschluss in dieser Richtung ohne Nullstelle möglich macht. Abbildung 3.9 zeigt dies für den Fall einer Spule oder Ähnlichem (im Folgenden Lorentz-Element genannt), das im Abstand  $d$  zum Ursprung ein Feld in Form einer Lorentzkurve erzeugt. Bei ausreichender Amplitude dieses zusätzlichen Elements wird die Nullstelle des Quadrupols lokal angehoben und es entsteht eine Ioffefalle, die um den Abstand  $z_0$  zum Ursprung verschoben ist.

Die Möglichkeit, die Amplitude des Lorentz-Elements stetig bis auf den notwendigen Wert zu erhöhen, formt den sphärischen Quadrupol adiabatisch in die Ioffefalle um. Im Quadrupol gespeicherte Atome werden so in die Ioffefalle überführt, ohne sie dabei aufzuheizen. Dieser Transfer wird Kapitel 4.1.3 noch ausführlicher betrachtet.

Die asymmetrische Ioffefalle ist insofern asymmetrisch, dass das Feld auf der von dem Lorentz-Element abgewandten Seite in das lineare Feld des zugrundeliegenden Quadrupols übergeht, auf der anderen Seite aber näherungsweise exponentiell ansteigt. Instabilitätspunkte auf der linearen Seite sind wegen der dort verschwindenden Krümmung stark unterdrückt.

Weil die asymmetrische Ioffefalle quer zur Achse des sphärischen Quadrupols gebildet wird, müssen die Kriterien für Instabilitätspunkte neu formuliert werden. Der Gradient in y-Richtung ist doppelt so groß wie in x-Richtung, so dass die Instabi-



**Abbildung 3.9:** Grundprinzip der asymmetrischen Ioffefalle. Wird zur  $z$ -Komponente des Quadrupolfelds  $B_{QP}(z) = -\alpha z$  ein um den Abstand  $d$  zum Ursprung verschobenes Feld in Form einer Lorentzkurve addiert, so bildet sich bei ausreichender Amplitude des zusätzlichen Felds ein lokales Minimum mit  $B_0 > 0$ . Das Minimum des so entstandenen Ioffefelds  $B_J(z)$  liegt um den Abstand  $z_0$  in Richtung Maximum der Lorentzkurve verschoben. Im Unterschied zur ursprünglichen Quadrupolfalle entsteht das auf Atome wirkende Potential in dieser Richtung nicht mehr durch Betragsbildung, sondern durch ein lokales Minimum.

litätskriterien für die asymmetrische Ioffefalle zu

$$B_J(z_0) = \frac{(2\alpha_r + B'_J(z_0))^2}{2B''_J(z_0)} \quad (\text{xz - Ebene, zyl. Ioffefeld}), \quad (3.42)$$

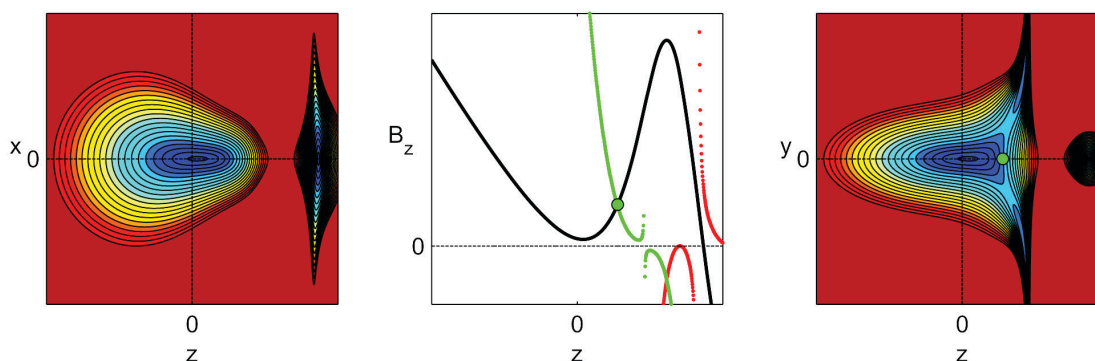
$$B_J(z_0) = \frac{(4\alpha_r - B'_J(z_0))^2}{2B''_J(z_0)} \quad (\text{yz - Ebene, zyl. Ioffefeld}), \quad (3.43)$$

und

$$B_J(z_0) = \frac{(\alpha + B'_J(z_0))^2}{B''_J(z_0)} \quad (\text{xz - Ebene, plan. Ioffefeld}) \quad (3.44)$$

werden.

Bei der asymmetrischen Ioffefalle mit zylindrischem Ioffefeld ist das Lorentz-Element durch eine Spule oder Leiterschleife realisiert. Diese Konfiguration ist unter dem Namen Quic-Ioffefalle ("Quadrupole-Ioffe-Coil-Falle") [Ess99] bekannt und kommt in vielen Experimenten mit Bose-Einstein-Kondensaten zum Einsatz.

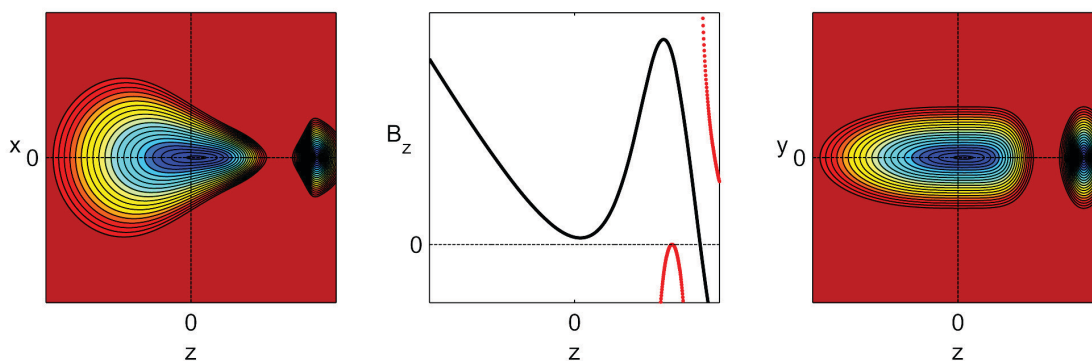


**Abbildung 3.10:** Schnitte durch das Fallenvolumen der Quic-Ioffefalle (Asymmetrische Ioffefalle mit zylindrischer Ioffegeometrie). Auf der linearen Seite des Ioffefelds (in der xz-Ebene) ist im Vergleich zur symmetrischen Ioffefalle keine Instabilität mehr vorhanden. Die Instabilität auf der Seite des Lorentz-Elements begrenzt die Potentialtiefe.

Wie zu erwarten (Abb. 3.10) ist die Instabilität hier auf der linearen Seite des Ioffefelds völlig unterdrückt. Die Instabilität in der yz-Ebene ist zwar abgeschwächt (doppelter Gradient), bleibt aber vorhanden und wirkt sich besonders bei hohen Offsetfeldern sehr beschränkend aus.

Die Realisierung einer Falle ohne Instabilitäten kann durch geschickte Kombination des asymmetrischen Potentials mit einem planaren Ioffefeld erreicht werden. Bei

der im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Doppeldraht-Ioffefalle realisieren parallel verlaufende Drähte das Lorentz-Element. Durch die ebenensymmetrische Situation (planarer Fall) wird die in der Quic-Ioffefalle noch verbliebende Instabilität aus geometrischen Gründen grundsätzlich verhindert.



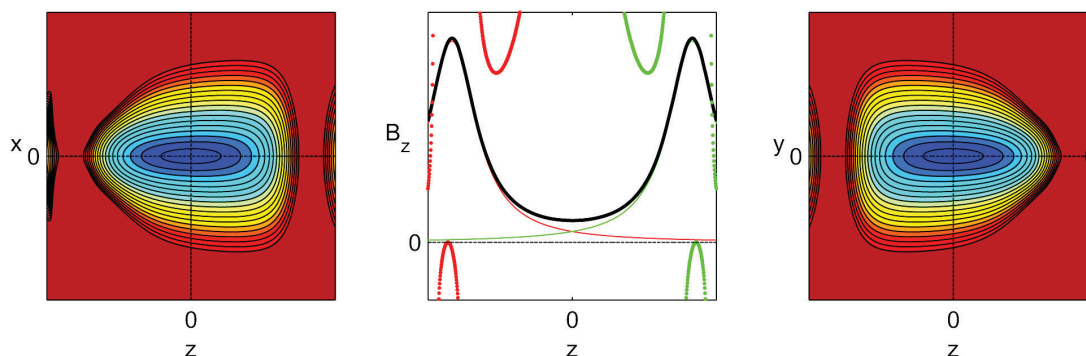
**Abbildung 3.11:** Schnitte durch das Fallenvolumen einer Doppeldraht-Ioffefalle (Asymmetrische Ioffefalle mit planarer Ioffegeometrie). Bei der Doppeldraht-Ioffefalle sind sämtliche Instabilitäten unterdrückt, da die aus geometrischen Gründen noch mögliche Instabilität durch den asymmetrischen Verlauf des Ioffefelds verhindert wird. Der nahezu kreisförmige Verlauf der Äquipotentiallinien in der  $xz$ -Ebene zeigt das zugrundeliegende Quadrupolfeld, dessen Gradient in der Nähe des Lorentz-Elements durch zusätzliche radiale Komponenten verstärkt wird. Die Falltiefe ist bei dieser Anordnung nur noch durch das maximale Feld zwischen den Drähten auf der  $z$ -Achse begrenzt.

Abbildung 3.11 zeigt Schnitte durch das Fallenvolumen einer Doppeldraht-Ioffefalle. Man sieht gut, dass der Einschluss im gesamten Bereich gegeben ist. Da keine anderen Einschränkungen vorliegen, ist der Maximalwert des Ioffefelds auf der  $z$ -Achse hier das die Falltiefe beschränkende Element. Variation des Abstands  $d$  des Elements vom Ort des Quadrupols, der Ströme in den Drähten und der Lücke zwischen den Drähten bieten hier Möglichkeiten zur Optimierung.

### Die Baseball-Ioffefalle

Die Baseball-Ioffefalle ist eine weitere Falle, die alle Prinzipien zur Vermeidung von Instabilitäten vereinigt. Die Grundidee ist sehr analog zur symmetrischen Ioffefalle mit dem linearen Quadrupolfeld und einem separaten Einschluss in Iofferrichtung. Im entscheidenden Unterschied zur Standard-Ioffefalle werden jedoch keine zylindri-

schen Spulen (Fall in Abb. 3.4) oder gleich orientierte, ebenensymmetrische Drähte (siehe Abb. 3.8), sondern zwei zueinander gekreuzte Drahtpaare verwendet. Wie bei der Doppeldraht-Ioffefalle wirken die Drähte jeweils nur auf einer Seite des entstehenden Ioffepotentials, wodurch Instabilitäten stark unterdrückt sind.

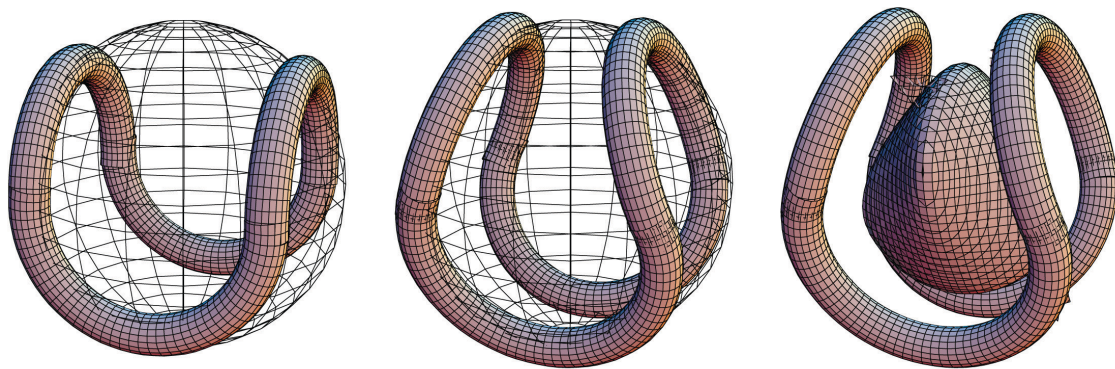


**Abbildung 3.12:** Schnitte durch das Fallenvolumen einer Ioffefalle mit gekreuzten Lorentzelementen (modellhafte Baseball-Ioffefalle). Da die beiden Drahtpaare gekreuzt angeordnet sind, gilt jeweils nur ein Instabilitätskriterium für jedes Element. Das Feld auf der  $z$ -Achse zeigt einen ähnlichen Verlauf wie bei der symmetrischen Ioffefalle.

Abbildung 3.12 zeigt Schnitte durch das Fallenvolumen der Ioffefalle mit gekreuzten Lorentzelementen. Wie bei der Doppeldrahtfalle ist die Fallentiefe nur durch die Amplitude der Feldelemente begrenzt.

Der Übergang von dieser sehr modellhaften Falle zur Basefall-Ioffefalle bringt weitere Vorteile in Bezug auf einen optimierten Einschluss bei festen Strömen. Die Baseball-Ioffefalle [Ber87, Mya97] besteht aus vier Kreisbogensegmenten, die zu einem geschlossenen Pfad aneinandergereiht auf der Oberfläche einer Kugel verlaufen. Abbildung 3.13 veranschaulicht das Prinzip.

Die Baseball-Ioffefalle ist ein sehr simpler Aufbau, wodurch sie sich besonders für Miniaturisierung und eine Realisierung aus nur einem Draht eignet. Dass alle Feldelemente zu einem einzigen verschmolzen sind, ist Vor- und Nachteil der Baseballfalle zugleich. Die Falle kann mit nur einer Stromquelle betrieben werden. Das Offsetfeld im Minimum und die Stärke des Einschlusses sind jedoch durch die feststehende Geometrie miteinander verbunden und können nicht separat eingestellt werden. Der Transfer von Atomen in die Falle ist im Gegensatz zur asymmetrischen Ioffefalle nur auf nicht-adiabatische Weise möglich.



**Abbildung 3.13:** Die felderzeugenden Elemente der Baseball-Ioffefalle sind aus vier Kreisbogensegmenten zusammengesetzt, die auf einer Kugel verlaufen. Die Darstellung ganz links zeigt die einfachste Form. Die vertikal verlaufenden Segmente können mit den vier Ioffebars (linearer Quadrupol), die horizontalen Teile als gekreuzte Drahtpaare identifiziert werden. Eine Konstellation dieser Art entsteht z.B., wenn eine Spule um die Arme eines Vier-Wege-Kreuzstücks gewickelt wird [Mya97]. Optimierung im Bezug auf die Fallentiefe führt zur mittleren Darstellung, wo die Kreissegmente oben und unten einander zugeneigt sind. Der Verlauf erinnert sehr an den Verlauf der Naht eines Tennis- oder Baseballs. Im rechten Bild ist zusätzlich eine räumliche Äquipotentialfläche, die knapp unterhalb des Fallenrands verläuft, eingezeichnet.

# Kapitel 4

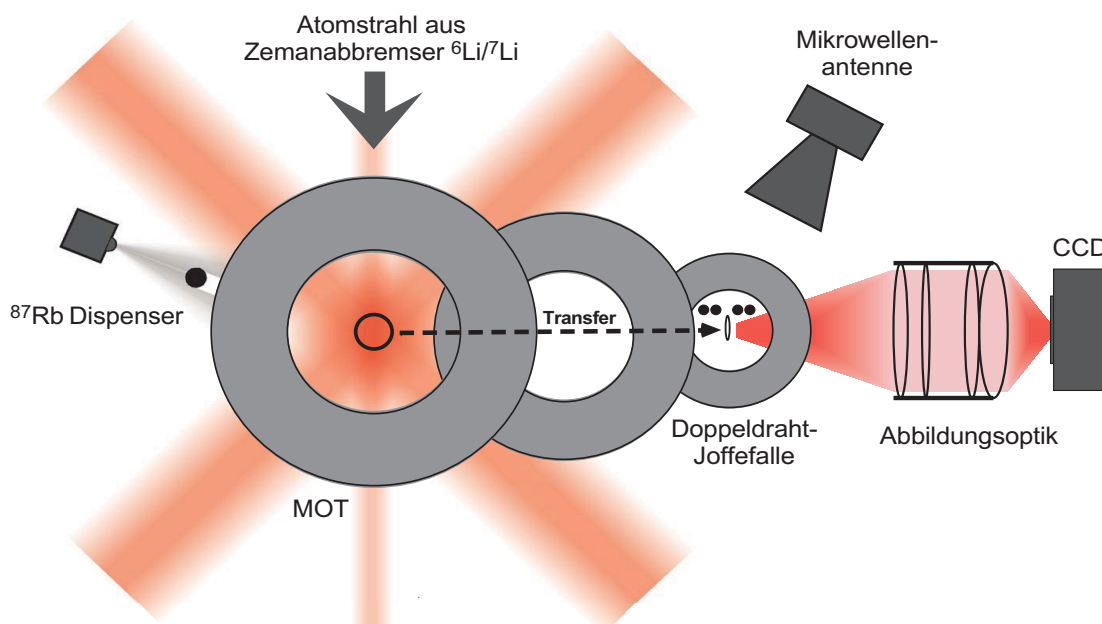
## Realisierte Magnetfalle

Der in unserem Experiment verwirklichte Aufbau beherbergt alle Elemente der Magnetfalle im Vakuum. Im Vergleich mit der in anderen Experimenten meist üblichen Praxis, sämtliche Spulen der Falle außen um eine evakuierte Glaszelle oder Vakuumkammer anzuordnen, hat man hier den Vorteil, dass die Falle miniaturisiert werden und damit effizienter sein kann. Die für den Einschluss der kalten Atome notwendigen Gradienten und Krümmungen des Felds können bei geringerem Abstand der Atome zu Spulen und Drähten schon mit einem Bruchteil der sonst erforderlichen Ströme und der damit verbundenen Verlustleistung erzeugt werden. Die trotz geringer Leistung nötige Wärmeabfuhr und die Wahl der fürs Ultrahoch-Vakuum tauglichen Materialien ist in unserem Aufbau etwas aufwändiger, bereitet aber keine unlösbaren Schwierigkeiten.

Abbildung 4.1 zeigt den schematischen Aufbau und das Funktionsprinzip der Apparatur. Die im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Doppeldraht-Ioffefalle bildet das Herzstück des Aufbaus. Das folgende Kapitel beschreibt zunächst das Prinzip und die Kenngrößen der von uns realisierten Falle. Der Betrieb der Falle mit verschiedenen Parametern ermöglicht die Variation des Fallenpotentials in einem weiten Bereich. Für Abschätzungen und numerische Auswertungen werden Näherungsverfahren für das Potential vorgestellt. Der Prozess des Ioffetransfers und damit verbundene Limitierungen für die Fallentiefe werden diskutiert.

Kapitel 4.2 beschreibt die Funktionsweise und Realisierung der im Aufbau integrierten Mikrofalle. Das Fallenminimum der Doppeldraht-Ioffefalle kann adiabatisch in





**Abbildung 4.1:** Schematischer Aufbau und Funktionsprinzip der Apparatur. Die Bereitstellung kalter Atome erfolgt im ersten Schritt durch eine magneto-optische Falle (MOT), welche im größten Spulenpaar (ganz links) im Kreuzungspunkt der aus sechs Raumrichtungen eingestrahlten Laserstrahlen betrieben wird. Rubidiumatome ( ${}^{87}\text{Rb}$ ) werden aus einem gepulst betriebenen Dispenser [For98b] geladen, die wesentlich leichteren Lithiumatome ( ${}^6\text{Li}$  und  ${}^7\text{Li}$ ) stammen aus einem Atomstrahl, der beim Durchlauf durch einen Zeemanabbremsers [Sil00] auf moderate Geschwindigkeiten abgebremst wurde. Nach der Mot-Phase werden die Atome optisch in den richtigen Zustand gepumpt und in den Quadrupol zwischen den Mot-Spulen umgeladen. Die nun magnetisch gespeicherten Atome werden durch adiabatische Verformung und Verschiebung des Potentials (Tripeltransfer, Kapitel 4.3) in den Quadrupol der Fallenspulen (ganz rechts) transferiert. Durch anschließenden Ioffetransfer (Kapitel 4.1.3) und evaporatives Kühlen mit Mikrowellenstrahlung in der Doppeldraht-Ioffefalle können entartete Atomensembles präpariert werden. Messungen basieren fast ausschließlich auf Absorptionenaufnahmen, die mit einer CCD-Kamera aufgezeichnet und digital ausgewertet werden.

den weit stärkeren Einschluss in der Nähe der Mikrodrähte umgeformt werden. Für bestimmte Betriebsparameter wird der radiale Verlauf des Potentials anharmonisch ( $U \propto r^4$ ), so dass eingeschlossene Atome andere physikalische Eigenschaften, als in harmonischen Fallen zeigen.

Die von uns "Tripeltransfer" genannte adiabatische Übergabe der Atomwolke aus dem Quadrupol der Mot-Spulen, über die Transfer-Spulen in die Fallen-Spulen nach dem Prinzip eines magnetischen Förderbands [Gre01, Hän01, Sch01b] ist Thema von Kapitel 4.3. Die Kinematik des bewegten Fallenminimums und Auswirkungen der bei uns durch die sequentiell kleiner werdenden Spulen gleichzeitig bewirkten adiabatischen Kompression werden vorgestellt.

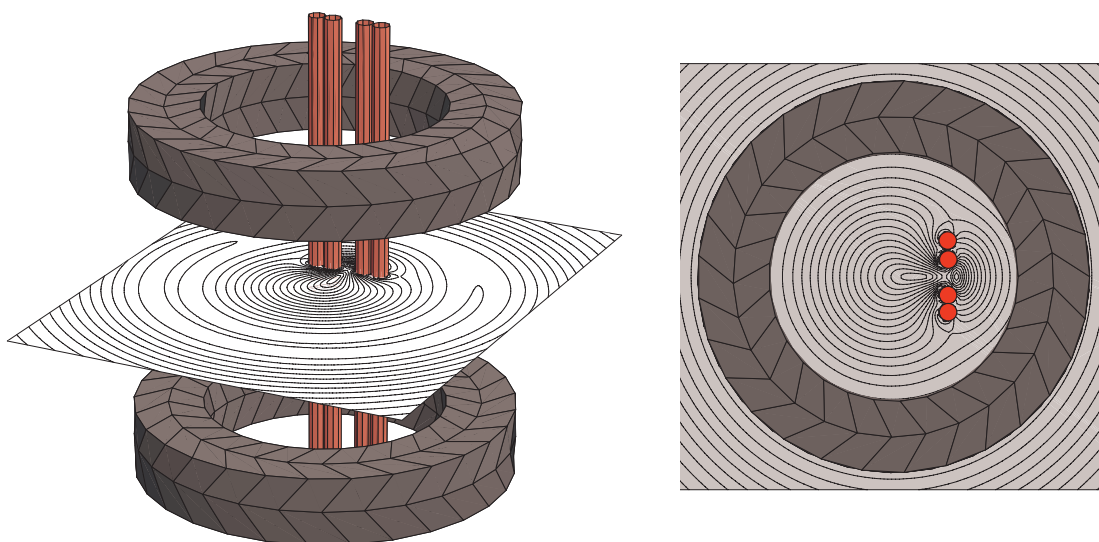
## 4.1 Doppeldraht-Ioffefalle

Das Prinzip der Doppeldraht-Ioffefalle basiert auf der Grundidee der asymmetrischen Ioffefalle, die in Kapitel 3.3.3 vorgestellt wurde. Grundelement ist ein durch zwei Spulen in Anti-Helmholtz-Anordnung (achsengleich, gegengepolt) erzeugtes sphärisches Quadrupolfeld, das durch ein zusätzliches, quer zur Symmetrieachse angebrachtes Feldelement zur Ioffefalle modifiziert wird. Anders als bei der Quic-Ioffefalle [Ess99] wird das Lorentzelement nicht durch eine zylindresymmetrische Spule, sondern durch eine ebenensymmetrische Anordnung parallel verlaufender Drähte erzeugt. Die Diskussion der Instabilitäten der Ioffefalle unter verschiedenen Symmetrien des Lorentzelements (Kapitel 3.3.3) zeigte, dass durch die planare Anordnung keine Instabilitätspunkte auftreten können.

Die Problematik der Instabilitäten ist insbesondere für miniaturisierte Fallen problematisch. Instabilitäten ergeben sich aus der Feldgeometrie, wodurch sie bei größeren Feldelementen auch erst bei höheren Feldern auftreten. Bei hohen Offsetfeldern oder kleinen Aspektverhältnissen werden die Instabilitäten jedoch so gravierend, dass sie sich meist nicht mehr kompensieren lassen. In sehr kleinen Fallen befindet sich das Potentialminimum immer im Nahfeld der Feldelemente, so dass hier eigentlich nur die Doppeldraht-Ioffefalle ein ausreichend tiefes Potential erzeugen kann.

Eine Abwandlung des planaren Prinzips, die Draht-Ioffefalle mit einem einzelnen Draht [For98a], hat sich besonders in Verbindung mit Mikrofallen sehr bewährt. Sie

bietet in diesem Umfeld den entscheidenden Vorteil, dass das Potentialminimum einfach durch Verschiebung des Quadrupolminimums entlang der Quadrupolachse positionierbar ist. Auf diese Weise können zunächst im Zentrum der Spulen gespeicherte Atome adiabatisch entlang der Spulenachse z.B. an eine darüber angebrachte Mikrostruktur transferiert und dort gespeichert werden [Ott03]. Mit der Doppeldraht-Ioffefalle funktioniert dieses Verfahren auf dieselbe Weise, sie bietet jedoch zusätzlich einen stärkeren Einschluss (Fallenfrequenzen), eine einfachere Geometrie (Symmetrieebene), sowie ein tieferes Fallenpotential bei ähnlichen Parametern.



**Abbildung 4.2:** Doppeldraht-Ioffefalle. Ansicht der felderzeugenden Elemente (links). Draufsicht (rechts). Zusätzlich ist in der Mittelebene eine Fläche mit Äquipotentiallinien eingezeichnet, an denen die Form des Fallenpotentials erkennbar ist.

Da die Tiefe der Falle bei der Doppeldraht-Ioffefalle nur noch durch den Maximalwert des Felds zwischen den Ioffedrähten begrenzt ist, sollte der Abstand der Drähte möglichst klein gewählt werden. Liegen die Drähte zu eng beieinander, nehmen die Querkomponenten des Ioffefelds fern der Achse stark zu und die Fallentiefe wird durch Interferenzen auf der Außenseite der Drähte begrenzt. Instabile Punkte dieser Art wurden bei den Betrachtungen aus Kapitel 3.3.3 nicht berücksichtigt. Sie treten nur auf, wenn das Ioffeelement sehr klein wird, sein Feld also nur noch lokal wirkt.

Die in unserem Aufbau verwendete Doppeldraht-Ioffefalle (Abbildung 4.2) hat vier parallel verlaufende Ioffedrähte. Bei dieser Konstellation ist es nun möglich, den

Abstand der Ioffedrähte zu verkleinern, weil das viel homogenere Feld der weiter außen angebrachten zusätzlichen Drähte die Bildung von Instabilitäten drastisch abschwächt.

Am Grundprinzip der Doppeldraht-Ioffefalle ändert sich nichts, da die äußeren Drähte das Feld der innenliegenden Drähte auf der Achse nur verstärken. Die Möglichkeit, sie auch mit gegenläufigen Strömen zu betreiben, ist besonders beim Ioffetransfer (Abschnitt 4.1.3) sehr wichtig.

### 4.1.1 Realisierung und Kenndaten

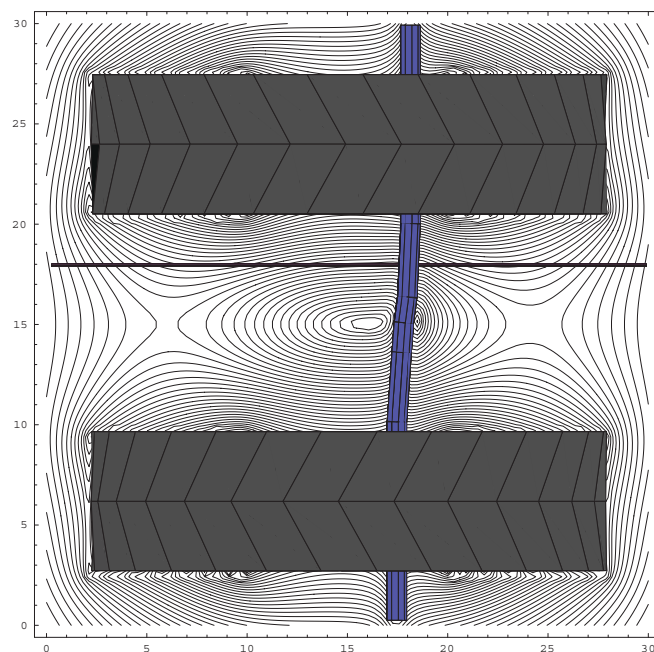
Die Doppeldraht-Ioffefalle, wie sie in unserer Apparatur realisiert ist, besteht aus zwei gleichen Spulen (70 Windungen, Durchmesser innen 10 mm, außen 26 mm, Dicke 7 mm), die in Anti-Helmholtz-Konfiguration (Abstand Mitte-Mitte 18 mm) angeordnet sind. Die vier Ioffedrähte (Durchmesser 0.9 mm, mit Kapton-Isolation 1.2 mm) verlaufen parallel zur Spulenachse in einer Ebene im Abstand von 3 mm. Der seitliche Abstand der inneren Ioffedrähte beträgt 1.6 mm, der der äußeren Ioffedrähte 4 mm. Ungenauigkeiten bei der Befestigung der Drähte auf einem als Wärmesenke benötigten Kupferblock an der vom Fallenzentrum abgewandten Seite haben bewirkt, dass der wirkliche Verlauf der Ioffedrähte unten leicht in Richtung Fallenzentrum geneigt ist.

Da die Parameter der Ioffefalle von der realen Geometrie sehr empfindlich abhängen, konnten die im Aufbau vorliegenden Abmessungen sehr genau aus Messungen rekonstruiert werden. Das Fallenpotential wurde dazu für einen typischen Parametersatz genauer untersucht:

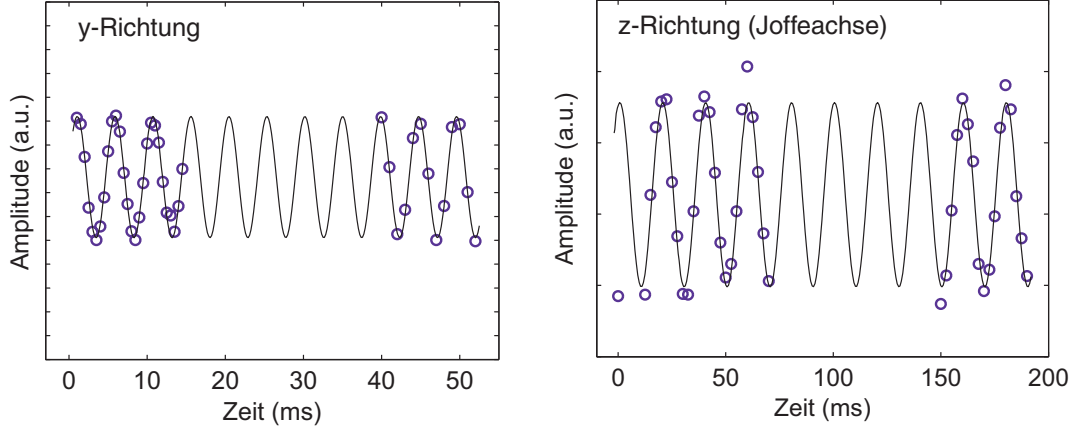
$I_{\text{Spulen}}$	5 A
$I_{\text{Ioffe,innen}}$	6.5 A
$I_{\text{Ioffe,außen}}$	12 A

Die elektrische Leistung der Doppeldraht-Ioffefalle mit diesen Strömen ist mit knapp 17 W sehr gering.

Zur Bestimmung der Fallenfrequenzen im Minimum der Ioffefalle wird ein Bose-Einstein Kondensat ( $^{87}\text{Rb}$ ) aus der Ruhelage ausgelenkt und seine Schwingung in



**Abbildung 4.3:** Seitenansicht mit dem realen Verlauf der Ioffedrähte. Die Äquipotentiallinien auf der Mittelebene zeigen die Auswirkungen auf das Potential. Die Ioffeachse ist als Folge der schrägen Drähte auch verkippt.



**Abbildung 4.4:** Schwingendes Bose-Einstein-Kondensat in der Ioffefalle. Das Kondensat wird in Schwingung versetzt und die auf der Abszisse angezeigte Zeit lang gewartet. Dann wird die Falle schlagartig ausgeschaltet und nach einer freien Flugzeit von 10 ms wird der Ort des Kondensats festgestellt. Die im linken Plot dargestellte Schwingung in y-Richtung (vertikal) hat eine Kreisfrequenz von  $\omega_y = 2\pi \cdot 206$  Hz, die Schwingung in z-Richtung (Ioffe-Richtung) eine Kreisfrequenz von  $\omega_z = 2\pi \cdot 50$  Hz.

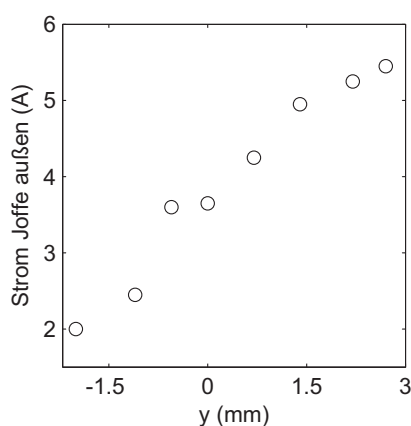
der zur Beobachtungsrichtung senkrecht stehenden Ebene aufgezeichnet. Durch eine Auslenkung von nur wenigen Mikrometern verläuft das Potential im getesteten Bereich fast vollständig harmonisch, so dass die Frequenzen durch Anpassung einer Sinusfunktion (Abbildung 4.4) sehr genau gewonnen werden konnten. Die Fallenfrequenzen ergeben sich zu

$$\omega_y = (205,94 \pm 0.32) \cdot 2\pi \text{ Hz} \quad \text{und} \quad \omega_z = (50.10 \pm 0.83) \cdot 2\pi \text{ Hz}.$$

In der verwendeten Konvention liegt die z-Achse in Ioffe-Richtung, die y-Achse parallel zur vertikalen Spulenachse und die x-Achse quer dazu. Da  $\omega_y = \sqrt{\frac{\mu}{m} \frac{4\alpha^2}{B_0}}$  (Herleitung siehe Abschnitt 4.1.2) nur vom Gradienten  $\alpha$  der Quadrupols und dem Offsetfeld im Minimum  $B_0$  abhängt, kann das Offsetfeld mit Kenntnis des Gradienten sehr gut bestimmt werden. Es ist legitim, den Gradienten ( $\alpha = 141.25$  G/cm) aus Simulationen zu bestimmen, da die Spulen sehr genau positioniert und damit gut berechenbar sind. Das Offsetfeld ergibt sich zu  $B_0 = 3.07$  Gauss.

Die Untersuchung der Falle ist bisher auf das symmetrisch zwischen den Spulen liegende Zentrum der Falle beschränkt. Zur Bestimmung des genauen Verlaufs der

verkippten Ioffedrähte muss die Falle in der Höhe verschoben werden, was durch asymmetrische Ströme in der oberen und unteren Fallenspule geschehen kann (siehe auch 4.2.1). Für diese Messung erweist es sich als sehr nützlich, dass eine Atomwolke mit einer Temperatur von wenigen  $\mu\text{K}$  in einer Quadrupolfalle sehr schnell zerfällt. Schon ein sehr geringes Offsetfeld kann die Atome stabilisieren (Kapitel 3.3.2). Durch Bestimmung des gerade zur Stabilisierung einer Wolke ausreichenden Mindeststroms in den Ioffedrähten kann man den Nullpunkt der Ioffefalle sehr genau bestimmen.



**Abbildung 4.5:** Bestimmung des Verlaufs der Ioffedrähte. Die Abszisse des Graphen ist die Verschiebung der Falle in  $y$ -Richtung (Spulenachse, parallel zu den Ioffedrähten), die Ordinate zeigt den in den äußeren Ioffedrähten notwendigen Mindeststrom zur Bildung einer Ioffefalle. dass bei negativem  $y$  der Strom geringer ist, deutet darauf hin, dass die Ioffedrähte hier näher an der Spulenachse sind.

Abbildung 4.5 zeigt den Verlauf des Mindeststroms in den äußeren Ioffedrähten bei Wiederholung der Messung in verschiedenen vertikalen Abständen zum Zentrum zwischen den Spulen. Bei allen Messungen blieb der Strom in den inneren Ioffedrähten konstant bei 6 A.

Zur Gewinnung der Kenndaten der realen Ioffefalle wurde das numerische Modell der Falle im Simulationsprogramm (siehe Anhang B) solange variiert, bis es die beiden vorgestellten Messungen reproduziert hat (geometrische Fallendaten, siehe Anhang B.3). Das Verfahren funktioniert sehr gut, kann aber z.B. das Offsetfeld der Falle nur auf ca. 0.25 Gauss genau bestimmen. Radiale Fallenfrequenzen sind mit den Folgefehlern behaftet. Man sieht also, dass die wahre Limitierung der Magnetfeldsimulation nicht bei den Algorithmen, sondern bei der späteren Realisierung der

Falle liegt. Gerade die Bestimmung von Offsetfeldern und Fallenfrequenzen muss in kritischen Fällen mit dem Experiment nachgeprüft werden.

Im nächsten Kapitel werden Verfahren vorgestellt, die aus bekannten Grundgrößen den Verlauf des Potentials sehr gut extrapolieren können. Näherungsverfahren für die Grundgrößen selbst sind jedoch meist nur sehr grobe Abschätzungen.

### 4.1.2 Potentialnäherungen

Zur Interpretation von Experimenten mit Atomen in der Magnetfalle und für vorausgehende Überlegungen ist es wichtig, das Potential in der Falle sehr gut zu kennen. Am genauesten kann das Potential, vor allem in der Nähe der felderzeugenden Elemente, durch numerische Methoden bestimmt werden. Für einfache Überlegungen und Abschätzungen ist es nicht immer nötig, diesen aufwändigen Zugang zu wählen. Je nachdem, ob es sich um sehr kalte oder heißere Atome handelt, genügt es oft, ein vereinfachtes Modell zu verwenden, das das Fallenpotential im benötigten Bereich näherungsweise beschreibt.

In Abschnitt 4.1.2 wird eine sehr rudimentäre Näherung entwickelt, die nur lokal für sehr kalte Atome in der Nähe des Fallenminimums gilt. Soll das Potential in einem größeren Bereich ausgewertet werden, so kann zur in Abschnitt 4.1.2 vorgestellten Methode gegriffen werden. Mit ihrer Hilfe ist es auch möglich Schwingungen in der Falle oder heißere Ensembles zu beschreiben.

Beide Methoden beruhen auf der Kenntnis des Gradienten  $\alpha$  des vom Spulenpaar erzeugten Quadrupols, dem Offsetfeld  $B_0$  im Minimum und der Krümmung  $\beta_z$  des Ioffefelds. Eine direkte Bestimmung dieser Größen, insbesondere des Offsetfelds  $B_0$ , hängt sehr empfindlich von der genauen Lage und den Strömen der Fallenelemente ab, so dass man diese entweder experimentell bestimmen, oder mit den aufwändigeren numerischen Verfahren ermitteln muss.

#### Lokale Näherung

Dieser Ansatz ist analog zu dem für die Standard-Ioffefalle angewandten Verfahren. Mit der Kenntnis des Quadrupolgradienten  $\alpha$ , des Offsetfelds  $B_0$  und der Krümmung



$\beta_z$  des Potentials in Iofferrichtung kann das Ioffefeld lokal als Reihe dargestellt werden:

$$B_z(z) \approx B_0 + \alpha z + 1/2\beta_z z^2 \quad (4.1)$$

Die Querkomponenten gewinnt man aus der Potenzreihenmethode für planare Geometrien (Abschnitt 2.2.2).

$$B_z(x, z) = B_0 + \alpha z + 1/2\beta_z(z^2 - x^2) \quad (4.2)$$

$$B_x(x, z) = -\alpha x - \beta_z x z \quad (4.3)$$

Zusammen mit dem Feld des sphärischen Quadrupols

$$\vec{B}_{QP}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -\alpha x \\ 2\alpha y \\ -\alpha z \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

ergibt sich das Feld der Ioffefalle

$$\vec{B}_J(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix} + 2\alpha \begin{pmatrix} -x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + 1/2\beta_z \begin{pmatrix} -2xz \\ 0 \\ z^2 - x^2 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Die Struktur der Standard-Ioffefalle kommt in diesem Ausdruck deutlich zum Vorschein. Auch hier kann der radiale Einschluss durch einen linearen Quadrupol beschrieben werden, der effektive Gradient  $2\alpha$  entspricht nun allerdings der steilen Richtung des Quadrupols. Durch die planare Geometrie der in y-Richtung verlaufenden Drähte hat der letzte Term eine andere Form.

Eine Entwicklung des Feldbetrags um den Ursprung führt zu den radialen Krümmungen des Fallenpotentials:

$$\beta_x = \frac{4\alpha^2}{B_0} - \beta_z \quad (4.6)$$

$$\beta_y = \frac{4\alpha^2}{B_0}. \quad (4.7)$$

Im Gegensatz zur Standard-Ioffefalle ist das Potential im Fallenminimum nicht symmetrisch. Für kleine Offsetfelder  $B_0$  ist der Beitrag der axialen Krümmung  $\beta_z$  zwar klein, gewinnt für höhere Offsetfelder jedoch an Gewicht.

Die korrespondierenden Fallenfrequenzen ergeben sich aus den Krümmungen mit

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu}{m}}\beta. \quad (4.8)$$

### Exponentialnäherung

In der lokalen Näherung wurden Gradient und Krümmung des Ioffefelds als konstant angenommen. Die asymmetrische Form des Potentials in der Doppeldraht-Ioffefalle kann deshalb durch diese Methode nur begrenzt wiedergegeben werden. Für höhere Anforderungen muss das Feld der Drähte daher besser angenähert werden.

Das Feld in der Symmetrieebene zwischen zwei parallel verlaufenden, von entgegengesetzten Strömen durchflossenen Drähten hat exakt die Form einer Lorentzkurve:

$$B_L(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{4I}{r} \frac{1}{1 + (z/r)^2} = \frac{A_0}{1 + (z/r)^2} \quad (4.9)$$

Als Parameter gehen hier der Abstand der Drähte zur Symmetrieebene  $r$  und der Strom  $I$  in den Drähten ein, woraus sich die Amplitude\*  $A_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{4I}{r}$  ergibt. Die Größe  $r$  ist gleichzeitig die Halbwertsbreite der Lorentzkurve.

Das in Abbildung 4.6 links dargestellte Schema veranschaulicht den Feldverlauf der einzelnen Komponenten im Umfeld des Minimums der entstehenden Ioffefalle. Das Minimum der Falle liegt im Ursprung des Koordinatensystems, wo die Steigung des Felds  $B_L$  gleich der negativen Steigung des Quadrupolfelds  $B_{QP}$  ist. Die Subtraktion der beiden Felder führt zum Ioffeminimum mit dem Offsetfeld  $B_0$ . Unter der Bedingung, dass der Ort der Falle außerhalb der Halbwertsbreite der Lorentzkurve liegt ( $d > r$ ), kann die Kurve sehr gut durch einen exponentiellen Ansatz approximiert werden.

Mit den Fallenparametern  $\alpha$ ,  $\beta_z$  und  $B_0$  gilt folgender Ansatz:

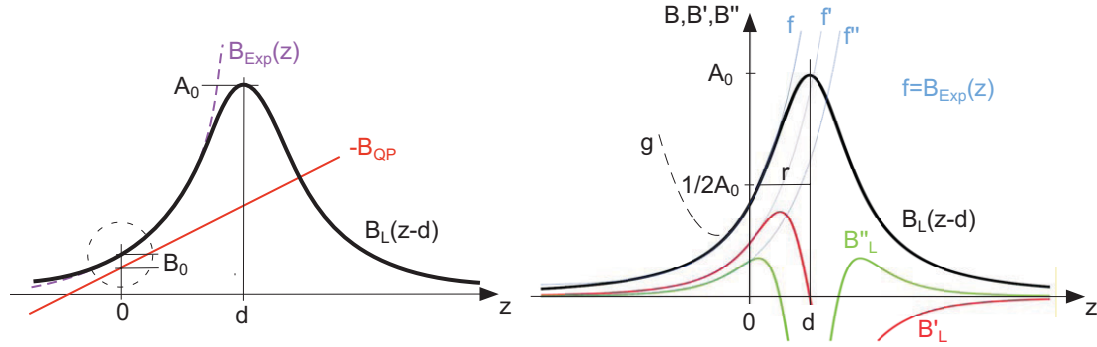
$$B_{Exp}(z) = \beta_z a^2 \exp\left(\frac{z}{a}\right) - \alpha a + B_0, \quad (4.10)$$

wobei der zusätzliche Parameter  $a$  durch  $a = \alpha/\beta_z$  gegeben ist. Durch Differentiation und Auswertung am Ursprung ergibt sich direkt

$$B_{Exp}(0) = B_0, \quad B'_{Exp}(0) = \alpha \quad \text{und} \quad B''_{Exp}(0) = \beta_z.$$

---

\*Es ist oft sehr praktisch, den Faktor  $\frac{\mu_0}{4\pi} = 1 \frac{\text{G}}{\text{A mm}}$  direkt einzusetzen.



**Abbildung 4.6:** Feldverläufe am Ort der asymmetrischen Ioffefalle. Das Feld  $B_L$  kann durch die Funktion  $B_{Exp}$  sehr gut angenähert werden. In der rechten Darstellung zeigt sich der Vorteil der exponentiellen Methode (Kurve  $f$ ) gegenüber der einfachen Reihenentwicklung aus der "lokalen Näherung" (Kurve  $g$ ). Der Ort des Fallenminimums befindet sich im Ursprung.

Der Vorteil dieses Ansatzes zeigt sich deutlich im rechten Teil von Abbildung 4.6. Im Vergleich zur lokalen Näherung (Kurve  $g$ ) spiegelt der exponentielle Ansatz den Verlauf von  $B_L$  und dessen Ableitungen viel besser wieder.

Die Querkomponenten für das Feld  $B_{Exp}$  erhält man wieder mit der Potenzreihenmethode für planare Geometrien (Kapitel 2.2.2):

$$B_{Exp,z}(x, z) = \beta_z \cdot \exp\left(\frac{z}{a}\right) (-ax + 1/6a^{-1}x^3 - 1/120a^{-3}x^5) - \alpha a + B_0 \quad (4.11)$$

$$B_{Exp,x}(x, z) = \beta_z \cdot \exp\left(\frac{z}{a}\right) (a^2 - 1/2x^2 + 1/24a^{-2}x^4). \quad (4.12)$$

Der exponentielle Ansatz vereinfacht die Entwicklung enorm, da alle Ableitungen bis auf Vorfaktoren gleich sind und der Term mit der Exponentialfunktion ausgeklammert werden kann. Zusammen mit dem Quadrupolfeld erhält man die Form

$$\vec{B}_{Exp}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -x \\ 2y \\ -(z+a) \end{pmatrix} + \beta_z \exp\left(\frac{z}{a}\right) \begin{pmatrix} -ax + 1/6a^{-1}x^3 - 1/120a^{-3}x^5 \\ 0 \\ a^2 - 1/2x^2 + 1/24a^{-2}x^4 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

für das Feld der Ioffefalle.

Vergleicht man das komplett simulierte Feld der im vorigen Kapitel vorgestellten Ioffefalle mit der aus den Grunddaten erhaltenen Näherung, so ist die Abweichung trotz der schrägen Ioffedrähte erstaunlich gering (die Falle muss entlang ihrer Hauptachsen parametrisiert werden). Fordert man 1% relative Genauigkeit, so kann das Feld bis zu einer Fallentiefe von 0.8 G (entspricht ca. 50  $\mu\text{K}$  in Temperatureinheiten) beschrieben werden. Bei 3 G Fallentiefe steigt die relative Abweichung auf 5 % und bei 8 Gauss über 10 %.

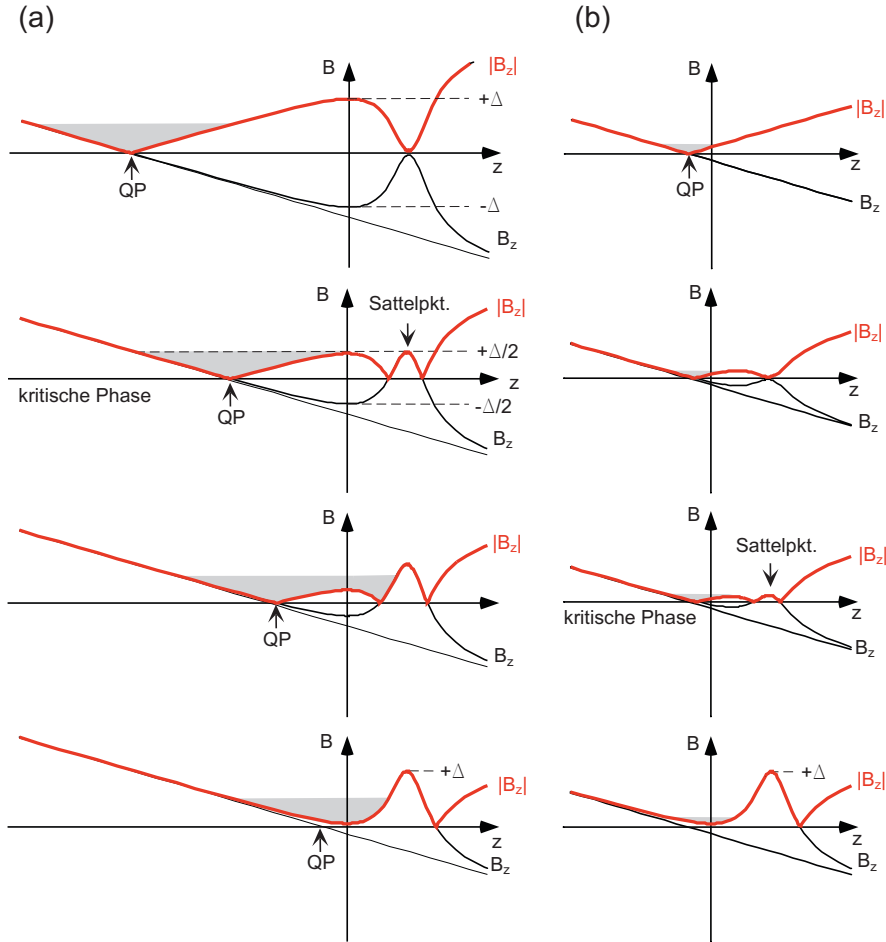
### 4.1.3 Ioffe-Transfer

Die bisherigen Betrachtungen zur Doppeldraht-Ioffefalle waren auf den komplett eingeschalteten Zustand beschränkt. Ein besonderer Vorteil der asymmetrischen Ioffefalle (Kapitel 3.3.3) ist jedoch die Möglichkeit, Atome, die sich ursprünglich im Quadrupolfeld der Fallenspulen befinden, adiabatisch in die Ioffefalle zu überführen.

Heizeffekte, die durch Bereitstellung optisch gekühlter Atome direkt am Ort der Ioffefalle und sehr schnelles, gezwungenermaßen nicht adiabatisch verlaufendes Anschalten der Ioffefalle verursacht werden, können so verhindert werden. Bei der asymmetrischen Ioffefalle tritt dieser Schritt beim Beladen des Quadrupols zwar auch auf, das sogenannte "Mode-matching" [Ket99], die Anpassung des Fallenpotentials an die vorliegende räumliche Verteilung der Atome vor dem Umschalten ist beim Quadrupol jedoch wesentlich einfacher.

In der magnetooptischen Falle gespeicherte Atomwolken haben ein typisches Aspektverhältnis von  $\lambda = 1 - 2$ , sind also relativ rund. Typische Ioffefallen haben im Normalbetrieb ein Aspektverhältnis von  $\lambda = 5 - 20$ , müssen also beim Umfüllen der Atome mit sehr hohem Offsetfeld betrieben werden. Die dabei auftretenden Instabilitäten (Diskussion in 3.3.3) beschränken die Fallentiefe stark [Ket99]. Der zylindersymmetrische sphärische Quadrupol hat natürlicherweise immer ein Aspektverhältnis von  $\lambda = 2$ . Durch den spitzen Verlauf im Minimum wirkt sich die räumliche Positionierung relativ zu den Atomen jedoch kritischer auf das Heizen der Atome aus als beim quadratischen Potential der Ioffefalle.

Für den Transfer der schließlich im Quadrupol der Fallenspulen vorliegenden Atome in die Ioffefalle gibt es verschiedene Strategien. Abbildung 4.7 zeigt auf der linken Seite (Fall (a)) die prinzipiell beste Strategie für den Transfer. Der Quadrupol mit



**Abbildung 4.7:** Veranschaulichung von zwei Strategien für den Ioffetransfer anhand der Darstellung des Felds auf der Ioffeachse. Fall (a) zeigt schrittweise (von oben nach unten) die prinzipiell bestmögliche Strategie, den Quadrupol (QP) aus einem gewissen Anfangsabstand auf die vollständig eingeschalteten Ioffedrähte zu bewegen. Bei einem bestimmten Abstand ist das Potential ( $|B_z|$ ) in einer kritischen Phase, da die Fallentiefe in diesem Punkt nur noch die Hälfte ( $\Delta/2$ ) der Tiefe späteren Ioffepotentials  $\Delta$  beträgt. Atome, die in dieser Phase über den Sattelpunkt zwischen den Ioffedrähten nach rechts entweichen können, gehen verloren. Im weiteren Verlauf des Transfers wird das Potential wieder tiefer, bis sich die Ioffefalle ausbildet (unterste Darstellung). Fall (b) zeigt die wesentlich ungünstigere Strategie, die Ioffedrähte bei feststehendem Quadrupol einzuschalten. In der hier auftretenden kritischen Phase ist die Fallentiefe im Vergleich zu Fall (a) weit geringer, da das Feld der Ioffedrähte hier noch nicht voll eingeschaltet und der begrenzende Sattelpunkt zwischen den Drähten somit bei einer geringeren Feldstärke liegt. Die Parameter wurden in beiden Fällen gleich gewählt.

den Atomen wird hierbei aus einem gewissen Anfangsabstand auf die schon eingeschalteten Ioffedrähte zu bewegt. Am Betrag des Magnetfelds auf der Ioffeachse ( $|B_z|$ ) erkennt man, dass es einen kritischen Abstand gibt, bei dem das Potential nur die halbe Tiefe des Potentials in der Ioffefalle hat. Fall **(b)** zeigt die wesentlich ungünstigere Strategie, die Ioffedrähte bei feststehendem Quadrupol einzuschalten. In der hier auftretenden kritischen Phase ist die Falltiefe im Vergleich zu Fall (a) weit geringer. Der Effekt kann etwas verringert werden, wenn der feste Abstand von Quadrupol und Ioffedrähten möglichst groß gemacht wird, man erreicht aber nur im Grenzwert die Falltiefe von Fall (a). In der Praxis ist der Abstand durch die maximalen Ströme in den Ioffedrähten begrenzt.

Für eine von der Geometrie her feststehende Doppeldraht-Ioffefalle scheint es auf den ersten Blick nur möglich zu sein, die ungünstigere zweite Strategie anzuwenden. Mit der Verwendung eines zusätzlichen homogenen Hilfsfelds in Ioffeichtung kann man jedoch den mit Atomen befüllten Quadrupol zunächst von den Ioffedrähten wegschieben, so dass es möglich ist, diese voll einzuschalten, ohne dass die kritische Phase erreicht wird. Nachfolgende Reduktion des Hilfsfelds entspricht dem in Fall (a) vorliegenden Szenario mit der gleichen Falltiefe.

Bei unserer Doppeldraht-Ioffefalle kann das Hilfsfeld ohne zusätzlich nötige Spulen erzeugt werden. Die Verwendung der inneren und äußeren Ioffedrähte und die aus den seitlichen Abständen (1.6 mm und 4 mm) resultierende verschiedene Reichweite der Feldelemente macht es möglich, während des Transfers die inneren Drähte als Ioffeelement und die äußeren als homogeneres, gegengerichtetes Hilfsfeld zu verwenden. Der Sattelpunkt zwischen den Ioffedrähten wird zwar durch die Wirkung der äußeren Drähte etwas verringert, der Effekt durch die Verschiebung des Quadrupols wirkt sich aber stärker auf die Falltiefe aus.

Zum Ioffetransfer in unserer Falle wird der Strom in den äußeren Ioffedrähten zunächst auf  $I_{\text{Ioffe,außen}} = -20$  A gefahren (Maximalstrom der Stromtreiber). Die in den Fallenspulen ( $s_{\text{Spulen}} = 5$  A) gebildete Quadrupolfalle entfernt sich dabei um zusätzliche 0.75 mm von den Ioffedrähten. Im nächsten Schritt wird der Strom in den inneren Ioffedrähten auf den Wert  $I_{\text{Ioffe,innen}} = 20$  A erhöht. Der Transfer ist nun genau in der oben beschriebenen kritischen Phase. Die begrenzende Falltiefe liegt bei 21 Gauss. Durch stufenlose Veränderung des Stroms in den äußeren Ioffedrähten von -20 A auf +20 A erhöht sich die Falltiefe immer weiter und die Ioffefalle bildet sich aus. Die vorliegende Ioffefalle hat eine Tiefe (Minimum bis Rand) von ca. 80

Gauss und ein Offsetfeld im Minimum  $B_0 = 21$  Gauss (Kenndaten siehe Anhang B.3.1). Da diese Falle wegen ihrer geringen Fallenfrequenzen nicht zum evaporativen Kühlen geeignet ist, werden die Ströme nun simultan auf normale Werte reduziert. Die Falltiefe liegt dann typischerweise bei knapp 30 Gauss.

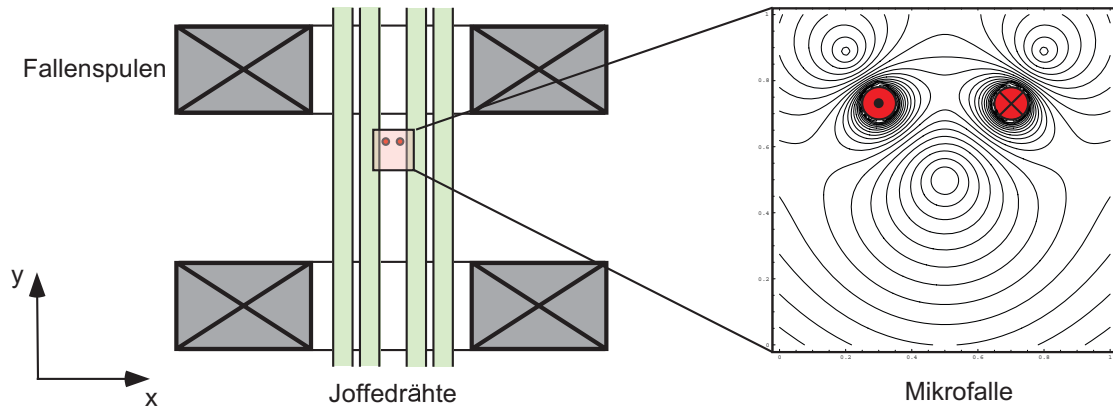
Die richtige Vorgehensweise beim Ioffetransfer ist für relativ kalte  $^{87}\text{Rb}$ -Atome nicht besonders kritisch. Wir konnten auch mit Strategie (a) ohne gegengeschaltete äußere Ioffedrähte (kritische Tiefe ca. 5 Gauss) genügend Atome transferieren und die Bose-Einstein Kondensation erreichen. Für das schlechter kühlbare  $^6\text{Li}$  ist die Transfertiefe aber viel limitierender und erfordert auf jeden Fall die vorgestellte Vorgehensweise.

Typischerweise erfolgt der Ioffetransfer in einer Zeit von 500 ms. Für das leichtere Lithium ist es aus dynamischen Gründen günstiger, den Transfer nur in wenigen Millisekunden durchzuführen, da Rubidium aber unser Kühlmittel ist, wurde die Dauer für Rubidium optimiert.

## 4.2 Mikrofalle

Als Ergänzung zur Doppeldraht-Ioffefalle bietet unser Aufbau die Möglichkeit, Atome adiabatisch in das Potential einer Mikrofalle zu überführen. Die in der Mikrofalle zusätzlich realisierbare Kompression eines kalten Atomensembles ermöglicht eine drastische Erhöhung der Dichten und Stossraten. Besonders im Zusammenhang mit Mischungen unterschiedlicher Atom-Spezies, kann hier eventuell auftretendes thermisches Abkoppeln durch verschiedenes Durchsacken in der Schwerkraft verhindert und Thermalisierungszeiten verkürzt werden.

Im Unterschied zu typischen Mikrofallen ist die hier implementierte Falle nicht ausschließlich mit miniaturisierten Elementen, die auf einem Substrat angeordnet sind, zu betreiben. Die beiden verwendeten "Mikrodrähte" (Durchmesser  $120\ \mu\text{m}$ ) verlaufen parallel zur Ioffeachse in einer Höhe von  $y_0 = 2.9$  mm oberhalb des Zentrums der Doppeldraht-Ioffefalle mit einem seitlichen Abstand von 0.4 mm. Verschiebt man die Ioffefalle durch Variation der Ströme in den Fallenspulen nach oben, so wird das Fallenpotential durch den Einfluss der näher rückenden Mikrodrähte zusätzlich komprimiert und geht in das steile Potential einer Mikrofalle über. Abbildung 4.8 verdeutlicht die Geometrie. Da die Mikrodrähte keinerlei Feldkomponenten in Ioffe-



**Abbildung 4.8:** Schematische Darstellung der Mikrofalle. Das Potential der Mikrofalle bildet sich dicht unterhalb der beiden Mikrodrähte (Durchmesser  $120 \mu\text{m}$ , seitlicher Abstand  $0.4 \text{ mm}$ ). Diese verlaufen knapp  $3 \text{ mm}$  oberhalb des Zentrums der Doppeldraht-Ioffefalle parallel zur Ioffeichtung ( $z$ -Achse) und werden von entgegengesetzten Strömen durchflossen. Im rechten Ausschnitt sind typische Äquipotentiallinien eingezeichnet.

richtung haben, bleibt das Potential in dieser Richtung unverändert.

Die Wirkung der Mikrofalle ist leicht zu verstehen, wenn man die in Abschnitt 4.1.2 hergeleitete lokale Näherung für das Magnetfeld der Doppeldraht-Ioffefalle erweitert. Da die parallelen Mikrodrähte die selbe Geometrie wie die Ioffedrähte haben, kann der Ansatz vollständig analog erfolgen.

Das Feld auf der vertikalen Mittelachse ( $y$ -Achse) zwischen den Mikrodrähten kann lokal durch die Form

$$B_y(x=0, y) = \alpha_M y + \frac{1}{2} \beta_M y^2 \quad (4.14)$$

beschrieben werden. Parameter sind hier der Gradient  $\alpha_M$  und die Krümmung  $\beta_M$  des Felds unterhalb der Mikrodrähte. Der homogene Anteil des Felds kann an dieser Stelle zur Vereinfachung weggelassen werden, da er nur zu einer Verschiebung des der Ioffefalle zugrundeliegenden Quadrupols führt, die später noch erläutert wird. Durch die ebensymmetrische Geometrie der Drähte kann auch hier eine Entwicklung für die Querkomponenten (Kapitel 2.2.2) durchgeführt werden, und das vektorielle Feld der Mikrodrähte wird zu

$$\vec{B}_{\text{Mikrodrähte}}(\vec{r}) = \alpha_M \begin{pmatrix} -x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + 1/2 \beta_M \begin{pmatrix} -2xy \\ y^2 - x^2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$



Das Feld der Mikrofaller kommt durch Addition des Einflusses der Drahnte mit dem Feld der schon bekannten Ioffefalle (Gleichung 4.5) zustande:

$$\vec{B}_M(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix} + (2\alpha + \alpha_M) \begin{pmatrix} -x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + 1/2\beta_z \begin{pmatrix} -2xz \\ 0 \\ z^2 - x^2 \end{pmatrix} + 1/2\beta_M \begin{pmatrix} -2xy \\ y^2 - x^2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Wie zu erwarten addiert sich der Feldgradient  $\alpha_M$  der Mikrodrahnte zum radialen Gradienten der Ioffefalle ( $2 \cdot \alpha$ ) und führt zum entsprechend steileren Potential der Mikrofaller. Für typische Werte von  $\alpha_M = 1000$  G/cm (bei  $I_{\text{Mikrodrahnte}} = 1$  A) und  $\alpha = 141$  G/cm (bei  $I_{\text{Spulen}} = 5$  A) ist der Gradient der Mikrofaller knapp 5 mal größer als in der Ioffefalle.

Der zwecks Vereinfachung des Ansatzes vernachlässigte homogene Feldanteil  $B_M$  der Mikrodrahnte führt zu einer vertikalen Verschiebung der ursprünglichen Ioffefalle um den Betrag

$$\Delta_y = \frac{B_M}{2\alpha + \alpha_M} \quad (4.17)$$

nach unten. Für die Entwicklung des Felds im Minimum der Falle hat dies keinen Effekt.

Wird der Betrag von  $B_M(\vec{r})$  um den Ursprung entwickelt, bekommt man wie zu erwarten die radialen Krümmungen des Fallenpotentials

$$\beta_{M,x} = \frac{(2\alpha + \alpha_M)^2}{B_0} - \beta_z \quad (4.18)$$

$$\beta_{M,y} = \frac{(2\alpha + \alpha_M)}{B_0}. \quad (4.19)$$

Man erkennt, dass die Krümmung  $\beta_M$  vom obigen Ansatz in erster Näherung keine Rolle spielt. Der axiale Einschluss ist unverändert.

Für typische Einstellungen hat die Mikrofaller Fallenfrequenzen von ca.  $2\pi \cdot 860$  Hz radial und ca.  $2\pi \cdot 50$  Hz axial, was einem Aspektverhältnis  $\lambda = 17.5$  entspricht. Da der radiale Einschluss vom Einfluss der Mikrodrahnten dominiert ist, kann die Doppeldraht-Ioffefalle auf geringere Ströme reduziert werden, was die axiale Fallenfrequenz drastisch verringert ohne den radialen Wert stark zu beeinflussen. Auf

diese Weise sind Aspektverhältnisse bis zu 40 erreichbar. Für ein maximales Aspektverhältnis kann schließlich noch der Strom in den Mikrodrähten erhöht werden. Der von uns normalerweise eingestellte Strom von 1 A ist noch weit von der Zerstörschwelle der Drähte entfernt. In Vorversuchen mit einer Mikrodrahtanordnung im Vakuum konnte erst bei einem Dauerstrom von 7 A Schaden angerichtet werden. Ein Betrieb bei 2 A sollte daher selbst unter UHV-Bedingungen möglich sein. Maximal kann das Aspektverhältnis so auf Werte bis zu  $\lambda = 75$  erhöht werden. Detaillierte Daten der Mikrofalle für verschiedene Ströme sind im Anhang B.3.2 gelistet.

### 4.2.1 Mikro-Transfer

Abbildung 4.9 zeigt eine anschauliche Darstellung der Vorgänge beim adiabatischen Transfer des Potentialminimums der Ioffefalle in die Mikrofalle (Mikro-Transfer). Anschaulich gesprochen wirkt die Mikrofalle wie ein enger Trichter auf eine Luftblase, die unter die Wasseroberfläche gedrückt wird. Je weiter nach unten gedrückt wird, desto mehr komprimiert sich die Blase.

Die beim Mikro-Transfer notwendige vertikale Verschiebung des Quadrupols zwischen den Fallenspulen kann mit Hilfe eines Asymmetrie-Parameters  $k$  für die Spulenströme beschrieben werden. Mit

$$I_{\text{oben}}(k) = k \cdot I_{\text{Spulen}} \quad \text{und} \quad I_{\text{unten}} = 1/k \cdot I_{\text{Spulen}} \quad (4.20)$$

kann für unsere Falle die jeweilige Position

$$y(k) = 6.4 \text{ mm} \cdot (1 - k) + 3.7 \text{ mm}(1 - k)^2, \quad (4.21)$$

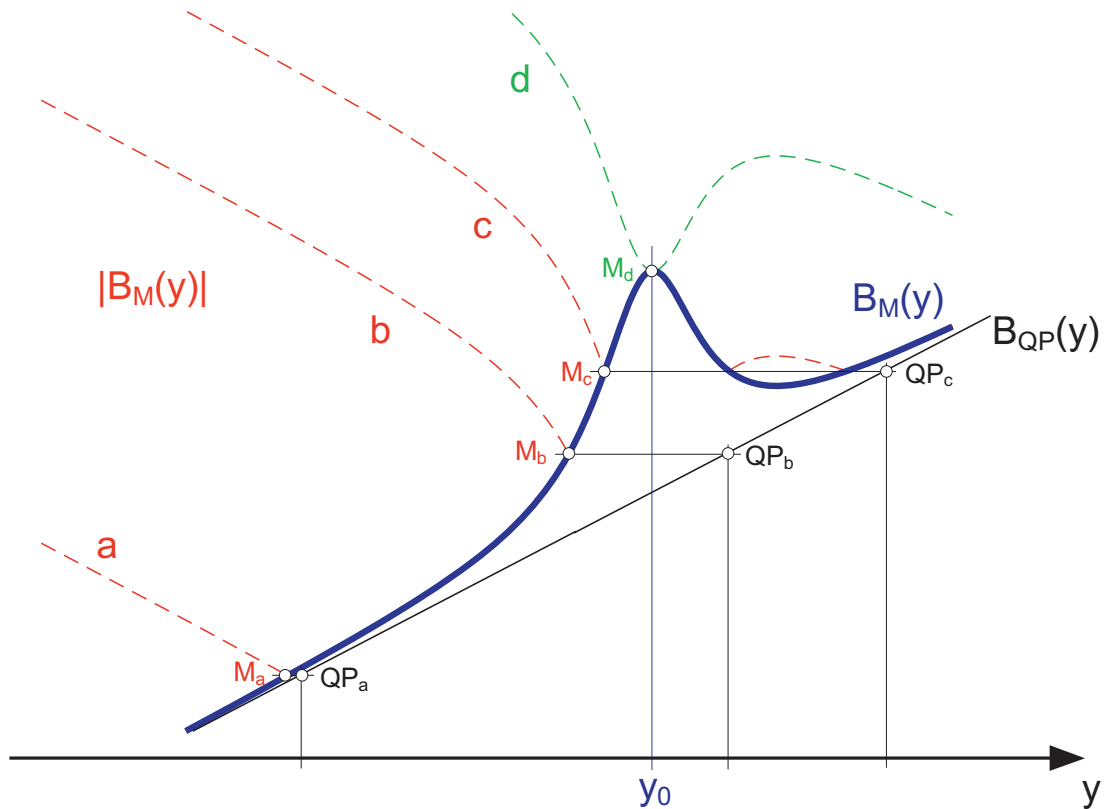
und die für ein konstantes Offsetfeld  $B_0$  während des Transfers notwendige Variation des Stroms in den äußeren Ioffedrähten

$$I(k) = I_{\text{Ioffe,ausen}} + 6.0 \text{ A} (1 - k) - 11.5 \text{ A} \cdot (1 - k)^3 \quad (4.22)$$

bestimmt werden. Beim Transfer variiert der Gradient der Falle mit

$$\alpha(y) = \alpha \cdot (1 - 6.4 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^{-2} y^2). \quad (4.23)$$

Die Ausdrücke für  $y(k)$  und  $\alpha(y)$  sind an simulierte Felder angepasste Kurven.  $I(k)$  wurde an die bei der Charakterisierung der Doppeldraht-Ioffefalle (Abb. 4.5) gewonnenen Werte angepasst. Eine Variation des äußeren Ioffestroms bei Mikro-Transfer



**Abbildung 4.9:** Feld der Mikrofalle in verschiedenen Stadien des Mikro-Transfers (a-d). In der Darstellung ist die  $y$ -Komponente des Magnetfeldes (vertikale Richtung) über der Höhe aufgetragen. Der Feldbeitrag der eingeschalteten Mikrodrähte hat in der Höhe  $y_0$  sein Maximum und modifiziert hier lokal den Gradienten der Fallenspulen. Beim Mikro-Transfer wird die Ioffefalle aufwärts in den Einflussbereich der Mikrodrähte verschoben. In Stadium **a** ist der Ort der sich bildenden Mikrofalle ( $M_a$ ) schon leicht gegenüber dem Ort des von den Fallenspulen generierten Quadrupols ( $QP_a$ ) versetzt. Der Gradient ist noch fast unverändert. Die gestrichelte Linie verdeutlicht den radialen Einschluss anhand des Betrags der  $y$ -Komponente. Verschiebt man die Ioffefalle weiter nach oben (Stadium **b**), so wird der Einfluss der Mikrodrähte stärker und man erkennt, wie das Potential steiler wird. In Stadium **c** ist die voll komprimierte Mikrofalle erreicht. Wird die Falle nun noch weiter nach oben verschoben, so wird der Einschluss wieder schwächer und in Stadium **d** schließlich näherungsweise harmonisch.

ist notwendig, weil sich das axiale Offsetfeld sonst durch die leicht verkippt eingebauten Ioffedrähte ändern würde. Abbildung 4.10 zeigt den Verlauf der Größen.

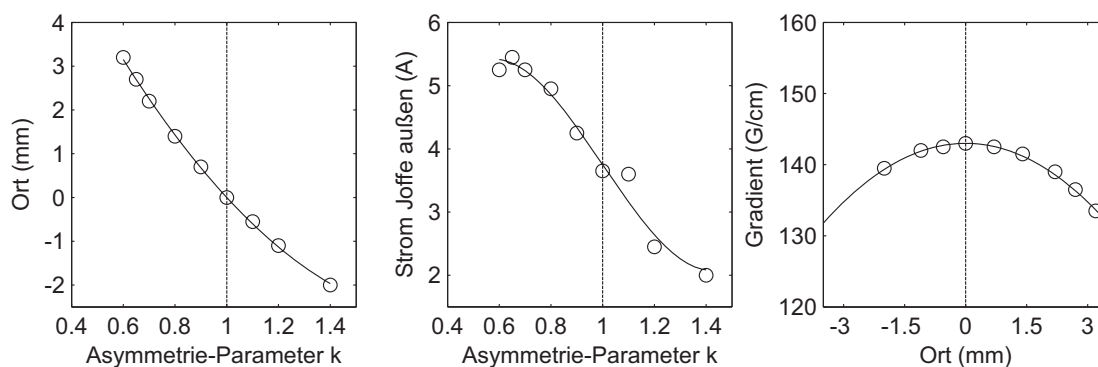


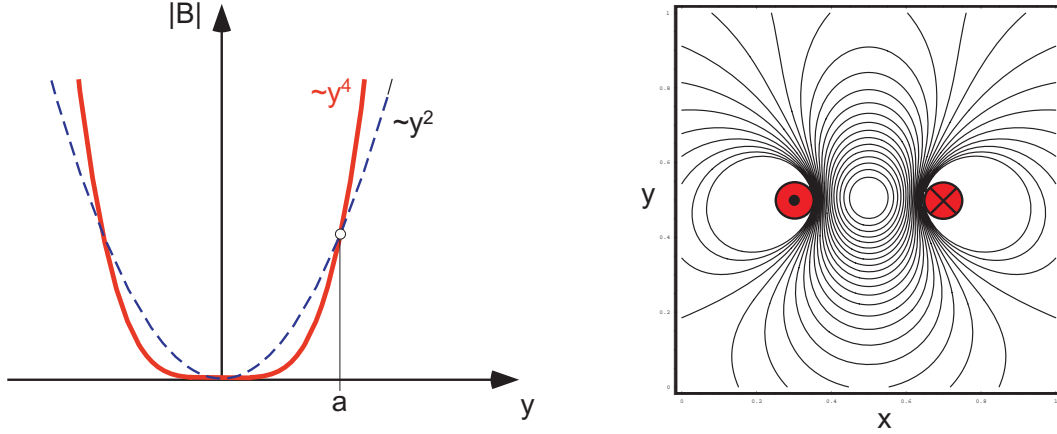
Abbildung 4.10: Kenngrößen des Mikrotransfers.

## 4.2.2 Anharmonisches Potential

Wie in Abbildung 4.9 schon angedeutet, wird beim Mikro-Transfer ein Punkt (hier Stadium c) erreicht, in dem die Mikrofall den maximalen Gradienten besitzt. Eine weitere Verschiebung der Ioffefalle führt wieder zu geringerem Einschluss. Wird die Falle bis zum Maximum des Feldes der Mikrodrähte gebracht, so wird der Gradient im Minimum vollständig aufgehoben und ein in erster Näherung harmonischer Einschluss dominant (Stadium d).

Beim Ioffeprinzip wurde aus dem linearen Feldverlauf in radialer Richtung durch Addition eines zusätzlichen Offsetfelds in axialer Richtung der effektiv harmonische Einschluss der Ioffefalle. Nach dem gleichen Prinzip entsteht aus einem radial harmonischen Feld (linearer Hexapol) ein Potential das im Minimum mit der vierten Potenz des Radius verläuft. Die von M.S. Ioffe 1962 für den Einschluss von Plasma vorgeschlagene erste Ioffe-Falle [Got62] war von diesem Typus.

Abbildung 4.11 vergleicht den Verlauf eines harmonischen mit dem anharmonischen Potential in der Mikrofall. Der Schnittpunkt bei  $a$  hängt von den Parametern ab. Für unsere relativ große Mikrofall befinden sich kalte Atome aber fast ausschließlich innerhalb von  $a$ . Mit der Mikrofall lassen sich also flache Potentiale mit steilem



**Abbildung 4.11:** Vergleich eines harmonischen und eines  $y^4$ -Potentials. In der Nähe des Minimums ist der Verlauf im anharmonischen Fall flacher, außerhalb des Radius  $a$  steiler. Die rechte Darstellung zeigt den Schnitt durch die Mikrofalle mit anharmonischem Potential. Das Minimum liegt hier zwischen den Mikrodrähten.

Rand realisieren. Die Dichteverteilung in diesem Einschluss erreicht bei gleicher Ausdehnung der Atomwolke keinen so hohen Maximalwert. Besonders zur Vermeidung von Dreikörperverlusten kann es daher sinnvoll sein, Kondensate in dieser Falle zu halten.

Die Möglichkeit mit kalten Atomen, insbesondere Bose-Einstein Kondensaten oder Fermi-Gasen, in einem anharmonischen Potential zu experimentieren, erschließt zahlreiche neue Anwendungen. So beeinflusst die Potentialform die kritische Temperatur des Phasenübergangs zum Bose-Einstein Kondensat [Bag87b, Yan99], die Fermi-Temperatur [But97, Li98] und die kritische Temperatur für den BCS-Phasenübergang eines Fermi-Gases [Sea02]. In anharmonischen Fällen modifiziert sich das Bogoliubov Anregungsspektrum kalter Atome [Ger04], es gibt Lösungen für "graue" Solitonen [Rad03] und mehrfach quantifizierte Vortizes im Bose-Einstein Kondensat [Jac04a, Jac04b, Lun04] werden möglich.

Das Magnetfeld im Minimum der Falle kann auch für diesen Fall recht einfach beschrieben werden. Da der Gradient im Minimum vollständig verschwindet, entsteht die Falle genau dort, wo der vertikale Feldgradient der Mikrodrähte den selben Betrag, aber das entgegengesetzte Vorzeichen des Gradienten ( $2\alpha$ ) der Ioffefalle hat.

$$B_y(x = 0, y) = -2\alpha y - \frac{1}{2}\beta_M y^2 \quad (4.24)$$

Mit dem Entwicklungsansatz für die Querkomponenten erhält man für das Feld der Mikrodrähte an dieser Stelle:

$$\vec{B}_{\text{Mikro,anharm}}(\vec{r}) = \alpha \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \\ 0 \end{pmatrix} + 1/2\beta_M \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 - y^2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

Das Feld der anharmonischen Mikrofaller kommt durch Addition mit dem Feld der zugrundeliegenden Ioffefalle (Gleichung 4.5) zustande:

$$\vec{B}_{M,\text{anharm}}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix} + 1/2\beta_z \begin{pmatrix} -2xz \\ 0 \\ z^2 - x^2 \end{pmatrix} + 1/2\beta_M \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 - y^2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Der Gradientenanteil hebt sich in beiden Richtungen auf und das Feld hängt nur noch von den Krümmungen der Feldkomponenten ab.

Eine Entwicklung des Fallenpotentials entlang der Hauptachsen der Falle am Ursprung führt zu den Potenzreihen:

$$B_{M,\text{anharm}}(x, 0, 0) = B_0 - \frac{1}{2}\beta_z x^2 + \frac{1}{24}\gamma x^4 + \dots \quad (4.27)$$

$$B_{M,\text{anharm}}(0, y, 0) = B_0 + \frac{1}{24}\gamma y^4 + \dots \quad (4.28)$$

$$B_{M,\text{anharm}}(0, 0, z) = B_0 + \frac{1}{2}\beta_z z^2 \quad (4.29)$$

mit dem Parameter  $\gamma_M = \frac{3\beta_M^2}{B_0}$ , der vierten Ableitung des Potentials.

Beim Betrieb der Mikrodrähte mit einem Strom von 1A erhält man für die obige Entwicklung eine vertikale Feldkrümmung von  $\beta_M \approx 10^9 \text{ G/m}^2$ . Für  $B_0 = 1 \text{ G}$  ergibt das  $\gamma_M \approx 3 \cdot 10^{18} \text{ G/m}^4$ . Vergleicht man den Verlauf dieses anharmonischen Potentials mit dem Potential einer typischen Ioffefalle mit  $\beta_r \approx 8 \cdot 10^8 \text{ G/m}^2$ , findet man den Schnittpunkt  $a$  bei einem Abstand von ca.  $60 \mu\text{m}$ . Innerhalb von  $a$  sind Atome schwächer gebunden als in der Ioffefalle. Bei doppeltem Strom in den Mikrodrähten (2 A) reduziert sich der Abstand auf  $a = 15 \mu\text{m}$ , was im Bereich der radialen Ausdehnung eines typischen Kondensats liegt.

Da die anharmonische Betriebsweise für die Mikro-Falle in unserer Apparatur für normale Parameter flacher ist als eine typische Ioffefalle, insbesondere als eine nor-

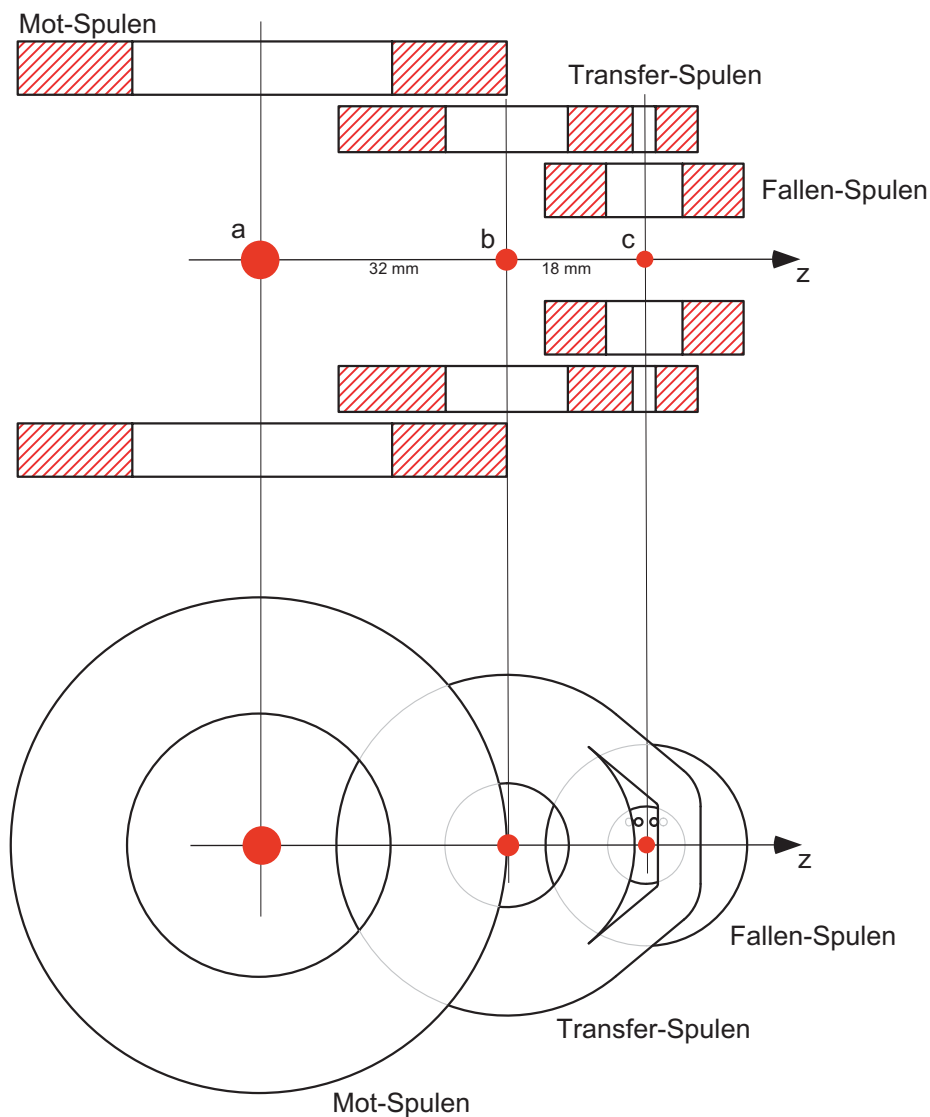
male Mikro-Falle, eignet sie sich nicht, um die kritischen Temperatur von Atom-Ensembles durch stärkere Kompression anzuheben. Eventuell ist aber die adiabatische Umformung eines in der normalen Mikrofaller erzeugten Kondensats in die anharmonische Falle möglich. Die beim Transfer abnehmende Zentralsdichte erlaubt die Unterdrückung von Dreikörperstößen, die zu Molekülbildung und Verlusten aus der Falle führen.

### 4.3 Tripel-Transfer

Der Betrieb einer magnetooptischen Falle (MOT) zur Bereitstellung von kalten Atomen und die effiziente magnetische Speicherung derselben am gleichen Ort ist nicht ohne Kompromisse möglich. Für die MOT braucht man ein schwaches sphärisches Quadrupolfeld und optischen Zugang aus 6 Raumrichtungen. Damit möglichst große Laserstrahlen verwendet werden können, sollten die Quadrupol-Spulen in einem relativ großen Abstand zueinander stehen. Bei der magnetischen Speicherung dagegen wird eine Falle umso effizienter, je höher die verfügbaren Gradienten sind. Diese erzeugt man jedoch besonders einfach mit kleinen Spulen, welche bei gleichen Gradienten mit sehr viel moderateren Strömen betrieben werden können.

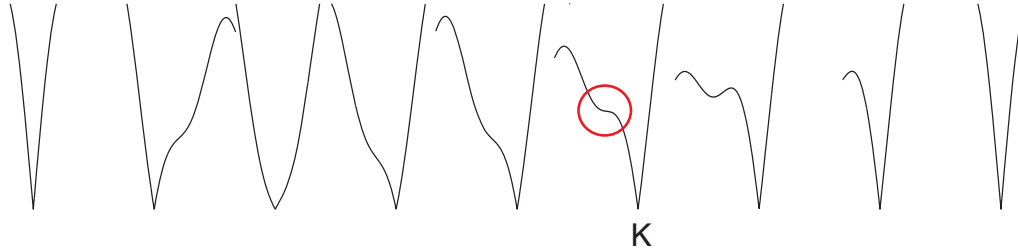
Eine Möglichkeit, beiden Anforderungen zu genügen, ist die räumliche Trennung von Magnetfalle und MOT. Mit dem in unserer Apparatur implementierten Tripeltransfer werden Atome am Ort der MOT in die relativ schwache Quadrupolfalle der MOT-Spulen geladen und dann auf adiabatische Weise über ein nächstes Spulenpaar (Transfer-Spulen) in das Quadrupolfeld der Fallen-Spulen transferiert. Der Transport erfolgt nach dem Prinzip eines magnetischen Förderbandes [Gre01, Hän01, Sch01b]. In Abbildung 4.12 sind Ansichten der Spulenanordnung unserer Apparatur dargestellt. Durch den vom Quadrupol der Mot-Spulen über die Transfer-Spulen zum Quadrupol der Fallen-Spulen jeweils ansteigenden Gradienten der Falle wird die Atomewolke beim Transport gleichzeitig komprimiert.

Der Verlauf der adiabatischen "Übergabe" eines Potentialminimums zwischen zwei überlappenden Spulen (siehe auch [Ott03]) hängt von verschiedenen Parametern ab. Abbildung 4.13 zeigt die zeitliche Veränderung des Potentialverlaufs auf der Transferachse zwischen zwei Spulen. Zu Beginn befinden sich die Atome im Quadrupolfeld der ersten Spule. Der Strom in der anderen Spule wird nun adiabatisch dazugeschal-



**Abbildung 4.12:** Spulenanordnung für den Tripeltransfer im Schnitt und in Draufsicht. Magnetisch gespeicherte Atome werden ausgehend vom Mittelpunkt der Motspulen (a) über eine Strecke von insgesamt 50 mm in den Quadrupol der Fallen-Spulen (c) verschoben. Damit diese Strecke überwunden werden kann, erfolgt der Transfer über den Zwischenschritt (b) in den Transfer-Spulen. Die von Spulenpaar zu Spulenpaar kleiner werdende Ausdehnung der Spulen implementiert automatisch eine adiabatische Kompression der Atome während dem Transfer. Damit der vertikale optische Zugang im Zentrum der Fallen-Spulen nicht durch das überlappende Transfer-Spulenpaar verdeckt wird, wurde in den Transferspulen eine Lücke frei gehalten. Mit der so entstehenden Form wird der zweite Transferschritt durch den größeren Überlapp noch zusätzlich optimiert.





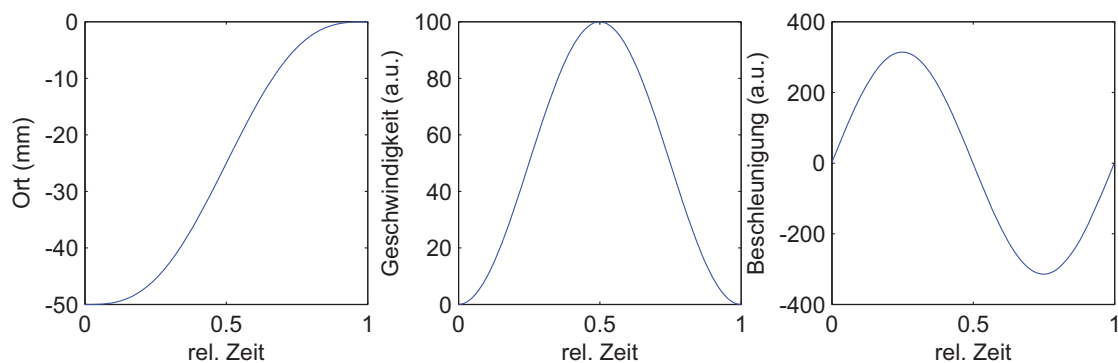
**Abbildung 4.13:** Veränderung des Potentialverlaufs auf der Transferachse zwischen zwei gleichen Spulen zu verschiedenen Zeitpunkten. Das Potential bewegt sich vom Mittelpunkt des ersten Spulenpaars (ganz links) in die Mitte des anderen Paares (rechts). Während des Transfers verformt sich das Potential deutlich und insbesondere bildet sich im Stadium K eine "Schulter" (Sattelpunkt) aus, welche die Tiefe des Transfers begrenzt.

tet, wodurch das Fallenminimum zur Mitte zwischen den Spulen gezogen wird. Die erste Spule kann nun wieder kontinuierlich ausgeschaltet werden. Nun sind die Atome im Quadrupol der zweiten Spule gespeichert. Während des Transfers bildet sich bei einem bestimmten Stromverhältnis eine schulterförmige Beule im Potential, von der sich im weiteren Verlauf ein zweites Minimum abspaltet. Heiße Atome können über diesen Sattelpunkt aus der Falle entweichen. Bei der Dimensionierung der Spulen muss deshalb darauf geachtet werden, dass jederzeit ein für optisch gekühlte Atome ausreichend tiefes Potential erzeugt wird.

Um zu vermeiden, dass die Atomwolke beim Tripeltransfer unkontrolliert aufgeheizt wird, muss nicht nur darauf geachtet werden, dass sich die Potentialform adiabatisch verändert, sondern auch der Ort des Minimums. Da gespeicherte Atome nicht starr mit dem linearen Potential verbunden sind, erfahren sie eine auf das Potential wirkende Beschleunigung als zusätzlichen Gradienten, der das Potential verkippt (1g entspricht 15 G/cm bei Rubidium). Bei zu plötzlicher Beschleunigung des Fallenminimums führt dies zu einem Aufheizen der Wolke. Adiabatisch bedeutet in diesem Fall langsam gegen die Fallenbewegung des Atoms. Beim Quadrupol ist diese von der maximalen Amplitude eines Atoms, also im Mittel von der Temperatur abhängig.

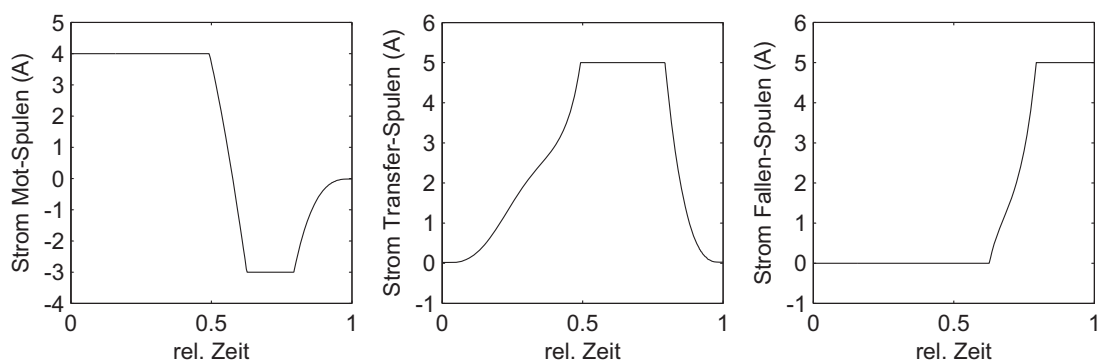
Zur Erfüllung dieser Bedingungen erfolgt der Transfer in unserem Aufbau gemäß der Funktion

$$s(t) = s_0 \cdot \left( t/T_0 - 1 - \frac{\sin(2\pi t/T_0)}{2\pi} \right) \quad (4.30)$$



**Abbildung 4.14:** Kinematik des Tripeltransfers. Damit die zu transportierende Atomwolke nicht unkontrolliert aufgeheizt wird, muss der Transport adiabatisch erfolgen. Insbesondere sollte die Beschleunigung des Potentialminimums stetig sein.

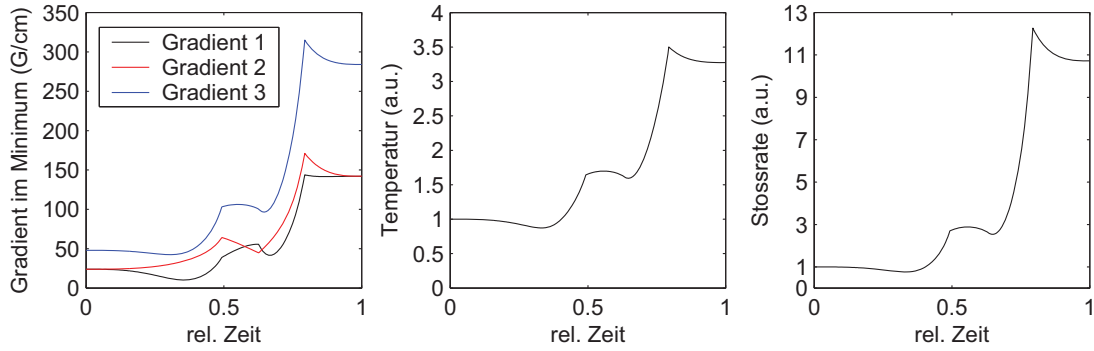
mit der Transferstrecke  $s_0$  und der Transferdauer  $T_0$ . Für  $t = 0$  startet der Transfer bei  $-s_0$ , bei  $t = 1$  endet der Transfer am Ursprung. Die scheinbar komplizierte Funktion ist notwendig, da z.B. die  $\sin^2$ -Funktion die Bedingung mit der stetig von Null startenden Beschleunigung nicht erfüllt. Abbildung 4.14 zeigt die obige, von uns beispielhaft gewählte Ortskurve, den Verlauf der Geschwindigkeit und der Beschleunigung.



**Abbildung 4.15:** Stromverlauf in den Spulen.

Der Ort der Falle hängt in nicht-trivialer Weise von den Strömen in den Spulen ab. Um von der erwünschten Ortskurve auf den benötigten Stromverlauf zu schließen, wurde das Feld der Spulen auf der Transferachse numerisch simuliert, eine Strom-Ort-Kurve berechnet, und diese dann mit der Ort-Zeit-Kurve gefaltet. In Abbildung

4.15 sind die erhaltenen Verläufe dargestellt. Da der Transfer in unserem Fall zwischen drei Spulen (Tripel-Transfer) stattfindet, kann ein zusätzlicher Trick im Bezug auf die begrenzende Falltiefe angewandt werden. Wenn man, wie in Abbildung 4.15 gezeigt, den Strom in den Mot-Spulen nicht nur ausschaltet, sondern kurzzeitig gegenpolt, so wird das Fallenminimum durch das zusätzliche Feld von den Motspulen schon vor der nächsten Übergabe noch weiter in Richtung Fallen-Spulen gedrückt. Der im weiteren Verlauf entstehende Sattelpunkt ist deshalb keine so einschneidende Tiefenbegrenzung.



**Abbildung 4.16:** Richtungsgradienten, Temperatur- und Stossraten-Verlauf beim Tripeltransfer.

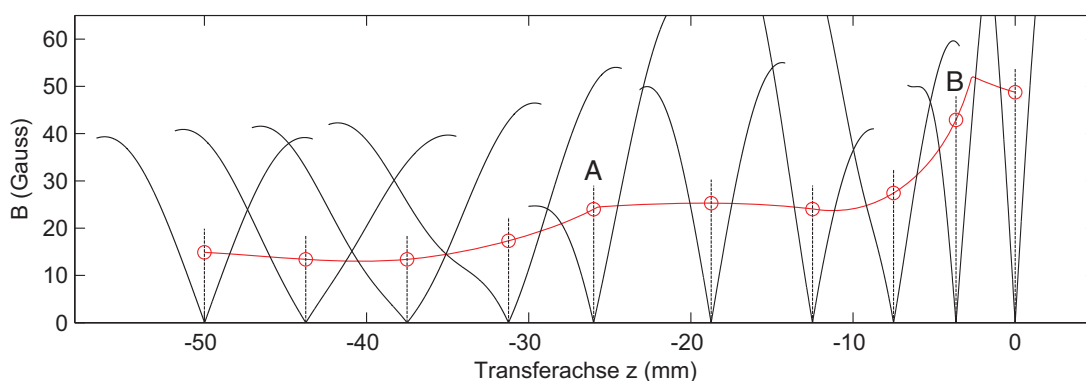
Wie schon erwähnt wird eine kalte Atomwolke im Verlauf des Tripeltransfers durch den ansteigenden Feldgradienten komprimiert. Im günstigsten Fall erfolgt diese Kompression adiabatisch und Dichte  $n$ , Temperatur  $T$  und Stossrate  $\beta_{stoss}$  der gefangenen Atome transformieren sich, ohne dass die Phasenraumdicke sich dabei ändert. Bei der adiabatischen Kompression verhalten sich die Größen wie

$$n \propto \alpha, \quad T \propto \alpha^{2/3} \quad \text{und} \quad \beta_{stoss} \propto \alpha^{4/3},$$

wobei  $\alpha$  der Gradient der Quadrupolfalle ist. In Abbildung 4.16 ist der simulierte Gradientenverlauf und die sich daraus ergebenden Kurven für Temperatur und Stoßrate dargestellt.

Um eine Aussage über die Effizienz des Transfers machen zu können, muss die Temperatur der Atome für jeden Zeitpunkt in Relation zur momentanen Falltiefe gesetzt werden. Um ca. 95 % einer thermischen Verteilung zu transferieren sollte die Falltiefe zu jeder Zeit einem höheren Wert als der Energie  $10k_B T$  entsprechen.

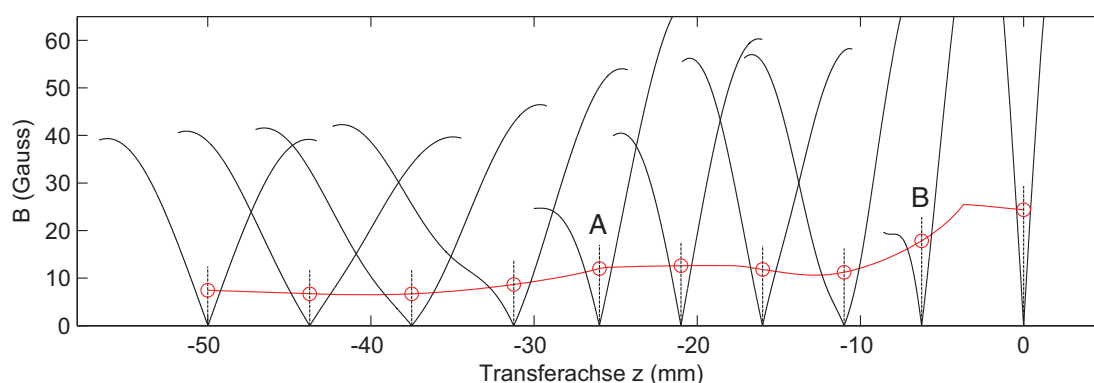
Abbildung 4.17 zeigt den Verlauf des Fallenpotentials und der Falltiefe. Der Transfer erlaubt den Transport einer Atomwolke mit der Starttemperatur  $T_0 = 100\mu\text{K}$  bei einer Tiefe von  $10k_B T$ . Im Vergleich mit dem Verlauf für den Tripel-Transfer ohne zusätzliches Offsetfeld der Mot-Spulen (Abbildung 4.18) erkennt man die Überlegenheit dieser Methode. Bei der gleichen Starttemperatur ist der Transfer am kritischen Punkt hier nur  $4.5k_B T$  tief, wodurch nur ca. 60% der Atome transferiert werden.



**Abbildung 4.17:** Verlauf des Fallenpotentials beim Tripeltransfer. Die rote Kurve zeigt den maximalen Verlauf der inneren Energie einer Atomwolke (in Einheiten des Magnetfelds) unter Berücksichtigung ihrer Zunahme beim adiabatischen Transfer. Kreise markieren den Wert am Ort der dargestellten Potentialverläufe. Prinzipiell begrenzende Punkte sind die mit A und B markierten Stellen, wobei in diesem Fall Punkt A die Grenze ist. Für Atome einer mit  $T_0 = 100\mu\text{K}$  in den Mot-Spulen gestarteten Temperaturverteilung entspricht der dargestellte Verlauf einer Falltiefe von  $10 k_B T$ , wobei über 90% der Atome energetisch unterhalb dieser Grenze liegen und transferiert werden können. Zur Verbesserung der Übersichtlichkeit sind die Potentialkurven bei unverändertem Minimum um den Faktor 4 in der Ortskoordinate gestaucht dargestellt. Ihr Verlauf endet an den jeweiligen die Tiefe des Einschlusses begrenzenden Punkten.

## 4.4 Mechanischer Aufbau

Beim Aufbau der in dieser Arbeit beschriebenen Apparatur [Don04, Sil00] wurde die grundsätzliche Strategie verfolgt, sämtliche Teile der Magnetfalle im Vakuum einzubauen. Auf diese Weise können felderzeugende Spulen, Drähte und Mikrostrukturen nahezu beliebig miteinander kombiniert werden. Die Vakuumkammer umschließt den



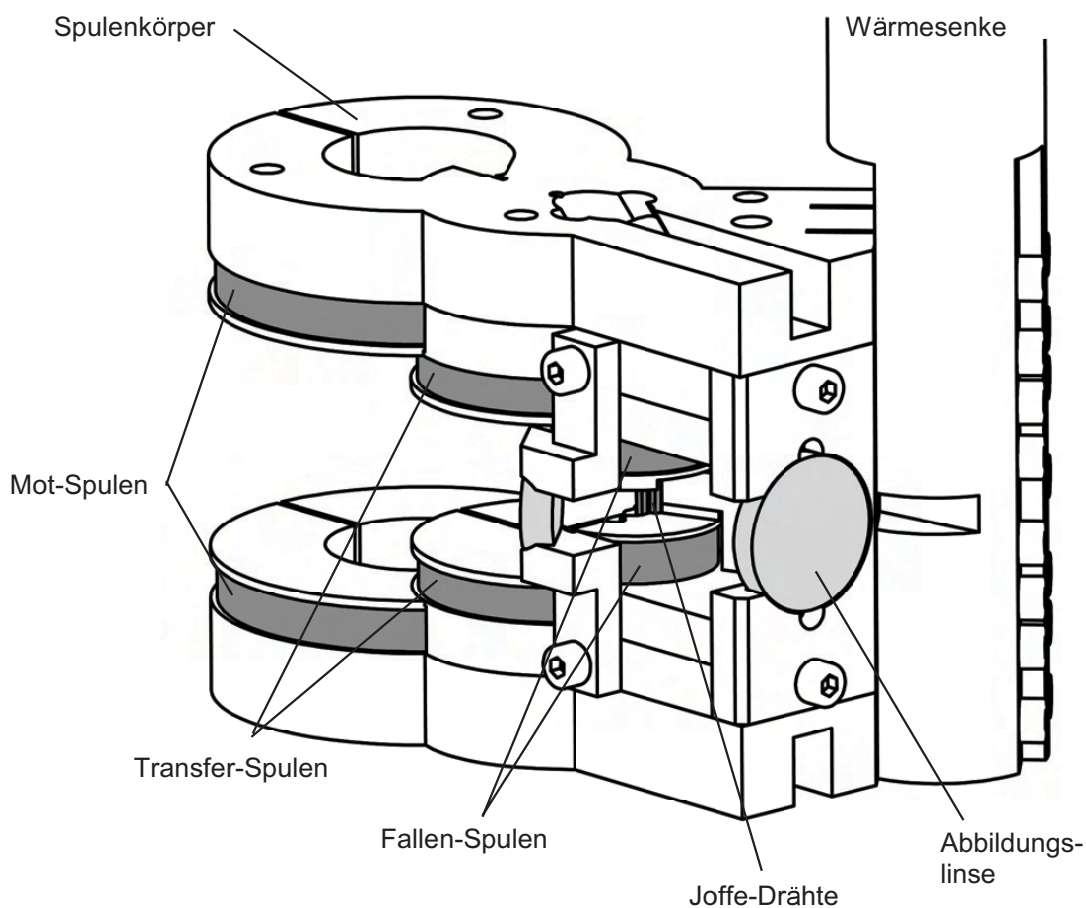
**Abbildung 4.18:** Verlauf des Fallenpotentials beim Tripeltransfer ohne zusätzliches Feld von den Mot-Spulen. Die rote Kurve zeigt den maximalen Verlauf der inneren Energie einer Atomwolke (in Einheiten des Magnetfelds) unter Berücksichtigung ihrer Zunahme beim adiabatischen Transfer. Für diesen Fall ist Punkt B begrenzend. Für Atome einer mit  $T_0 = 100\mu\text{K}$  in den Mot-Spulen gestarteten Temperaturverteilung entspricht der dargestellte Verlauf einer Falltiefe von ca.  $4.5 k_B T$ , wodurch hier nur 60% der Atome energetisch unterhalb dieser Grenze liegen und transferiert werden können.

Aufbau vollständig und stellt so keinerlei Randbedingungen an die Größe der Feld-elemente oder deren Abstand zu den gefangenen Atomen. Insbesondere magnetische Mikrofallen können anders nicht realisiert werden.

Um trotz der vielen Teile in der Kammer bei einem Betriebsdruck von wenigen  $10^{-11}$  mbar experimentieren zu können, muss bei der Auswahl der eingesetzten Materialien sehr sorgfältig vorgegangen werden. Verwendbar sind im wesentlichen Edelstahl, OFHC-Kupfer (Oxide Free High Conductivity), Glas, Keramik und Kapton zur Isolation von elektrischen Leitungen. Sämtliche Hohlräume müssen offen sein, so dass keine virtuellen Lecks entstehen, die ihren Gasinhalt über längere Zeit langsam abgeben und so den Druck verschlechtern könnten. Oberflächen sollten möglichst glatt und fettfrei sein. Zusätzlich muss für ausreichend Wärmeabfuhr gesorgt werden, da selbst kleine Heizleistungen durch die fehlende Konvektionskühlung sehr schnell zur starken Erhitzung von Bauteilen führen können.

Die Magnetfalle in unserem Aufbau besteht im wesentlichen aus massiven, verschraubten Kupferblöcken. Diese dienen einerseits als Spulenkörper und mechanische Halterung, andererseits aber auch als Wärmesenke, die die im Betrieb in den Spulen und Drähten entstehende Wärme abführt. Sämtliche Teile sind direkt

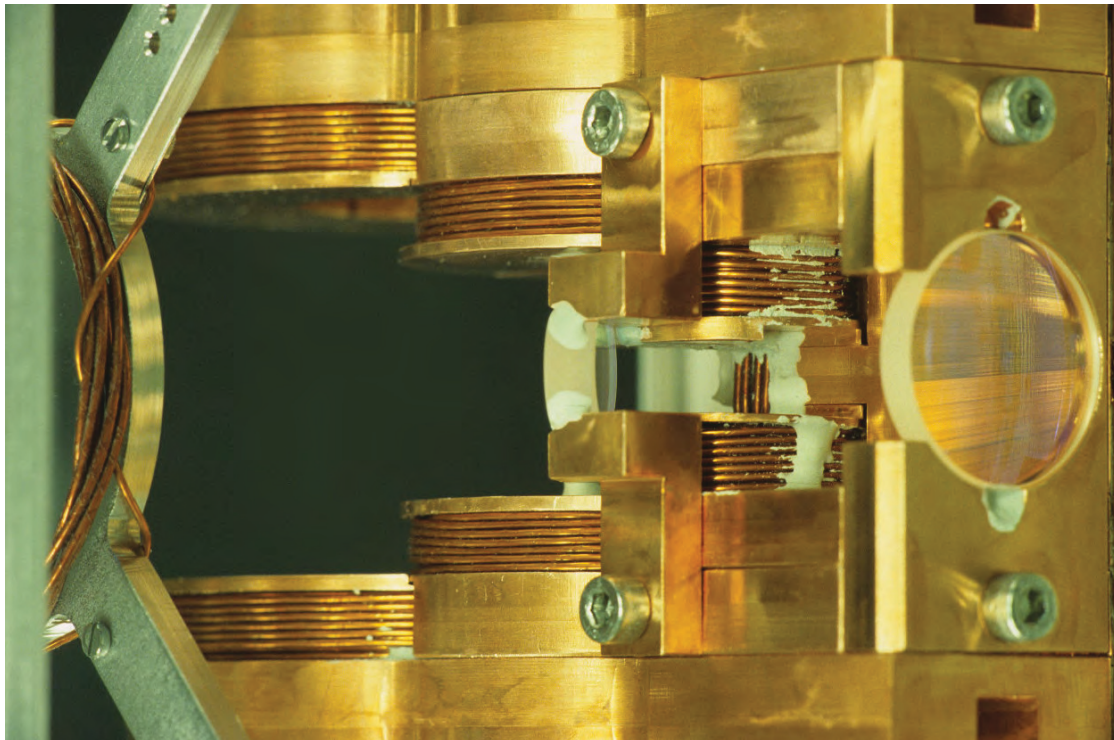
mit einem 34 mm dicken Kühlstab verbunden, wobei zur besseren Vermittlung des Wärmekontakts zusätzlich Indiumfolie verwendet wurde. Diese wurde beim Ausheizen der Apparatur flüssig und bildete eine Lötverbindung zwischen den Kupferteilen. Der Kühlstab führt über einen Wellbalg aus der Vakuumkammer heraus zu einem Peltierelement mit nachgeschaltetem Durchflusskühler und kann auf diese Weise auf einer Temperatur von ca.  $-45\text{ }^{\circ}\text{C}$  gehalten werden. Durch seine geringe Temperatur wirkt der gesamte Aufbau als Kryopumpe und verbessert so das Vakuum in der Kammer zusätzlich.



**Abbildung 4.19:** Aufbau im Vakuum. Man sieht die verschiedenen felderzeugenden Elemente. Für eine gute Wärmeabfuhr sind sämtliche Spulenkörper miteinander verbunden und direkt am Kühlstab als Wärmesenke festgeschraubt. Die in geringem Abstand zur Falle angebrachte Linse dient zur hochauflösenden Abbildung von kalten Atomwolken.

Abbildung 4.19 ist eine Darstellung der Elemente der Magnetfalle im Vakuum. Die

Fotografie in Abbildung 4.20 zeigt den Aufbau von der Seite.



**Abbildung 4.20:** Ansicht der Magnetfalle von der Seite.

# Kapitel 5

## Kühlen ins entartete Regime

Der Hauptteil dieser Arbeit bestand aus der Planung, Konzeption und Realisierung einer Apparatur, mit deren Hilfe sowohl Rubidium, als auch Lithium im entarteten Regime (für typische Parameter entspricht das einer Temperatur um ein Mikrokkelvin) bereitgestellt werden können. Die so gewonnenen entarteten Atomensembles sind die Basis für zukünftige Experimente, bei denen verschiedene Aspekte des Fermi-Gases, der Wechselwirkung zwischen den Spezies und des Bose-Einstein Kondensats untersucht werden sollen. In diesem Kapitel wird die Vorgehensweise beim Kühlen der Atome beschrieben und erste experimentelle Resultate werden vorgestellt.

### 5.1 Kühlen von Rubidium

Ausgangspunkt für die Präparation von Rubidium im entarteten Regime sind ca.  $2 \cdot 10^8$  mit der magnetooptischen Falle eingefangene und vorgekühlte Atome, die in die Magnetfalle der Mot-Spulen umgeladen und von dort aus über den Tripel- und den Ioffe-Transfer in die Ioffefalle zwischen den Fallen-Spulen transportiert wurden. Das beim Transfer komprimierte Atomensemble hat nun eine Temperatur von ca.  $300 \mu\text{K}$ .

Damit die Temperatur weiter verringert werden kann, wird nun die Technik des Verdampfungs- oder evaporativen Kühlens [Hes86] angewandt. Dieses Ver-



fahren basiert auf der schrittweisen Absenkung des Fallenrands, so dass selektiv überdurchschnittlich heiße Atome aus der Falle entweichen können. Der zurückbleibende Rest der thermische Verteilung rethermalisiert durch Stöße zwischen den Atomen und die Temperatur der gefangenen Atome sinkt. Eine effiziente Realisierung des Verfahrens hängt stark davon ab, ob genug Zeit zur Rethermalisierung bleibt, bevor der Fallenrand weiter abgesenkt wird. Wird zu schnell abgesenkt, gehen unnötig viele Atome verloren, ohne dass die Temperatur dabei nennenswert abnimmt. Im Optimalfall nimmt die Dichte der Atome kontinuierlich zu und die Kollisionsrate steigt trotz abnehmender Temperatur an. Man spricht dann von "Runaway Evaporation".

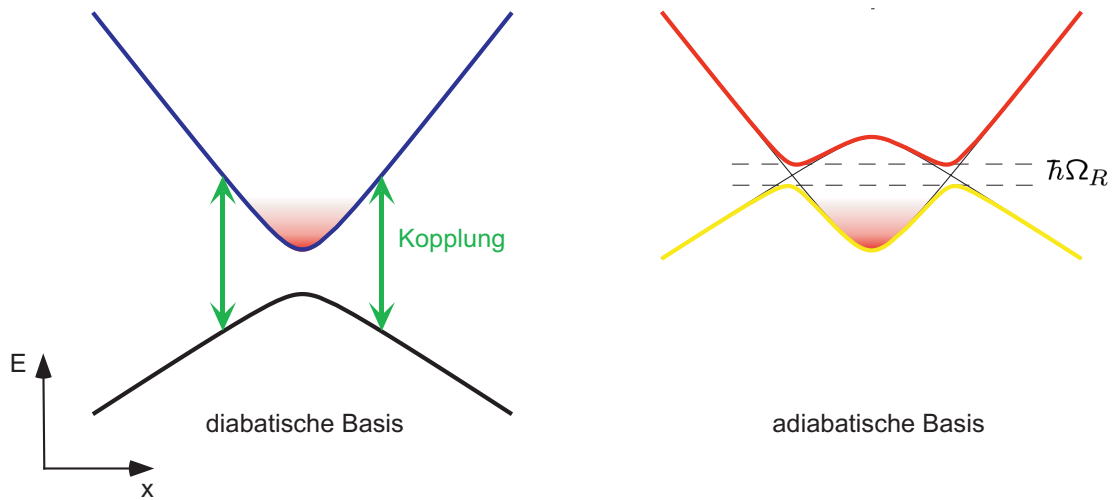
Zur Realisierung des Absenkens des Fallenrands sind verschiedene Verfahren denkbar. Konzeptionell am einfachsten ist das mechanische Einbringen einer Oberfläche in das Fallenvolumen. Atome, die die Oberfläche berühren, werden entweder adsorbiert oder durch Stöße mit den vergleichsweise heißen Atomen in der Oberfläche aus dem Falle entfernt. Da bei dieser Methode der Fallenrand nur in einer Richtung abnimmt, müssen Trajektorien der zu entfernenden Atome entweder schon in Richtung Oberfläche verlaufen, oder ergodisch in solche umgewandelt werden. Die dazu zusätzlich notwendige Zeit verlangsamt bei diesem Verfahren den Prozess.

Da der Kühlprozess in Konkurrenz zu nicht geschwindigkeitsselektiven Verlusten durch Restgasstöße steht, sollte das Verfahren möglichst schnell verlaufen. Bessere Bedingungen bietet das Absenken des Fallenrands durch Einstrahlen von Radiofrequenz- oder Mikrowellen.

### 5.1.1 Evaporatives Kühlen mit Mikrowellen

Beim Kühlen mit Radiofrequenz- oder Mikrowellen macht man sich die räumliche Variation des Magnetfeldbetrags in der Magnetfalle zu Nutze. Die Einstrahlung einer festen Radiofrequenz bewirkt auf einer geschlossenen Äquipotentialfläche die Kopplung des gefangenen Zustands an andere Zustände. Atome, die in den Wechselwirkungsbereich kommen, können hier in freie oder sogar abstoßende Zustände transferiert und damit aus der Falle entfernt werden. Die zugrundeliegende Physik ist die des Landau-Zener Übergangs.

Die Darstellung der Kopplung von Fallenzuständen in der adiabatischen Basis ist in



**Abbildung 5.1:** Kopplung von Fallenzuständen im Landau-Zener Bild (Schnitt durch die Falle). Werden zwei Fallenzustände durch eine Wechselwirkung lokal gekoppelt, so würde ein am Ort der Wechselwirkung ruhendes Atom in der diabatischen Basis eine Rabioszillation ausführen, bei der die Wahrscheinlichkeit das Atom im einen oder anderen Zustand zu messen periodisch oszilliert. Die Frequenz der Oszillation ist die Rabifrequenz  $\Omega_R$  und die Stärke der Kopplung  $\hbar\Omega_R$ . Bewegt sich das Atom mit einer Geschwindigkeit über diesen Punkt hinweg, so wird die Beschreibung der Physik in diesem Bild durch die vom Atom erfahrene zeitlich veränderliche Wechselwirkung ausgesprochen kompliziert. Abhilfe schafft der Übergang zum sogenannten Dressed-State-Bild. In der adiabatischen Basis wird der Vorgang anhand der gekoppelten (dressed) Zustände beschrieben, welche am Ort der Wechselwirkung um den Betrag  $\hbar\Omega_R$  aufgespalten sind (avoided level crossing). Der lokale Einfluss der Wechselwirkung zeigt sich im Verlauf der neuen Zustände, der mit kleiner werdender Kopplung in den Verlauf der ungestörten Zustände übergeht. Für Atome im Minimum der Falle hat das Potential effektiv eine geringere Tiefe.

Abbildung 5.1 dargestellt. Die effektive Falltiefe für gefangene Atome wird durch die Kopplung modifiziert. Heiße Atome durchlaufen den Ort der Wechselwirkung mit einer bestimmten Geschwindigkeit, und entkommen auf diese Weise aus der Falle. Bei Betrachtung des Vorgangs in der diabatischen Basis kommt das Atom in den Bereich der Wechselwirkung und es treten Rabi-Oszillationen auf. Die integrierte Phase beim Prozess, ergibt sich dabei so, dass das Atom nach der Passage den Zustand gewechselt hat. Bedingung für diesen Verlauf ist die Adiabaticität. Die resonante Kopplung muss jederzeit stärker sein als die Änderung der Verstimmung zwischen den Zuständen am Ort des Atoms.

Mit dem Landau-Zener Formalismus kann die Adiabaticitätsbedingung als Wahrscheinlichkeit für den adiabatischen Verlauf formuliert werden [Rub81, Vit99]:

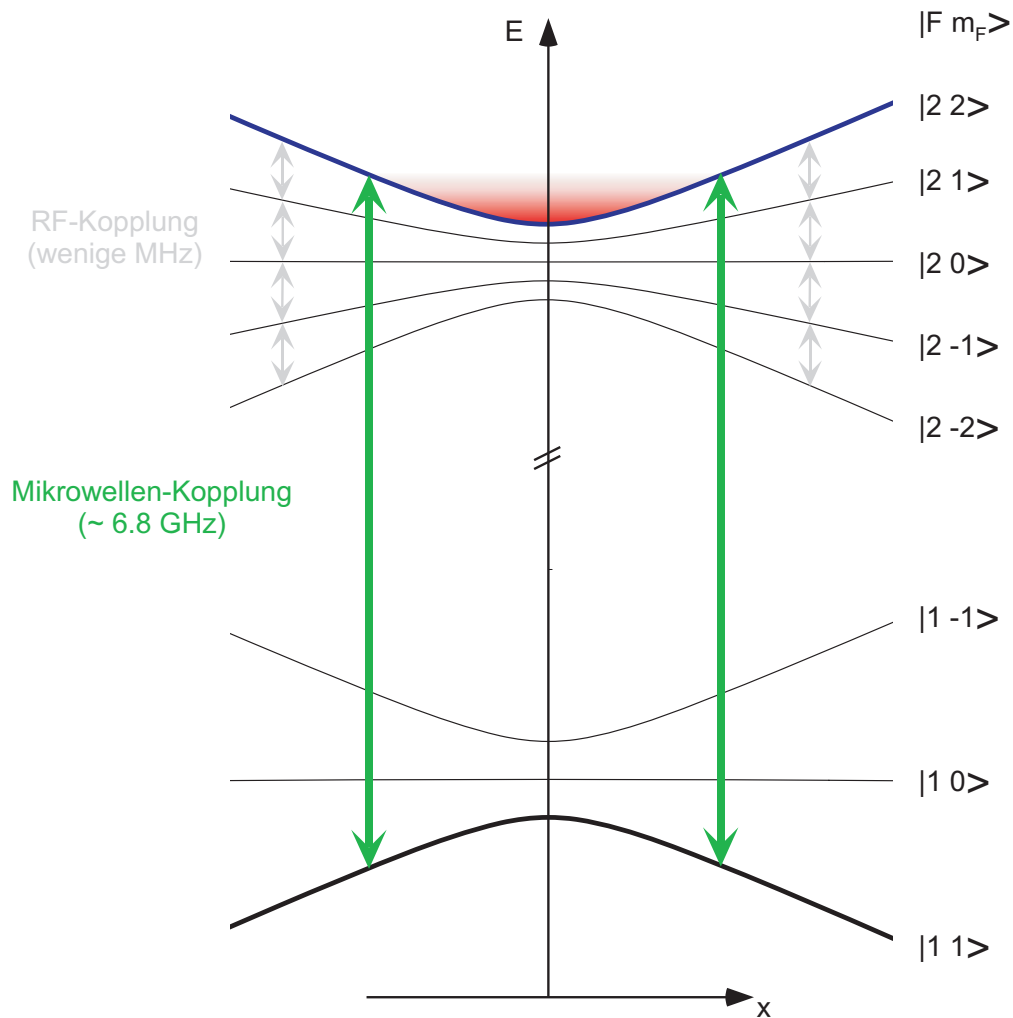
$$P_{adiab} = 1 - \exp(-2\pi\Gamma) \quad \text{mit} \quad \Gamma = \frac{\Omega_R^2}{4 \frac{d}{dt} \Delta}. \quad (5.1)$$

Die Größe  $\Delta$  ist der Verlauf der Verstimmung (Frequenz) zwischen den beiden ungekoppelten Zuständen bei Subtraktion der Kopplungsfrequenz. Der Ausdruck gilt strenggenommen nur im Grenzwert für linear verlaufendes  $\Delta$  und Atome die aus dem Unendlichen kommen, liefert aber in der Praxis eine sehr gute Abschätzung [Don04] für die benötigte Kopplungsstärke.

Im Experiment gibt es verschiedene Möglichkeiten, die Kopplung zu realisieren (Abbildung 5.2). Die übliche Methode der Anwendung von Radiofrequenz im Bereich weniger MHz ist in unserem Experiment im Hinblick auf das gleichzeitige Speichern von Lithium nicht praktikabel. Wir verwenden Mikrowellenstrahlung, da so sichergestellt ist, dass ausschließlich Rubidium evaporiert wird. Eingestrahlt wird diese durch eine Helix-Antenne [Kra88, Don04], die über einen 2W-Verstärker aus einem Synthesizer (Rhode&Schwarz, SMR20) gespeist wird. Die Verwendung des Synthesizers erlaubt uns bei Frequenzmodulation mit einer analogen Steuerspannung eine Genauigkeit von ca. 0.5 kHz, was einer relativen Genauigkeit von  $10^7$  entspricht.

### 5.1.2 Zustandsbereinigung

Trotz sorgfältiger Optimierung des optischen Zustand-Pumpens beim Umladen der Rb-Atome aus der magnetooptischen Falle, lässt es sich nicht verhindern, dass sich ein kleiner Anteil der Atome (ca.  $10^7$ ) in unerwünschten Zuständen befindet. In der



**Abbildung 5.2:** Radiofrequenzkühlen bei  $^{87}\text{Rb}$ . Die Darstellung zeigt die Aufspaltung des Grundzustands  $5^2s_{1/2}$  in der Ioffefalle. Magnetisch gespeicherte Atome befinden sich im Zustand  $|F m_F \rangle = |2 2 \rangle$ . Radiofrequenz im Bereich weniger MHz koppelt diesen Zustand kaskadenartig an ungefangene Zustände. Eine Verkleinerung der eingestrahlten Frequenz führt zu einem tieferen Einschnitt in die Falle. Da diese Methode die Fallentiefe auch für Lithium modifiziert, verwenden wir die alternative Möglichkeit, den Fallenzustand an den ungebundenen Zustand  $|1 1 \rangle$  zu koppeln. Die hierfür nötige Frequenz entspricht ungefähr der Hyperfein-Aufspaltung des Grundzustands (6.835 GHz), weshalb es sich um Mikrowellenstrahlung handelt. Die Hyperfein-Aufspaltung von Lithium (228 MHz) ist zu diesem Wert weit verstimmt, so dass der Fallenrand ausschließlich für Rubidium abgesenkt wird. Für den Übergang  $|2 2 \rangle \Rightarrow |1 1 \rangle$  ist das Verhältnis von Frequenz zu Magnetfeld ca. 2.1 MHz/G.

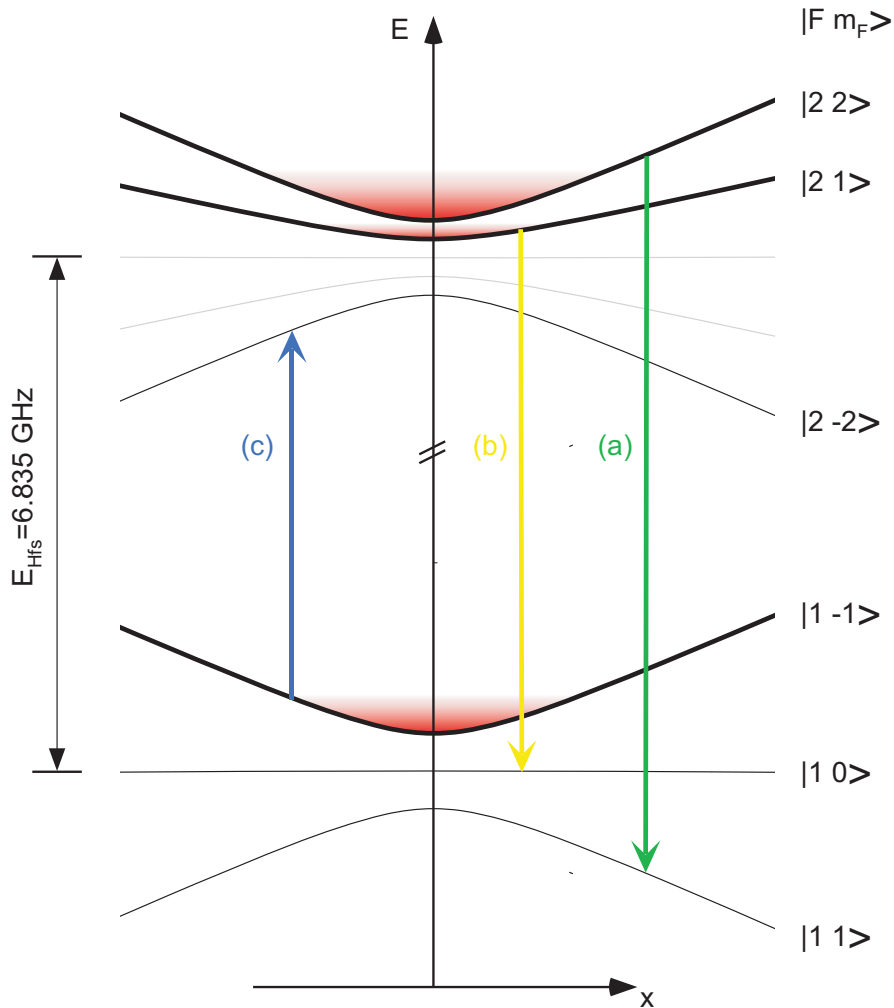
Magnetfalle speicherbar sind Atome in den Zuständen  $|F m_F \rangle = |2 2 \rangle$ ,  $|2 1 \rangle$  und  $|1 -1 \rangle$ . Verluste durch Spinrelaxation sind in diesem Fall zwar nur schwach, die im Gegensatz zum RF-Kühlen bei der Mikrowellenmethode nicht evaporierten  $|1 -1 \rangle$ -Atome werden jedoch sympathetisch mitgekühlt. Sie stellen eine zusätzliche Kühllast dar, die besonders für sehr kleine und kalte  $|2 2 \rangle$ -Wolken stark ins Gewicht fällt. Erst kurz vor dem Erreichen des entarteten Regimes entkoppelt die  $|1 -1 \rangle$ -Wolke thermisch von den stärker gebundenen  $|2 2 \rangle$ -Atomen. Die Lebensdauer des Kondensats ist in diesem Fall auf wenige ms begrenzt.

Die Präparation eines reinen Ensembles im Zustand  $|2 2 \rangle$  ist durch selektive Entleerung der unerwünschten Zustände mit der Mikrowelle möglich. Abbildung 5.3 veranschaulicht die Vorgehensweise.

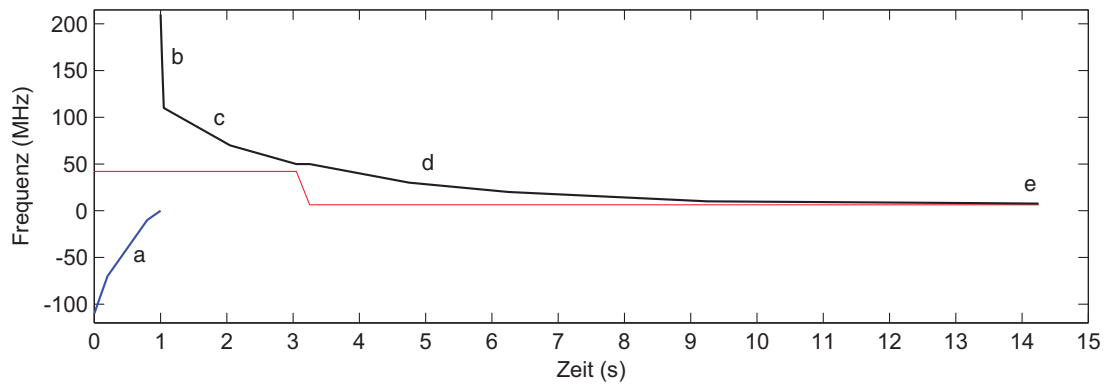
### 5.1.3 Kondensation von Rubidium

Zur Erzeugung eines Bose-Einstein Kondensats von Rubidium-Atomen werden alle Schritte miteinander kombiniert. Die zunächst im Quadrupol der Fallenspulen gefangenen Atome werden mit dem Ioffetransfer in die Ioffefalle überführt. Nun werden Atome im Zustand  $|1 -1 \rangle$  aus der Falle entfernt. Damit später keine ungekühlten Atome als Oorstsche Wolke in der Falle bleiben, wird die Mikrowellenfrequenz zunächst vom Fallenrand auf ca. 100 MHz an die Hyperfeinaufspaltung gefahren, wo dann der erste Kühlschritt folgt. Der Verlauf des evaporativen Kühlens bis zur Kondensation ist in Abbildung 5.4 dargestellt. Nach ungefähr 15 Sekunden bildet sich ein Bose-Einstein Kondensat mit knapp  $10^6$  Atomen.

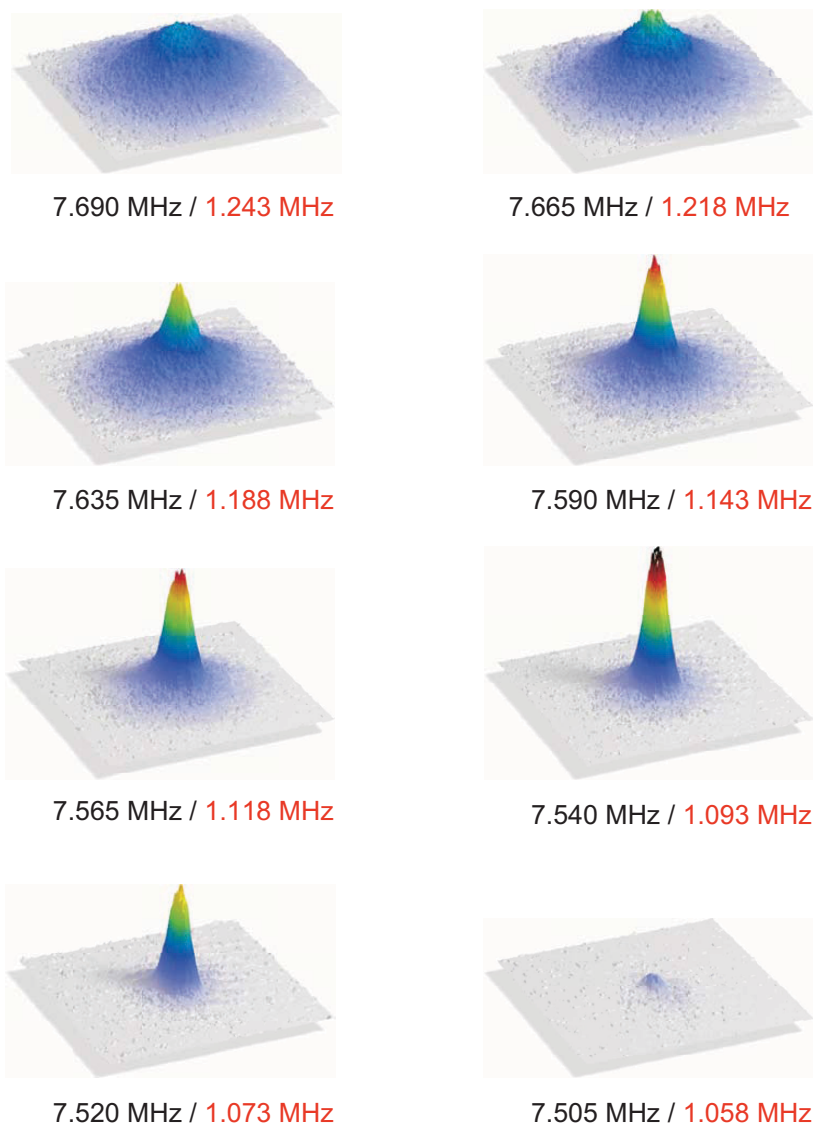
Anhand von Abbildung 5.5 wird der Ablauf bei der Bildung der Bose-Einstein Kondensats in Flugzeitbildern deutlich. In der Mitte der thermischen Wolke entsteht das Kondensat bei ca.  $1 \mu\text{K}$ . Durch Variation des Endpunkts beim Mikrowellenverlauf kann die thermische Wolke und dann auch das Kondensat schrittweise entfernt werden.



**Abbildung 5.3:** Vorgehensweise bei der Präparation eines reinen Ensembles im Zustand  $|2\ 2\rangle$  in der Ioffefalle. Kopplungspfeil (a) markiert den normalen, zum Kühlen verwendeten Übergang  $|2\ 2\rangle \rightarrow |1\ 1\rangle$ . Pfeile verdeutlichen die Richtung, in die Atome transferiert werden. Kopplungspfeil (b) ist der Übergang  $|2\ 1\rangle \rightarrow |1\ 0\rangle$ . Man erkennt, dass nur relativ kalte Atome entfernt werden können, weil für größere Verstimmungen auch Übergang (a) getrieben wird. Der mit (c) markierte Übergang  $|1\ -1\rangle \rightarrow |2\ 0\rangle$  dient zur Entfernung der Atome im unteren Hyperfeinzustand. Im Gegensatz zu den beiden anderen Übergängen ist die Frequenz hier kleiner als die Hyperfeinaufspaltung und muss daher beim Entfernen der Atome in Richtung zu höheren Werten hin verstimmt werden.



**Abbildung 5.4:** Mikrowellenfrequenz beim evaporativen Kühlen ins entartete Regime (schwarze Kurve, Frequenz relativ zur Hyperfeinaufspaltung). Offsetfeld der Magnetfalle in Frequenzeinheiten (rote Kurve, 2.1 MHz/G). Der Verlauf ist in Schritte a-e unterteilt. Abschnitt a ist die Rampe zur Entfernung des Zustands  $|1 - 1 \rangle$  (blau). Damit keine ungekühlten Atome in der Falle verbleiben (Ortsche Wolke), die später zu Heizraten führen, wird die Frequenz in Abschnitt b direkt vom Fallenrand bis zum Rand der eigentlichen Atomverteilung verfahren. In Abschnitt c erfolgt die erste Kühlrampe in der Magnetfalle bei hohem Offsetfeld  $B_0 = 20$  Gauss. Nun wird das Offsetfeld der Falle auf  $B_0 = 3$  Gauss erniedrigt und es folgt der wichtigste Kühlschritt d, bis im Punkt e das entartete Regime erreicht ist.



**Abbildung 5.5:** Absorptionenaufnahmen von der Entstehung eines Rubidium Bose-Einstein Kondensats (nach 20 ms Flugzeit). Die gemessene Absorption ist zur Veranschaulichung als Höhe dargestellt. Von links oben nach rechts unten nimmt die Verstimmung der Mikrowelle (zur Hyperfeinaufspaltung (schwarz)/ zum Fallenboden (rot)) am Ende der Kühlrampe immer weiter ab. Im Zentrum der thermischen Atomwolke bildet sich ab 7.665 MHz ein Bose-Einstein Kondensat, das immer stärker anwächst. Ab 7.635 MHz ist die thermische Wolke vollständig entfernt, und die Mikrowelle schneidet in das Bose-Einstein Kondensat. Bei 7.505 MHz ist das Kondensat dann vollständig entfernt.



## 5.2 Kühlen von Lithium

Im Gegensatz zum Verfahren bei Rubidium gestaltet sich das Kühlen von  ${}^6\text{Lithium}$  etwas aufwändiger. Zur Vermeidung von Verlusten durch Spinrelaxation präpariert man auch hier eine möglichst reine Lithiumwolke im Zustand  $|3/2\ 3/2\rangle$ . Um das Gas analog zur Vorgehensweise bei Rubidium durch Evaporation heißer Atome und anschließender Thermalisierung kühlen zu können, wäre eine ausreichende Stoßrate zwischen den fermionischen Lithiumatomen notwendig. Da es für spinpolarisierte, identische Fermionen (Triplett-Konfiguration) keine s-Wellen-Stöße geben kann, tragen nur ungerade höhere Partialwellen bei, die für tiefe Temperaturen jedoch durch eine Zentrifugalbarriere unterdrückt werden.

Der Schwellwert der Kollisionsenergie  $E_s$ , ab der eine Partialwelle mit dem Drehimpuls  $l$  beitragen kann wird durch die Höhe der Zentrifugalbarriere [DeM98] angenähert:

$$E_s = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mb^2} - \frac{C_6}{b^6}, \quad \text{mit} \quad b^2 = \left( \frac{6C_6 m}{\hbar^2 l(l+1)} \right)^{1/2}. \quad (5.2)$$

Mit Werten für  ${}^6\text{Lithium}$  [McA96] und  $l = 1$  erhält man eine Schwellenergie von  $E_s = 2.34$  mK in Einheiten der Temperatur. Lithiumatome in unserem Experiment führen also von Anfang an keine Kollisionen untereinander aus.

Entartetes  ${}^6\text{Lithium}$  wird in typischen Experimenten meist mit Hilfe von Spinmischungen in optischen Fallen [Joc, O'H02, Gra02] oder durch "sympathetisches" Kühlen hergestellt. Hierbei verwendet man eine Mischung zweier Atomspezies, von denen eine evaporativ gekühlt, die andere durch thermalisierende Stöße sympathetisch angekoppelt wird. Für  ${}^6\text{Lithium}$  gelang diese Methode schon in der Mischung mit dem bosonischen Isotop  ${}^7\text{Lithium}$  [Tru01, Sch01b] und mit dem ebenso bosonischen  ${}^{24}\text{Natrium}$  [Had02]. Thermalisierende Stöße in der Mischung aus  ${}^6\text{Lithium}$  mit  ${}^{87}\text{Rubidium}$  konnten im Rahmen dieser Arbeit zum ersten Mal beobachtet und zur Erzeugung eines Fermi-Gas verwendet werden.

### 5.2.1 Ausgangsbedingungen

Da das Lithium in der Magnetfalle zu Beginn noch recht heiß ist, kann die Ausgangstemperatur der Wolke nur schlecht aus Flugzeitaufnahmen bestimmt werden. Durch

seine geringe Masse expandiert Lithium bei diesen Temperaturen beim Ausschalten fast instantan. Als Alternative wurde die Starttemperatur deshalb durch mechanisches Abschälen der Atomwolke bestimmt. Zu diesem Zweck wird das Fallenminimum wie beim Mikro-Transfer (Kapitel 4.2.1) in Richtung Mikrofalle transferiert, die Mikrodrähte bleiben aber ausgeschaltet. Atome, die dabei die Oberfläche der Spule erreichen, werden entfernt. Da das fermionische Lithium nicht alleine thermalisieren kann, entspricht die Energieverteilung der zurückbleibenden Atome einer abgeschnittenen Boltzmann-Verteilung. Die Bestimmung der Atomzahl für immer tiefere Einschnitte liefert daher die Stammfunktion der Verteilung. Der normierte Verlauf kann durch den Ausdruck [Dav95b]

$$\nu(\eta) = \frac{-2\eta^{1/2}(105 + 70\eta + 28\eta^2 + 8\eta^3)}{105 \exp(\eta)\pi^{1/2}} + \operatorname{erf}(\eta^{1/2}) \quad (5.3)$$

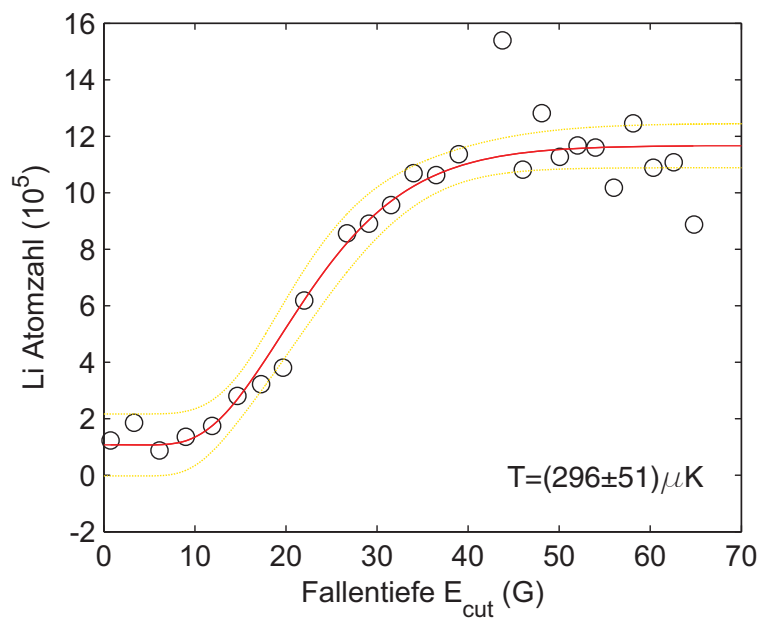
beschrieben werden. Der Parameter  $\eta = \frac{E_{cut}}{k_B T}$  gibt die Falltiefe  $E_{cut}$  in Relation zur Temperatur  $T$  an, die Funktion  $\nu(\eta)$  den Anteil der Atomverteilung in der Quadrupolfalle mit einer Energie unterhalb  $E_{cut}$  (Wertepaare:  $(\eta/\nu), (1/0.08), (4.5/0.56), (10/0.98)$ ).

Experimentell wurde die Atomwolke zur Temperaturbestimmung an die Mikrofalle gefahren (mechanisches Abschälen), kurz gehalten und dann wieder zurück in die Motspulen transferiert. Dort wurde die Atomzahl durch Messung der Fluoreszenz in der magnetooptischen Falle (recapture) bestimmt. Der in Abbildung 5.6 abgebildete Verlauf ist im Einklang mit einer Lithium-Temperatur von  $(296 \pm 50) \mu\text{K}$ .

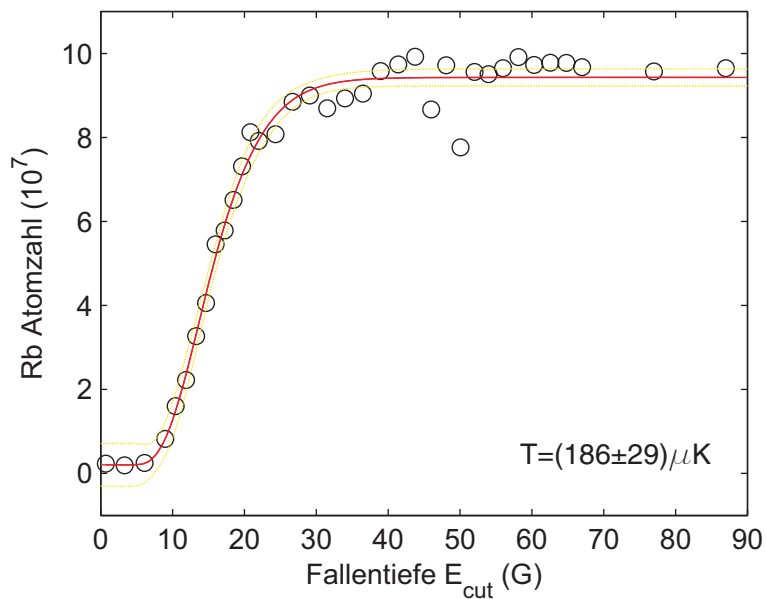
Bei der gleichen Messung für Rubidium (Abbildung 5.7) ergibt sich eine Temperatur von  $186 \pm 29 \mu\text{K}$ , die aber im Vergleich zu einer Flugzeitmessung um ca. Faktor 0.75 kleiner ist. Die Atomwolke wird hier auch bei sehr schnellem Abschälen (unter 100ms) gleichzeitig gekühlt, wodurch die Temperatur sich verringert. Der Effekt kann bei Lithium durch die fermionische Stoßunterdrückung nicht auftreten.

### 5.2.2 Sympathetisches Kühlen

Beim sympathetischen Kühlen sinkt die Temperatur der Lithiumwolke durch thermalisierende Stöße mit simultan gespeichertem und kälterem Rubidium. Der mittlere Energieübertrag beim Stoß zwischen einem  ${}^6\text{Lithium}$ - und einem  ${}^{87}\text{Rubidium}$ -Atom



**Abbildung 5.6:** In der Falle verbleibende Lithium-Atomzahl nach dem mechanischen Abschälen. Die angepasste Funktion liefert eine Temperatur von  $(296 \pm 50) \mu\text{K}$ . Da die Atomzahl auch für komplettes Entfernen der Atome nicht völlig auf Null zurückgeht, wurde die Grundmenge ebenso angepasst. Die gelben Kurven veranschaulichen das 95 %-Konfidenzintervall für die Anpassung.



**Abbildung 5.7:** In der Falle verbleibende Rubidium-Atomzahl nach dem mechanischen Abschälen. Die angepasste Funktion liefert eine Temperatur von  $(186 \pm 29) \mu\text{K}$ . Da die Atomzahl auch für komplettes Entfernen der Atome nicht völlig auf Null zurückgeht, wurde die Grundmenge ebenso angepasst. Die gelben Kurven veranschaulichen das 95 %-Konfidenzintervall. Das Verfahren liefert für Rubidium einen um Faktor 0.75 kleineren Wert als die Flugzeitmessung, da auch bei sehr schnellem Abschälen noch gleichzeitig gekühlt wird.

ist

$$\Delta E = k_B \Delta T \xi \quad \text{mit} \quad \xi = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}. \quad (5.4)$$

Der Parameter  $\xi$  [Mos01] ergibt sich durch die Reduktion des maximalen Energieübertrags zwischen Stoßpartnern verschiedener Masse. Sein Wert für die Kombination Rb-Li ist  $\xi = 0.24$ .

Ein Atomensemble in einer Falle der Form  $U(\vec{r}) = |x|^{1/\delta_x} |y|^{1/\delta_y} |z|^{1/\delta_z}$  (Power-law Trap nach [Bag87a]) hat die Wärmekapazität ([Lui96], Grenzwert für unendlich tiefe Falle)

$$C_\infty = (3/2 + \delta) N k_B \quad \text{mit} \quad \delta = \delta_x + \delta_y + \delta_z. \quad (5.5)$$

Für sehr kalte Atomensembles in der Ioffefalle ( $\mu B_0 \gg k_B T$  mit Offsetfeld  $B_0$ ) verläuft das Potential in alle Richtungen harmonisch, wodurch sich aus  $\delta = 1/2 + 1/2 + 1/2 = 3/2$  der Wert  $C_\infty = 3Nk_B$  ergibt. Zur Thermalisierung der beiden Gase müssen also im Mittel  $3/\xi \approx 12$  Stöße erfolgen. Die Gültigkeit dieser groben Abschätzung wurde durch Monte-Carlo-Simulationen bestätigt [Wu96], die für die Thermalisierung identischer, aber in verschiedenen Richtungen einer harmonischen Falle schwingende Atome (cross-dimensional thermalization bei Cs) durchgeführt wurde. Hier bestimmte Werte von im Mittel notwendigen 2.7 bis 3.2 Stößen pro Atom ( $\xi = 1$ ) decken sich mit der Abschätzung. Die Spanne ergibt sich durch verschiedene Startbedingungen mit nicht vollständig überlappenden Atomwolken. Heißere Atome ( $\mu B_0 \ll k_B T$ ) sind radial linear eingeschlossen, so dass die Wärmekapazität mit  $\delta = 1/2 + 1 + 1 = 5/2$  den höheren Wert  $C_\infty = 4Nk_B$  annimmt und im Mittel  $4/\xi \approx 17$  Stöße gebraucht werden.

Bei der Modellierung der Thermalisierung zweier Atomensembles, die jeweils in sich thermalisieren können, reicht es aus, die Gesamtstoßrate zu bestimmen und damit den Wärmefluss zwischen den Spezies auszudrücken [Del01, Mos01]. Für bestimmte Parameter ist es sogar günstig, wenn die Atomwolken eine große Temperaturdifferenz und damit lokal einen sehr guten Überlapp haben, da Energie über Stöße mit den nicht überlappenden Atomen ausgetauscht werden kann.

Für fermionisches, spinpolarisiertes Lithium in der Magnetfalle ist dieser Mechanismus nicht möglich. Hier muss jedes einzelne Atom durch Stöße mit Rubidium

gekühlt werden. Ist der Überlapp zwischen kälterem Rubidium und heißerem Lithium zu lokal, kann es vorkommen, dass nur ein Teil des Lithiums thermalisiert. Der Rest kann keine Energie austauschen und bleibt als Halo übrig. Die für Thermalisierung wichtige Größe ist also nicht die gesamte Stoßrate zwischen den Gasen, sondern die Stoßrate pro Einzelatom. Da diese für jedes Atom verschieden ist, kann die mittlere Stoßrate nur für grobe Abschätzungen bei weitgehendem Überlapp verwendet werden.

Ein Lithiumatom stößt mit Rubidiumatomen im Mittel mit der Rate

$$\Gamma_{coll} = \sigma_{RbLi} \bar{v} \int d^3r \frac{n_{Li}(\vec{r})}{N_{Li}} n_{Rb}(\vec{r}). \quad (5.6)$$

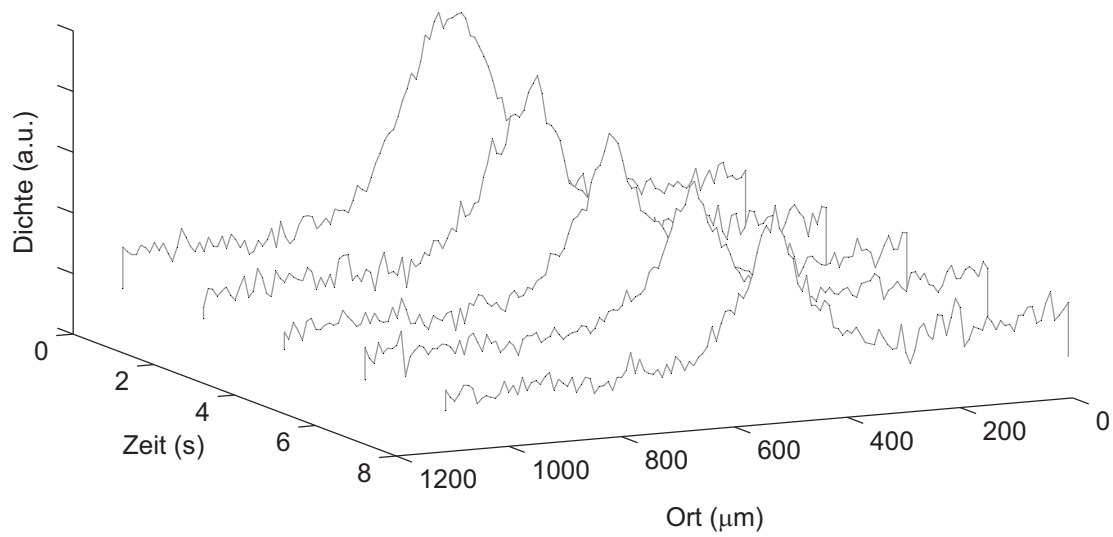
Die Lithiumdichte  $n_{Li}$  wird hier mit der Lithium-Teilchenzahl  $N_{Li}$  normiert, damit nur die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eingeht. Aus der bisher unbekanntem Streulänge für Kollisionen zwischen den Spezies  $a_{RbLi}$  erhält man den Streuquerschnitt  $\sigma_{RbLi} = 4\pi a_{RbLi}^2$ . Die mittlere thermische Relativgeschwindigkeit ist

$$\bar{v} = \left[ \frac{8k_B}{\pi} \left( \frac{T_{Rb}}{m_{Rb}} + \frac{T_{Li}}{m_{Li}} \right) \right]^{1/2}. \quad (5.7)$$

Im Experiment konnten wir zunächst keinen thermalisierenden Effekt zwischen Rubidium und Lithium feststellen, da die ersten Versuche in der Quadrupolfalle oder in einer Ioffefalle mit geringem Offsetfeld durchgeführt wurden. Da Verluste durch Spinflips im Fallenminimum (siehe Kapitel 3.2.1 und 3.3.2) für kälter werdende Atomwolken zunächst stärker werden und erst für sehr tiefe Temperaturen in der Ioffefalle unterdrückt sind, konnte sich keine kalte Lithiumwolke bilden ohne sofort zu zerfallen. Die geringe Masse mit den damit verbundenen hohen thermischen Geschwindigkeiten machen Lithium hier besonders anfällig. Erst die Verwendung einer Magnetfalle mit einem Offsetfeld  $B_0$  von über 3 G ermöglichte die Speicherung der sympathetisch gekühlten Atome.

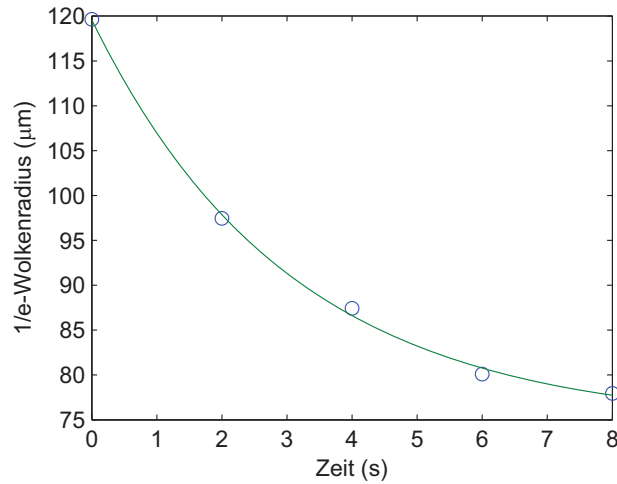
Es stellte sich heraus, dass der Temperatenausgleich zwischen Lithium und Rubidium nicht so schnell erfolgt, wie die Thermalisierung von Rubidium alleine. Rubidium muss besonders langsam gekühlt werden, damit genügend Zeit für thermalisierende Rb-Li-Stöße zur Verfügung steht. Wird zu schnell gekühlt, nimmt der Überlapp zwischen den Atomwolken ab und der Vorgang wird noch weiter verlangsamt.

Für eine erste Abschätzung der Wechselwirkung zwischen den Spezies wurde die Mischung zunächst langsam vorgekühlt, bis dann die Rubidiumtemperatur sehr schnell



**Abbildung 5.8:** Radiale Schnitte durch die thermalisierende Lithiumwolke. Die Temperatur des Rubidiums wurde schnell auf einen Wert von  $43 \mu\text{K}$  abgesenkt, wodurch die langsamere Thermalisierung der Lithiumwolke beobachtet werden konnte. Zu Beginn beträgt die Temperatur des Lithiums knapp  $100 \mu\text{K}$ , erreicht aber im Verlauf von Sekunden den Wert der Rubidiumwolke. Durch die mehr als 10fach größere Wärmekapazität der Rubidiumwolke bleibt deren Temperatur nahezu konstant.

auf einen Wert von ca.  $43 \mu\text{K}$  abgesenkt wurde. Durch den geringen Wärmeaustausch zwischen den Wolken konnte die Lithium-Temperatur nicht augenblicklich folgen und erreichte den Wert erst nach einigen Sekunden. Abbildung 5.8 zeigt den zeitlichen Verlauf eines Schnitts durch die Lithiumwolke. Durch die mehr als zehnfach größere Atomzahl der Rubidiumwolke und die damit verbundene größere Wärmekapazität ändert sich die Rubidiumtemperatur bei diesem Vorgang fast nicht. Ein zusätzliches RF-Schild wurde hier nicht verwendet.



**Abbildung 5.9:** Zeitlicher Verlauf des 1/e-Radius der Lithiumwolke in der Falle. Anpassung einer Exponentialfunktion liefert die charakteristische Zeitkonstante  $\tau_{therm} = 3.2$  s.

In Abbildung 5.9 ist der Verlauf des 1/e-Radius der Lithiumwolke über der Zeit aufgetragen. Eine an die Messpunkte angepasste Exponentialfunktion für den Wolkenradius

$$R_{Li}(t) = R_{Start} + (R_{Start} - R_{Ende}) \exp(-t/\tau_{therm}) \quad \text{mit} \quad \tau_{therm} = 3.2 \text{ s} \quad (5.8)$$

beschreibt den zeitlichen Verlauf sehr gut. Eine numerische Simulation der Fallparameter liefert für die gegebenen Parameter einen näherungsweise linearen Zusammenhang zwischen Temperatur und Wolkenbreite in der Falle. Die Zeitkonstante gilt damit näherungsweise auch für den Temperaturverlauf.

Der Zusammenhang zwischen der Zeitkonstanten  $\tau_{therm}$  und dem Betrag der Interspezies-Streulänge  $|a_{RbLi}|$  kann über eine numerische Auswertung des Ausdrucks für die Kollisionsrate (Gleichung 5.6) und die im Mittel zur Thermalisierung



notwendigen Stöße bestimmt werden. Für große Temperaturdifferenzen, also sehr verschiedene Ausgangsgrößen der Wolken ändert sich der Überlapp während der Thermalisierung signifikant. In diesem Fall kann schrittweise jeweils die Kollisionsrate bestimmt, ein Zeitschritt gemacht und der neue Überlapp berechnet werden. Die einfache Exponentialnäherung gilt in diesem Fall nicht mehr für den gesamten Temperaturverlauf. Bei den hier gegebenen Parametern gilt die Näherung jedoch sehr gut.

Der Startwert der Lithiumtemperatur muss aus der in-situ (in der Falle) gemessenen Breite der Atomwolke abgeschätzt werden, da wegen der geringen Masse von Lithium bei dieser Temperatur noch keine Flugzeitmessung möglich ist. Im vorliegenden Fall liegt dieser Wert bei  $80 \mu\text{K}$ , Abweichungen haben nur geringe Auswirkungen auf die Thermalisierungszeit. Die größte Unsicherheit liegt in der Bestimmung der Teilchenzahl von Rubidium, die zwischen  $3 \cdot 10^7$  und  $5 \cdot 10^7$  angenommen wird. Die Anzahl der Lithiumatome ist unerheblich, da jedes Atom für sich alleine thermalisiert.

Da die Lithiumwolke bei der Starttemperatur nicht nur den harmonischen Bereich der Ioffefalle ( $\mu B_0 \gg k_B T$ ), sondern auch den Übergangsbereich zum linearen Verlauf erfährt, kann ein mittlerer Wert von ca.  $3.5/\xi \approx 14.5$  für die zur Thermalisierung notwendigen Stößen angenommen werden. Da der Wert für ein Durchschnittsatom gilt, werden für die vollständige Thermalisierung sogar eher noch mehr Stöße benötigt.

Reproduziert man den Wert von  $\tau_{therm} = 3.2 \text{ s}$  mit den obigen Parametern numerisch, so ergibt sich eine Interspezies-Streulänge von

$$|a_{RbLi}| = (20 \pm 10) a_0, \quad (5.9)$$

wobei  $a_0$  der Bohrsche Radius ist. Da bisher weder theoretische Vorhersagen, noch bessere Experimentdaten vorliegen, stellt dies die erste Bestimmung der Streulänge für Stöße zwischen Rubidium im Zustand  $|F m_F \rangle = |2 2 \rangle$  und Lithium im Zustand  $|F m_F \rangle = |3/2 3/2 \rangle$  dar.

Da die Methode nur eine sehr grobe Bestimmung der Größe und überhaupt keine Aussage über das Vorzeichen der Streulänge liefert, ist dies nur ein erster Schritt. Eine genauere Aussage wird man aus Spektren der heteronuklearen Photoassoziation [Sch03a, Sch02, Man04], oder der Lage von Interspezies-Feshbach-Resonanzen [Ino04, Sta04] gewinnen können. Die Untersuchung der gegenseitigen Dämpfung von

schwingenden Atomwolken durch Kollisionen [Fer02] ist zwar vom apparativen Aufwand her einfacher, man erreicht aber nicht annähernd die Genauigkeit der zuvor genannten Methoden. Eine erste Verfeinerung unserer Abschätzung kann aber sicher gewonnen werden.

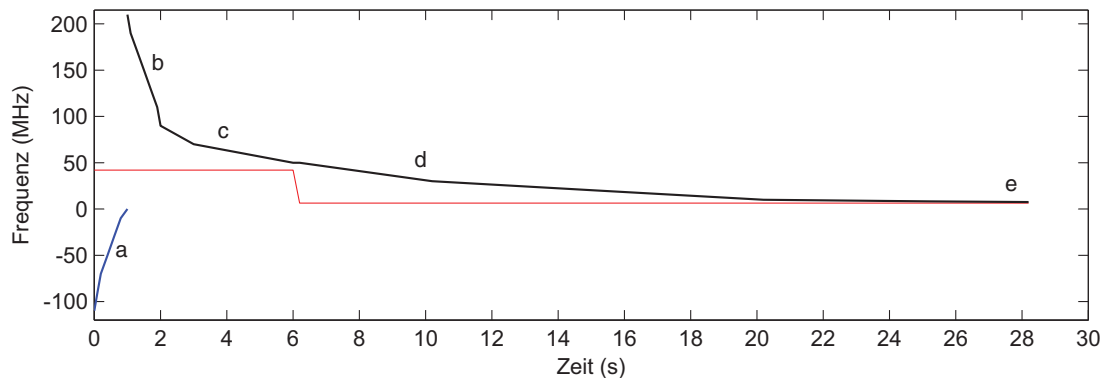
Beim Versuch, aus der direkten Thermalisierung bessere Werte zu gewinnen, wurde obiges Experiment bei tieferen Temperaturen wiederholt. Entgegen unseren Erwartungen konnte der Verlauf der Thermalisierung hier nicht beobachtet werden, da die Lebensdauer der Lithiumwolke massiv abgenommen hatte. Erste Anzeichen sind auch schon in Abbildung 5.8 sichtbar, wo die Lithiumteilchenzahl im Verlauf der Messung deutlich abnimmt.

Die Ursache ist ein geringer Anteil von Rubidiumatomen im Zustand  $|2\ 1\rangle$ , der Spinrelaxation der Form  $|2\ 1\rangle + |3/2\ 3/2\rangle \Rightarrow |2\ 2\rangle + |1/2\ 1/2\rangle + E_{HFS, Li}$  ermöglicht und so zum Verlust von Lithium aus der Falle führt. Atome im Zustand  $|2\ 1\rangle$  entstehen höchstwahrscheinlich durch Majorana-Spinflips in der Nähe des Potentialminimums und über dipolare spinändernde Stöße der Form  $|2\ 2\rangle + |2\ 2\rangle \Rightarrow |2\ 2\rangle + |2\ 1\rangle$ , bei denen die Atome mit relativem Bahndrehimpuls ( $l=1$ ) entstehen. Beiden Produktionsprozessen wirken Stöße der Form  $|2\ 1\rangle + |2\ 1\rangle \Rightarrow |2\ 2\rangle + |2\ 0\rangle$  entgegen, so dass sich ein Gleichgewicht mit konstanter  $|2\ 1\rangle$ -Menge bildet. Diese ist zwar sehr gering, bei höher werdenden Lithiumdichten reicht sie aber aus, um die Lithiumpopulation zerfallen zu lassen.

Abhilfe kann mit wiederholten Mikrowellenpulsen zur Entfernung von Rubidiumatomen im Zustand  $|2\ 1\rangle$  (siehe Kapitel 5.1.2) geschaffen werden. Ohne diese Maßnahme war es nicht möglich, Lithium zu Temperaturen unterhalb von  $3\ \mu\text{K}$  zu kühlen und dann zu speichern.

### 5.2.3 Fermi-Gas

Nachdem es möglich war, die Mischung von Rubidium und Lithium auch bei tieferen Temperaturen stabil zu speichern war es nur noch eine Frage der Optimierung, um ins entartete Regime zu kommen. Abbildung 5.10 zeigt den Verlauf der Mikrowellenfrequenz bei der verwendeten Kühlrampe. Im Vergleich zur Generierung eines reinen Rubidium Kondensats braucht man für das sympathetische Kühlen von Lithium mehr Zeit. Die Gesamtdauer ist ungefähr doppelt so lang wie fürs Kondensat.

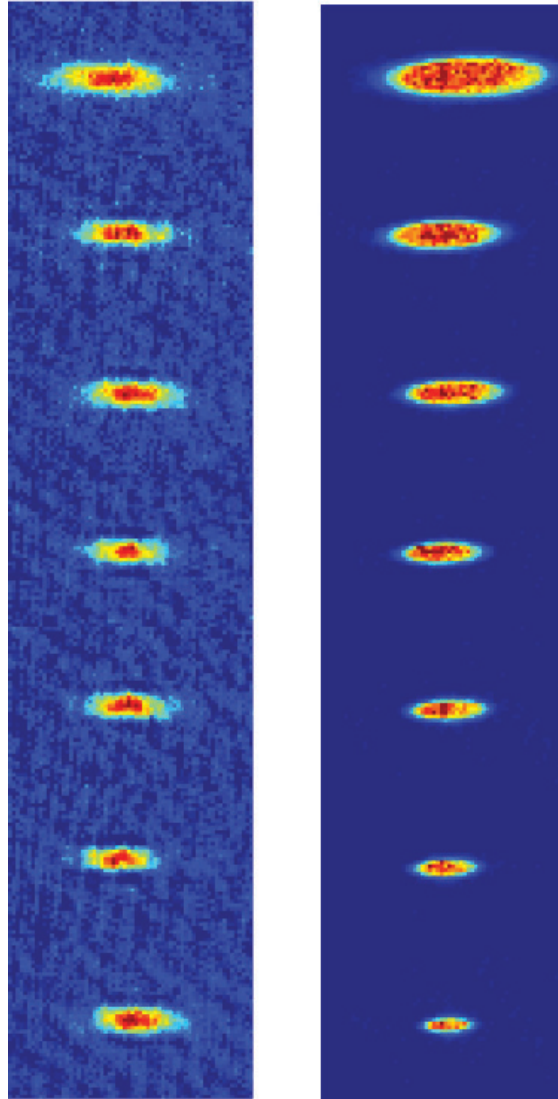


**Abbildung 5.10:** Mikrowellenfrequenz beim evaporativen Kühlen von Lithium und Rubidium ins entartete Regime (schwarze Kurve, Frequenz relativ zur Hyperfeinaufspaltung von Rb). Offsetfeld der Magnetfalle in Frequenzeinheiten (rote Kurve, 2.1 MHz/G). Der Verlauf ist im wesentlichen gleich, wie beim alleinigen Kühlen von Rubidium (Abbildung 5.4), er ist lediglich ca. um Faktor 2 gestreckt, damit Lithium ausreichend Zeit zur Thermalisierung mit Rubidium hat.

Charakteristisch für das Erreichen des entarteten Regimes bei fermionischen Atomen ist das Auftreten von Pauli-Blocking. Die immer dichtere Besetzung des Phasenraums führt dazu, dass der Austausch von Energie und Impuls zwischen den Fermionen nur noch an der Oberfläche der Fermi-Kugel möglich ist. Aufgrund des Pauli-Prinzips müssen in der Falle auf diese Weise auch höhere Niveaus besetzt werden. Das Fermi-Gas besitzt eine im Vergleich zur thermischen Boltzmann-Verteilung erhöhte Energie.

Unter der Voraussetzung, dass die Rubidium- und die Lithiumwolke nicht wegen der Schwerkraft thermisch entkoppeln (für unsere Fallenparameter erfüllt), wird die Ausdehnung der Rubidiumwolke in der letzten Kühlphase immer kleiner, während die der Lithiumwolke stagniert. Abbildung 5.11 zeigt erste Absorptionaufnahmen bei eingeschaltetem Fallenpotential, die auf das Erreichen des entarteten Regimes hindeuten.

In weitergehenden Untersuchungen wird diese letzte Kühlphase nun noch genauer analysiert. Erst aus dem genauen Verlauf des Pauli-Blockings und einer verbesserten Bestimmung der Atomzahlen kann zweifelsfrei auf das Erreichen der Fermi-



**Abbildung 5.11:** Absorptionsoptionen der Lithiumwolke (links) und der Rubidiumwolke (rechts) beim Erreichen des entarteten Regime. Man erkennt deutlich, wie die Größe der Rubidiumwolke mit abnehmender Temperatur (von oben nach unten) kleiner wird, während die Lithiumwolke sich in den letzten Aufnahmen aufgrund von Pauli-Blocking fast nicht mehr verändert. Das entartete Regime wird in unserem Experiment typischerweise mit ca.  $10^5$  Lithium- und  $3 \cdot 10^5$  Rubidiumatomen bei einer Temperatur von ca.  $1\mu\text{K}$  erreicht.

Temperatur für Lithium geschlossen werden. Da das Phänomen der Bose-Einstein Kondensation ein Phasenübergang ist, ist der Nachweis hier wesentlich leichter.

# Anhang A

## Magnetfelder

### A.1 Bessel-Laplace Integrale

Das allgemeine Bessel-Laplace Integral, wie es für Lösungen zylindersymmetrischer Magnetfelder auf der Basis von elliptischen Integralen (Kapitel 2.3) nach Conway [Con01] verwendet wird ist folgendermaßen definiert:

$$I_{(\lambda,\mu,\nu)}(r', r, z - z') \equiv \int_0^\infty ds s^\lambda J_\mu(sr') J_\nu(sr) e^{-s|z-z'|} \quad (\text{A.1})$$

Die Funktionen  $J_\mu(x)$  sind Standard-Besselfunktionen.

Für spezielle Werte von  $\lambda$ ,  $\mu$  und  $\nu$  können die Ausdrücke weiter vereinfacht werden:

$$I_{(0,1,0)}(R, r, |z|) = \frac{1}{R} \left[ 1 - \frac{|z|k\mathbf{K}(k)}{2\pi\sqrt{rR}} - \frac{\Lambda_0(|\beta|, k)}{2} \right] \quad \text{für } r < R \quad (\text{A.2})$$

$$I_{(0,1,0)}(R, r, |z|) = \frac{1}{R} \left[ -\frac{|z|k\mathbf{K}(k)}{2\pi\sqrt{rR}} + \frac{\Lambda_0(|\beta|, k)}{2} \right] \quad \text{für } r > R \quad (\text{A.3})$$

$$I_{(0,1,1)}(R, r, |z|) = \frac{1}{\pi k\sqrt{rR}} [(2 - k^2)\mathbf{K}(k) - 2\mathbf{E}(k)] \quad (\text{A.4})$$

Weitere Fälle sind in der Veröffentlichung von Conway [Con01] tabelliert. Die verwendete Heuman-Lambda Funktion hat die Definitionsgleichung

$$\Lambda_0(\beta, k) = \frac{2}{\pi} [E(k) F(\beta, k') + K(k) E(\beta, k') - K(k) F(\beta, k')]. \quad (\text{A.5})$$

Der Ausdruck enthält unvollständige elliptische Integrale

$$F(\beta, k) = \int_0^\beta \frac{d\beta'}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta'}} \quad (1.\text{Art}) \quad (\text{A.6})$$

$$E(\beta, k) = \int_0^\beta d\beta' \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta'} \quad (2.\text{Art}) \quad (\text{A.7})$$

und vollständige elliptische Integrale:

$$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta'}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta'}} \quad (1.\text{Art}) \quad (\text{A.8})$$

$$E(k) = E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\beta' \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta'} \quad (2.\text{Art}). \quad (\text{A.9})$$

Da bei der Definition von elliptischen Integralen verschiedene Versionen gebräuchlich sind, muss bei Verwendung von Routinen in den verschiedenen Mathematik-Programmen jeweils geprüft werden, welche Form dort verwendet wird. Die verschiedenen Formen sind für das Beispiel des unvollständigen elliptischen Integrals  $E(\beta, k)$  in Tabelle (A.1) aufgelistet.

**Tabelle A.1:** Definitionen und Kommandos für verschiedene Nachschlagewerke und Mathematik-Programme. Beispielhaft für  $E(\beta, k)$  (unvollständiges elliptisches Integral 2.Art)

Quelle	Ausdruck	Definition	äquivalentes Kommando
diese Arbeit (Conway)	$E(\beta, k)$	$\int_0^\beta d\beta' \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta'}$	
Bronstein	$E(k, \phi)$	$\int_0^\phi d\phi' \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi'}$	
Mathematica	$E(\phi, m)$	$\int_0^\phi d\phi' \sqrt{1 - m \sin^2 \phi'}$	<code>EllipticE</code> $[\beta, k^2]$
Cephes C Library [cep]	$E(\phi, m)$	$\int_0^\phi d\phi' \sqrt{1 - m \sin^2 \phi'}$	<code>ellie</code> $(\beta, k^2)$
Matlab	$E(x, k)$	$\int_0^x dt' \sqrt{1 - k^2 t'^2} / \sqrt{1 - t'^2}$	<code>mfun('EllipticE', sin(<math>\beta</math>), k)</code>

## A.2 Wing-Theorem für Feldextrema

Das Wing-Theorem [Win84] besagt:

*In einer quellenfreien Region kann der Betrag eines statischen magnetischen Feldes ein lokales Minimum, aber kein lokales Maximum haben.*

Der Satz gilt in gleichem Maße auch für elektrische oder Gravitationsfelder, soll hier aber für magnetische Felder gezeigt werden.

### A.2.1 1.Fall: Maximum (Beweis durch Widerspruch)

Das zu untersuchende Maximum in  $|\vec{B}|$  soll ohne Beschränkung der Allgemeinheit im Ursprung  $\vec{O}$  angenommen werden. Für jeden beliebigen Punkt  $\vec{r}$  gilt dann:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{O}) + \delta\vec{B}(\vec{r}) \quad (\text{A.10})$$

und

$$\vec{B}^2(\vec{r}) = \vec{B}^2(\vec{O}) + \delta\vec{B}^2(\vec{r}) + 2\vec{B}(\vec{O}) \cdot \delta\vec{B}(\vec{r}). \quad (\text{A.11})$$

Da die ersten beiden Terme des Ausdrucks A.11 nicht negativ werden können, muss wegen des Maximums für beliebige  $\vec{r}$  in der Nähe des Ursprungs  $\vec{B}(\vec{O}) \cdot \delta\vec{B}(\vec{r}) < 0$  gelten (Bemerkung:  $\vec{r}$  muss nicht infinitesimal klein sein). Wählt man die z-Achse  $\hat{z}$  in Richtung des Feldes im Maximum  $\vec{B}(\vec{O})$ , so gilt  $\vec{B}(\vec{O}) \cdot \delta\vec{B}(\vec{r}) = B_z(\vec{O}) \cdot \delta B_z(\vec{r})$  und die Maximum-Bedingung wird zu

$$\delta B_z(\vec{r}) < 0 \quad \text{für beliebige } \vec{r} \text{ in der Nähe des Ursprungs } \vec{O}. \quad (\text{A.12})$$

Aus der Betrachtung der allgemeinen Vektoridentität [Jac75]

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} \quad (\text{A.13})$$

und den aus den statischen Maxwellgleichungen für den quellenfreien Raum abgeleiteten Ausdrücken

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = 0 \quad (\text{A.14})$$

folgt direkt  $\vec{\nabla}^2 \vec{B} = 0$ , damit  $\nabla^2 B_z = 0$ , und da für  $\delta\vec{B}$  dieselben Gleichungen gelten  $\nabla^2 \delta B_z = 0$ .

Der folgende Ansatz wendet das Theorem von Green [Jac75]

$$\int_V (\Phi \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Phi) dV = \int_{\partial V} (\Phi \vec{\nabla} \Psi - \Psi \vec{\nabla} \Phi) \cdot d\vec{A} \quad (\text{A.15})$$



auf eine symmetrisch zum Ursprung liegende Kugel mit Radius  $r$  an. Mit den geeignet gewählten Funktionen\*  $\Phi = 1/r$  und  $\Psi = \delta B_z(\vec{r})$  kann man leicht zeigen, dass

$$\int_{\partial V} \delta B_z(r) d\Omega = \delta B_z(\vec{O}) \equiv 0 \quad (\text{A.16})$$

gilt. Das Integral der Funktion  $\delta B_z$  über die Oberfläche der Kugel muss also verschwinden. Wenn für eine Richtung also  $\delta B_z < 0$  gilt, muss es andere Richtungen geben, für die  $\delta B_z > 0$  ist, was im Widerspruch zu der Maximum-Bedingung (A.12) steht.

QED

### A.2.2 2.Fall: Minimum Existenzbeweis durch Demonstration

Liegt am Ursprung  $\vec{O}$  ein echtes Minimum des Magnetfeldbetrags vor, so muss nach Gleichung (A.11) in der Nähe des Ursprungs die folgende Bedingung erfüllt sein:

$$2\vec{B}(\vec{O}) \cdot \delta\vec{B} + (\delta\vec{B})^2 > 0. \quad (\text{A.17})$$

Analog zum obigen Beweis (Maxima) kann der Ausdruck  $\vec{B}(\vec{O}) \cdot \delta\vec{B}$  in der Nähe des Ursprungs kein einheitliches Vorzeichen haben. Um die Bedingung (A.17) zu erfüllen, muss daher  $\vec{B}(\vec{O}) \cdot \delta\vec{B}(\vec{r}) = 0$  gelten.

Dieser Fall wird für das Beispiel des sphärischen Quadrupols<sup>†</sup> mit  $\vec{B}(\vec{O}) = 0$  direkt erfüllt. Das Minimum ergibt sich durch die Betragsbildung:

$$|\vec{B}(\vec{r})| = \sqrt{(\alpha_x x)^2 + (\alpha_y y)^2 + (\alpha_z z)^2}. \quad (\text{A.18})$$

Bei der Ioffefalle mit  $B(\vec{O}) = B_0 > 0$  wird der Vorzeichenwechsel durch die geschickte Kombination von verschiedenen Feldern erreicht. Addiert man das Feld eines linearen Quadrupols  $\vec{B}_{lin. QP}(\vec{r}) = \alpha_x \vec{x} - \alpha_y \vec{y}$  mit einem homogenen Offsetfeld  $\vec{B}_{Ioffe} = B_0 \hat{z}$ , so ergibt sich ein lineares Minimum auf der z-Achse:

$$|\vec{B}(\vec{r})| = \sqrt{(\alpha_x x)^2 + (\alpha_y y)^2 + B_0^2}. \quad (\text{A.19})$$

---

\* $\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta(r)$

† $\vec{B}_{QP}(\vec{r}) = \alpha_x \vec{x} + \alpha_y \vec{y} + \alpha_z \vec{z}$

Für eine richtige Ioffefall mit einem dreidimensionalen Minimum wird noch zusätzlicher Einschluss in z-Richtung benötigt. Kapitel 3.3 beschreibt diese ausführlich.

# Anhang B

## Simulations-Toolbox

Im Rahmen dieser Arbeit wurde eine Toolbox zur Simulation von Magnetfallen entwickelt. Die zugrundeliegenden Algorithmen sind in Kapitel 2.4 ausführlich beschrieben. Die praktische Verwendung und Syntax der Kommandos ist Thema des nächsten Abschnitts. Er soll als kurze Einführung und Referenz dienen.

Die Simulation geschieht auf der Basis von Mathematica. Algorithmen zur Feldberechnung sind zur Erzielung kürzerer Berechnungszeiten in der Programmiersprache C implementiert. Sie sind über die Schnittstelle Mathlink in die Mathematica-Umgebung eingebunden und der Anwender kann sie wie normale Mathematica-Kommandos verwenden. Dazu muss vor Beginn eine Datei (letzte Version: `ver310702.nb`) mit den Befehlsdefinitionen geladen und ausgeführt werden.

Geometrie und Stromstärken der felderzeugenden Elemente werden in einer Liste definiert, die dann als Eingabeparameter für die Auswertung zur Verfügung steht. Zur besseren Lesbarkeit der Programme wurde die Eingabeform der Liste bewusst sehr einfach gehalten. Sie kann durch spezielle Kommandos je nach Verwendungszweck in eine programmspezifische Form zur Feldberechnung oder Visualisierung umgewandelt werden.

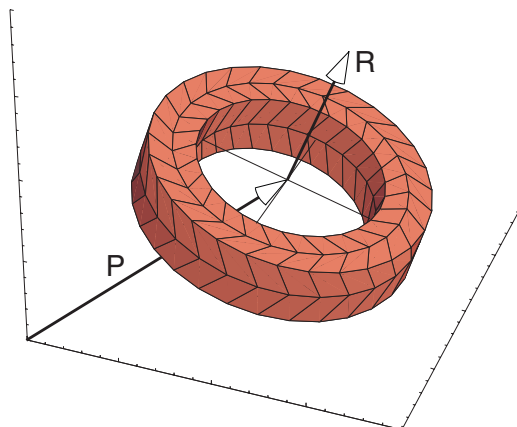
## B.1 Felderzeugende Elemente

Grundlage aller Berechnungen ist eine Liste der felderzeugenden Elemente, ihrer geometrischen Lage, sowie der Ströme. Sie hat die Form

$$\text{magnets} = \{ \text{Element}_1, \text{Element}_2, \dots, \text{Element}_n \},$$

wobei `magnets` der Name der Liste ist. Mögliche Ausdrücke für `Element1` bis `Elementn` werden in den folgenden Unterkapiteln erläutert.

### B.1.1 Ausdruck für eine Spule



**Abbildung B.1:** Darstellung einer Spule in der Simulations-Toolbox, wie sie als `SShape` visualisiert wird. Die Strukturierung auf der Oberfläche der Spule zeigt den Umlaufsinn des Stroms. Bei einem Strom, der gleich Null ist, wird die Spule schwarz dargestellt. Die beispielhaft dargestellte Spule wurde mit dem Ausdruck `{"Beispielspule", coil, 1, 1, 10, 15, 7, {0, 0, -10}, {-0.3, 0, 1}, Red}`; erzeugt.

Die Element-Darstellung einer Spule (Abbildung B.1) ist:

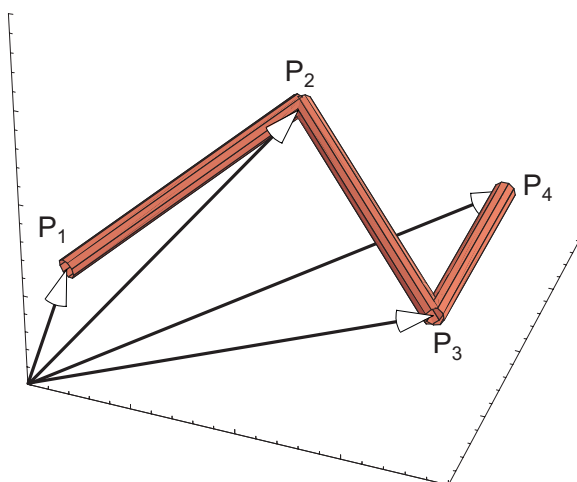
$$\{ \text{"Name"}, \text{coil}, I, N_{\text{Windung}}, R_{\text{innen}}, R_{\text{ausse}} , D, \vec{P}, \vec{R}, \text{Farbe} \}$$

Folgende Kenngrößen werden dabei eingesetzt:

”Name”	kurze Bezeichnung zur besseren Lesbarkeit der Liste
<b>coil</b>	Schlüsselwort für die Definition einer Spule
$I$	Strom, für $I=0$ wird die Spule schwarz dargestellt
$N_{\text{Windung}}$	Windungszahl
$R_{\text{innen}}$	Innenradius der Spule
$R_{\text{ausen}}$	Aussenradius der Spule
$D$	Dicke der Spule
$\vec{P}$	Aufpunkt des Zentrums der Spule
$\vec{R}$	Richtungsvektor, bildet mit der Stromflussrichtung eine Rechtsschraube
<i>Farbe</i>	Farbe der Spule, hat keinen Einfluss auf Felder

Für die Bezeichnung einer Farbe kann entweder der Mathematica-Befehl `RGBColor[red,green,blue]`, oder eine der vordefinierten Farben (z.B. Red, Green, Blue, Orange, Gold, usw.) verwendet werden. (Siehe auch in der Mathematica Hilfe unter `Graphics'Colors'`).

### B.1.2 Ausdruck für einen Draht



**Abbildung B.2:** Darstellung eines stromführenden Drahts mit Stützpunkten  $P_1$  bis  $P_4$ . Der beispielhaft dargestellte Verlauf wurde durch den Ausdruck `{"Beispieldraht", wire, 1, 2, {18, 15, -10}, {5, -10, -5}, {-15, 10, -10}, {-15, -10, -10}, Red}`; erzeugt

Die Element-Darstellung eines Drahts (Abbildung B.2) mit mehreren Stützpunkten ist:

$$\{ \text{"Name"}, \mathbf{wire}, I, D, \underbrace{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_k}_{k \text{ Stützpunkte}}, \text{Farbe} \}$$

Hier wurden die folgenden Kenngrößen verwendet:

"Name"	beliebige Bezeichnung
<b>wire</b>	Schlüsselwort für Drahtdefinition
I	Strom
D	Drahtdurchmesser
$\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_k$	beliebig viele Stützpunkte, die durch Drahtstücke verbunden sind
Farbe	Farbe der Darstellung

### B.1.3 Ausdruck für ein Offsetfeld

Ein homogenes Offsetfelds kann auf die folgende Weise eingeführt werden:

$$\{ \text{"Name"}, \mathbf{offset}, B, \vec{R} \}$$

Die Parameter sind:

"Name"	beliebige Bezeichnung
<b>offset</b>	Schlüsselwort für die Definition eines Offsetfelds
B	Betrag des Offsetfelds (in Gauss)
$\vec{R}$	Richtung des homogenen Offsetfelds

### B.1.4 Umwandlung in die programmspezifische Form

Zur einfacheren Eingabe und Lesbarkeit haben die in den vorangegangenen Abschnitten beschriebenen Ausdrücke für Spulen, Drähte und Offsetfeldkomponenten eine recht einfache Form. Sie sind die Basis für die grafische Visualisierung der Elemente und die Berechnung des Magnetfelds im Raum.

Für eine grafische Darstellung der Elemente muss die Liste in sogenannte "Shapes" (Oberflächenobjekte in Mathematica) umgewandelt werden. Mit der Kommandozeile

```
magshapes = makeshapes[magnets]
```

wird die Eingabeliste `magnets` in das Mathematica-Grafik-Objekt `magshapes` umgewandelt. Dieses kann dann mit `Show[magshapes]` dargestellt werden.

Für sämtliche anderen Auswertungen wird eine Liste mit der zugrundeliegenden Struktur benötigt. Die Kommandozeile

```
magstruct = makestruct[magnets]
```

wandelt die Eingabeliste `magnets` in die Struktur `magstruct` um, die dann weiter verwendet werden kann.

Eine direkte Auswertung des Felds an einzelnen Punkten kann auf der Basis der Eingabeliste erfolgen. Dabei wird die funktionale Form `magfeld` generiert:

```
magfeld = makefeld[magnets];  
ort = {1., 20., -4.};  
magfeld[ort]
```

Die Ausgabe der letzten Kommandozeile ist der Betrag des Vektorfelds am Aufpunkt `ort`.

Für das vektorwertige Feld ist die Befehlsabfolge:

```
magvfeld = makevektorfeld[magnets];  
ort = {1., 20., -4.};  
magvfeld[ort]
```

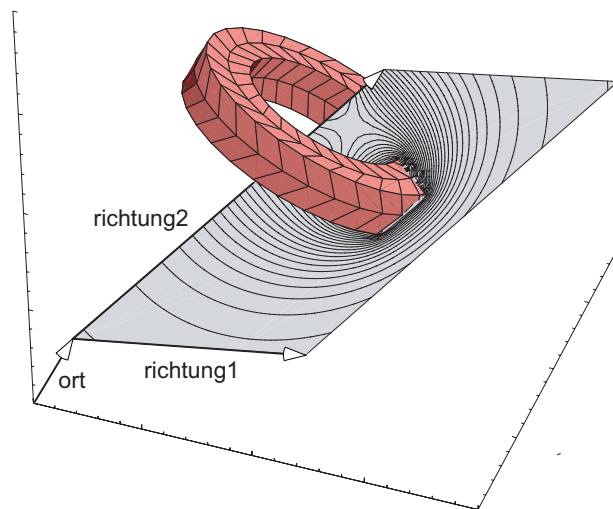
Die Ausgabe ist ein Vektor der Form  $\{ a, b, c \}$ , der die Vektorkomponenten des Magnetfelds am Aufpunkt `ort` beinhaltet.

Die Befehle `makefeld` und `makevektorfeld` eignen sich besonders für die Auswertung an einzelnen Punkten. Soll das Feld in einer ganzen Ebenen oder an vielen Stützstellen im Raum berechnet werden sind die im nächsten Kapitel vorgestellten Kommandos besser, da sie nicht einzelne Werte, sondern gleich ein Array mit sämtlichen Lösungsteilen generieren. Auf diese Weise geschieht die Berechnung komplett im C-Programm und die begrenzte Geschwindigkeit der Schnittstelle Mathlink kommt nicht zum Tragen, da das Ergebnis am Ende der Berechnung in nur einer Variable zurückgegeben wird.

## B.2 Routinen zur Visualisierung und Analyse des Magnetfelds

### B.2.1 Visualisierung

Zur grafischen Darstellung des Magnetfelds stehen verschiedene Befehle zur Verfügung. Im Folgenden sind die Wichtigsten kurz aufgelistet und beschrieben:



**Abbildung B.3:** Spule mit eingezeichneter Feldkontur-Ebene. Die Abbildung wurde durch das Kommando `coilcon = mcontoursurface3D[magstruct, 50, {10, -19, -10}, {0, 20, 3}, {-25, 17, 15}, Table[c, {c, 0, 100, 2}]]`; `Show[magshapes, coilcon]`; erzeugt.

```
mcontoursurface3D[magstruct, resolution, ort, richtung1, richtung2,
konturliste]
```

Das Kommando erzeugt eine dreidimensionale Ebene im Raum, auf der Äquipotentiallinien (Contours) eingezeichnet sind (siehe Abbildung B.3). Ausgehend vom Aufpunkt `ort` spannen die Vektoren `richtung1` und `richtung2` die Ebenen auf, auf der die Feld-Konturlinien dargestellt sind. Mit der Variable `konturliste` können die gewünschten Äquipotentiallinien angegeben werden (z.B. `konturliste = Table[c, {c, 0, 100, 2}]`). Ist dieses Argument nicht angegeben, wird automatisch eine Liste generiert.



`mcontoursurface2D[magstruct, resolution, ort, richtung1, richtung2, konturliste]`

Analog zum vorigen Kommando erzeugt dieser Befehl ein Konturlinienfeld, das aber nicht räumlich dargestellt wird.

## B.2.2 Feldanalyse

Verschiedene Kommandos zur Feldanalyse sind im Folgenden dargestellt:

`mfieldofstruct[magstruct, ort]`

Vektorwertiges Magnetfeld an der Stelle `ort`.

`mfieldofstructabs[magstruct, ort]`

Betrag des Magnetfelds an der Stelle `ort`.

`mfieldofstructabsline[magstruct, aufloesung, ort, richtung]`

Magnetfeldbetrag auf einer Linie ausgehend vom Aufpunkt `ort` entsprechend `richtung`. Die Variable `aufloesung` gibt die Anzahl der äquidistanten Stützstellen an.

`mfieldofstructabsmesh[magstruct, aufloesung, ort, richtung1, richtung2]`

Magnetfeldbetrag auf einer Ebene, die ausgehend vom Aufpunkt `ort` von den Vektoren `richtung1` und `richtung2` aufgespannt wird (siehe Prinzip bei Abbildung B.3).

`mdirectedderivativevalue[magstruct, ort, richtung]`

Richtungsableitung des Feldebetrags in `ort`.

`mdirectedderivativeabs[magstruct, ort, richtung]`

Betrag der Richtungsableitung des Feldebetrags in `ort`.

`mhessianmatrix[magstruct, ort]`

Hessematrix des Magnetfeldbetrags in `ort`. Die Hessematrix gibt sämtliche zweifachen Ableitungen des Felds in Matrixform an ( $a_{i,j} = \partial_i \partial_j B(x, y, z)$ ).

## B.3 Unsere Falle

Wie in Kapitel 4.1.1 beschrieben, konnten die wirklichen Fallenparameter unseres Aufbaus mit Hilfe der Simulations-Toolbox sehr gut bestimmt werden. Abweichungen zur zuvor berechneten und konstruierten Konstellation waren zwar gering, müssen aber für genaue Analysen berücksichtigt werden.

Die Definitionsliste, wie sie unserer realen Falle zugrunde liegt ist in Abbildung B.4 gegeben.

```
magnets[ospulenstrom_, uspulenstrom_, ijoffestrom_, ajoffestrom_, mikrostrom1_, mikrostrom2_] =
{
  {"Obere Fallenspule", coil, ospulenstrom, 70, 5, 13, 7, {0, 0, 9}, {0, 0, 1}, Black},

  {"Untere Fallenspule", coil, uspulenstrom, 70, 5, 13, 7, {0, 0, -9}, {0, 0, -1}, Black},

  {"Joffedraht innen", wire, ijoffestrom, 1, {0.801, 2.402, -17},
  {0.801, 2.402, -5}, {0.801, 2.642, -1.5}, {0.801, 2.752, 0.},
  {0.801, 2.922, 1.3}, {0.801, 3.092, 5}, {0.801, 3.092, 17}, Brown},

  {"Joffedraht innen", wire, -ijoffestrom, 1, {-0.801, 2.402, -17},
  {-0.801, 2.402, -5}, {-0.801, 2.642, -1.5}, {-0.801, 2.752, 0.},
  {-0.801, 2.922, 1.3}, {-0.801, 3.092, 5}, {-0.801, 3.092, 17}, Brown},

  {"Joffedraht aussen", wire, ajoffestrom, 1, {2, 2.402, -17},
  {2, 2.402, -5}, {2, 2.642, -1.5}, {2, 2.752, 0.},
  {2, 2.922, 1.3}, {2, 3.092, 5}, {2, 3.092, 17}, Brown},

  {"Joffedraht aussen", wire, -ajoffestrom, 1, {-2, 2.402, -17},
  {-2, 2.402, -5}, {-2, 2.642, -1.5}, {-2, 2.752, 0.},
  {-2, 2.922, 1.3}, {-2, 3.092, 5}, {-2, 3.092, 17}, Brown},

  {"Mikrodraht1", wire, mikrostrom1, 0.12, {-0.2, -20, 2.9}, {-0.2, 20, 2.9}, Yellow},

  {"Mikrodraht2", wire, mikrostrom2, 0.12, {0.2, -20, 2.9}, {0.2, 20, 2.9}, Yellow}
}
```

Abbildung B.4: Mathematica-Ausdruck zur Definition der realen Magnetfalle.

Abbildung B.5 zeigt den üblichen Ablauf einer Analyse für typische Ströme zur Bose-Einstein Kondensation.

```

ort = {0., 1, 0};

oberespule = 5;
unterespule = 5;
joffe = 12;
joffe2 = 6.5;
schiebe = 0;
komp = 0;
mikro = 0;

struct = makestruct[magnet[oberespule, unterespule, joffe, joffe2, schiebe, komp, mikro]];
feld = makefeld[magnet[oberespule, unterespule, joffe, joffe2, schiebe, komp, mikro]];
min = FindMinimum[feld[{a, b, c}], {a, ort[[1]], ort[[1]] + 0.1}, {b, ort[[2]], ort[[2]] + .1}, {c, ort[[3]], ort[[3]] + .1}];
ort = {a, b, c} /. min[[2]]
offsetfeld = min[[1]]

mcontoursurface2D[struct, 100, {-2, ort[[2]], -2}, {4, 0., 0}, {0, 0, 4}, Table[x + offsetfeld, {x, 0, 100, 2}]]
mcontoursurface2D[struct, 100, {-2, -3, ort[[3]]}, {0., 7, 0}, {4, 0, 0}, Table[x + offsetfeld, {x, 0, 100, 2}]]
mcontoursurface2D[struct, 100, {ort[[1]], -3, -2}, {0, 7., 0}, {0, 0, 4}, Table[x + offsetfeld, {x, 0, 100, 2}]]

hesse = mhessianmatrix[struct, ort];
Map[fallenfrb, Eigenvalues[hesse]]
Map[fallenfli, Eigenvalues[hesse]]

richt = Eigenvectors[hesse]
(*p=mpotentialdepthlocation[struct,ort]
  mfieldofstructabs[struct,p] *)

{3.13908 × 10-9, 1.0693, 0.0539963}
3.08846

- ContourGraphics -
- ContourGraphics -
- ContourGraphics -

{206.027, 199.903, 50.0997}
{726.234, 704.645, 176.598}
{{1.45189 × 10-9, 0.0539431, -0.998544}, {-1., -3.41088 × 10-9, -1.63827 × 10-3}, {3.49429 × 10-9, -0.998544, -0.0539431}}
    
```

Ströme in den felderzeugenden Elementen

Kontur-Ebenen

Fallenfrequenzen für beide Spezies

Hauptachsen der Falle

Ort der Falle

Offsetfeld im Minimum B0

Fallenfrequenzen Rb in 2pi Hz

Fallenfrequenzen Li in 2pi Hz

Hauptachsen der Falle

Abbildung B.5: Ablauf einer Fallenanalyse für typische Ströme in der Ioffefalle.

### B.3.1 Doppeldraht-Ioffefalle

Tabellarische Auflistung der Fallenparameter für verschiedene Ströme in den Spulen und Ioffedrähten:

#### Normale Falle für Kondensation und Fermi-Gas

$I_{\text{Spulen}}$	$I_{\text{Ioffe,aussen}}$	$I_{\text{Ioffe,innen}}$						
5 A	12 A	6.5 A						
Offsetfeld $B_0$			Fallenfrequenz Rb ( $2\pi$ Hz)			Fallenfrequenz Li ( $2\pi$ Hz)		
			$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$
3.09 G			206.0	199.9	50.1	726.2	704.6	176.6

#### Falle mit maximalem Offsetfeld

$I_{\text{Spulen}}$	$I_{\text{Ioffe,aussen}}$	$I_{\text{Ioffe,innen}}$						
5 A	20 A	20 A						
Offsetfeld $B_0$			Fallenfrequenz Rb ( $2\pi$ Hz)			Fallenfrequenz Li ( $2\pi$ Hz)		
			$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$
20.65 G			80.33	67.64	42.65	283.14	238.41	150.35

#### Steile Falle

$I_{\text{Spulen}}$	$I_{\text{Ioffe,aussen}}$	$I_{\text{Ioffe,innen}}$						
7 A	15 A	7.7 A						
Offsetfeld $B_0$			Fallenfrequenz Rb ( $2\pi$ Hz)			Fallenfrequenz Li ( $2\pi$ Hz)		
			$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$
0.98 G			510.69	507.14	60.57	1800.13	1787.64	213.52

### B.3.2 Mikrofalle

Fallenparameter für verschiedene Mikrofallen.

**Moderate Mikrofalle**

Asymmetrie $k$	$I_{\text{Spulen}}$	$I_{\text{Ioffe,aussen}}$	$I_{\text{Ioffe,innen}}$	$I_{\text{Mikro}}$		
0.62	5 A	12 A	6.6 A	1 A		
Offsetfeld $B_0$	Fallenfrequenz Rb ( $2\pi$ Hz)			Fallenfrequenz Li ( $2\pi$ Hz)		
	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$
1.07 G	859.05	857.63	48.66	3028.09	3023.08	171.54

**Mikrofalle mit höherem Aspektverhältnis**

Im Unterschied zur Moderaten Mikrofalle wird hier ein geringerer Ioffestrom verwendet. Auf diese Weise sinkt die axiale Fallenfrequenz ungefähr um Faktor 2, die radialen Werte bleiben fast konstant. Die Falle entsteht bei einer höheren Asymmetrie  $k$  der Ströme.

Asymmetrie $k$	$I_{\text{Spulen}}$	$I_{\text{Ioffe,aussen}}$	$I_{\text{Ioffe,innen}}$	$I_{\text{Mikro}}$		
0.46	5 A	5 A	0.4 A	2 A		
Offsetfeld $B_0$	Fallenfrequenz Rb ( $2\pi$ Hz)			Fallenfrequenz Li ( $2\pi$ Hz)		
	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$
1.01 G	813.13	812.85	23.098	2866.23	2865.25	81.4189

**Steile Mikrofalle**

In dieser Konstellation wird zusätzlich zum geringeren Offsetfeld  $B_0$  noch der Strom der Mikrodrähte auf 2 A erhöht.

Asymmetrie $k$	$I_{\text{Spulen}}$	$I_{\text{Ioffe,aussen}}$	$I_{\text{Ioffe,innen}}$	$I_{\text{Mikro}}$		
0.37	5 A	5 A	0.2 A	2 A		
Offsetfeld $B_0$	Fallenfrequenz Rb ( $2\pi$ Hz)			Fallenfrequenz Li ( $2\pi$ Hz)		
	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$
0.55 G	1843.01	1842.92	24.8766	6496.51	6496.19	87.6885

# Literaturverzeichnis

- [And95] M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman and E.A. Cornell, *Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor*, Science **269**, 198 (1995).
- [Bag87a] Vanderlei Bagnato, David E. Pritchard and Daniel Kleppner, *Bose-Einstein condensation in an external potential*, Phys. Rev. A **35**, 4354 (1987).
- [Bag87b] V.S. Bagnato, G.P. Lafyatis, A.G. Martin, E.L. Raab, R.N. Ahmad-Bitar and D.E. Pritchard, *Continuous Stopping and Trapping of Neutral Atoms*, Phys. Rev. Lett. **58**, 2194 (1987).
- [Ber87] T. Bergeman, Gidon Erez and Harold Metcalf, *Magnetostatic trapping fields for neutral atoms*, Phys. Rev. A **35**, 1535 (1987).
- [Bra95] C.C. Bradley, C.A. Sackett, J.J. Tollett and R.G. Hulet, *Evidence of Bose-Einstein Condensation in an Atomic Gas with Attractive Interactions*, Phys. Rev. Lett. **75**, 1687 (1995) *ibid.* **79**, 1170 (1997).
- [But97] D.A. Butts and D.S. Rokhsar, *Trapped Fermi gases*, Phys. Rev. A **55**, 4346 (1997).
- [cep] *Cephes Librairy - Mathematische Algorithmensammlung für die Progamiersprache C*, <http://www.netlib.org/cephes/>.
- [Con01] J.T. Conway, *Exact Solutions for the Magnetic Fields of Axisymmetric Solenoids and Current Distributions*, IEEE Transactions on Magnetics **37**, 2977 (2001).

- [Dav95a] K.B. Davis, M.-O. Mewes, M.R. Andrews, N.J. van Druten, D.S. Durfee, D.M. Kurn and W. Ketterle, *Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms*, Phys. Rev. Lett. **75**, 3969 (1995).
- [Dav95b] K.B. Davis, M.-O. Mewes and W. Ketterle, *An analytical model for evaporative cooling of atoms*, Appl. Phys. B **60**, 155 (1995).
- [Del01] G. Delannoy, S.G. Murdoch, V. Boyer, V. Josse, P. Bouyer and A. Aspect, *Understanding the production of dual Bose-Einstein condensation with sympathetic cooling*, Phys. Rev. A **63**, 051602 (R) (2001).
- [DeM98] B. DeMarco and D.S. Jin, *Exploring a quantum degenerate gas of fermionic atoms*, Phys. Rev. A **58**, R4267 (1998).
- [DeM99] B. DeMarco and D.S. Jin, *Onset of Fermi Degeneracy in a Trapped Atomic Gas*, Science **285**, 1703 (1999).
- [Des98] B. Desruelle, V. Boyer, P. Bouyer, G. Birkl, M. Lécrivain, F. Alves, C.I. Westbrook and A. Aspect, *Trapping cold neutral atoms with an iron-core electromagnet*, Euro. Phys. J. D **1**, 255 (1998).
- [Don04] Tobias Donner, *Erzeugung ultrakalter Gemische aus bosonischen und fermionischen Atomen*, Diplomarbeit, Eberhard-Karls-Universität Tübingen (2004).
- [Ein25] A. Einstein, *Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. Zweite Abhandlung*, Sitzungber. Preuss. Akad. Wiss. **1925**, 3 (1925).
- [Ess99] T. Esslinger, I. Bloch and T.W. Hänsch, *The QUIC-trap: a simple magnetic trap for Bose-Einstein condensation*, in , *Proceedings of the International School of Physics - Enrico Fermi*, edited by M. Inguscio, S. Stringari and C.E. Wieman, (IOS Press, 1999) , S. 491.
- [Fer02] G. Ferrari, M. Inguscio, W. Jastrzebski, G. Modugno, G. Roati and A. Simoni, *Collisional Properties of Ultracold K-Rb Mixtures*, Physical Review Letters **89** (2002).
- [For98a] J. Fortagh, A. Grossmann and C. Zimmermann, *Miniaturized Wire Trap for Neutral Atoms*, Phys. Rev. Lett. **81**, 5310 (1998).

- [For98b] Jozsef Fortágh, Alexander Grossmann, Theodor W. Hänsch and Claus Zimmermann, *Fast loading of a magneto-optical trap from a pulsed thermal source*, J. Appl. Phys. **84**, 6499 (1998).
- [Ger04] E. Gershnel, N. Katz, E. Rowen and N. Davidson, *Bogoliubov excitation spectrum in anharmonic traps*, New J. Phys. **6**, 127 (2004).
- [Got62] Y.V. Gott, M.S. Ioffe and V.G. Tel'kovskii, Nucl. Fusion, Suppl , Pt. 3 page 1045 (1962).
- [Gra02] S.R. Granade, M.E. Gehm, K.M. O'Hara and J.E. Thomas, *All-optical production of a degenerate Fermi gas*, Phys. Rev. Lett. **88**, 120405 (2002).
- [Gre01] Markus Greiner, Immanuel Bloch, Theodor W. Hänsch and Tilman Esslinger, *Magnetic transport of trapped cold atoms over a large distance*, Phys. Rev. A **63**, 031401(R) (2001).
- [Had02] Z. Hadzibabic, C.A. Stan, K. Dieckmann, S. Gupta, M.W. Zwierlein, A. Gorlitz and W. Ketterle, *Two-Species Mixture of Quantum Degenerate Bose and Fermi Gases*, Physical Review Letters **88** (2002).
- [Hes86] Harald F. Hess, *Evaporative cooling of magnetically trapped and compressed spin-polarized hydrogen*, Phys. Rev. B **34**, 3476 (1986).
- [Hän01] W. Hänsel, J. Reichel, P. Hommelhoff and T.W. Hänsch, *Magnetic Conveyor Belt for Transporting and Merging Trapped Atom Clouds*, Phys. Rev. Lett. **86**, 608 (2001).
- [Ige86] G. Igel-Mann, U. Wedig, P. Fuentealba and H. Stoll, *Ground-state properties of alkali dimers XY (X, Y=Li to Cs)*, J. Chem. Lett. Phys. **84**, 5007 (1986).
- [Ino04] S. Inouye, J. Goldwin, M. L. Olsen, C. Ticknor, J. L. Bohn and D. S. Jin, *Observation of Heteronuclear Feshbach Resonances in a Mixture of Bosons and Fermions*, Phys. Rev. Lett. **93**, 183201 (2004).
- [Jac75] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, (John Wiley & Sons, 1975).
- [Jac99] R.H. Jackson, *Off-Axis Expansion Solution of Laplace's Equation: Application to Accurate and Rapid Calculation of Coil Magnetic Fields*, IEEE Transactions on Electron Devices **46**, 1050 (1999).



- [Jac04a] A.D. Jackson and G.M. Kavoulakis, *Vortices in Bose-Einstein condensates with anharmonic confinement*, Phys. Rev. A **70**, 23601 (2004).
- [Jac04b] A.D. Jackson, G.M. Kavoulakis and E. Lundh, *Phase diagram of a rotating Bose-Einstein condensate with anharmonic confinement*, Phys. Rev. A **69**, 053619 (2004).
- [Joc] S. Jochim, M. Bartenstein, G. Hendl, J. Hecker-Denschlag, R. Grimm, A. Mosk and M. Weidem, .
- [Ket99] W. Ketterle, D.S. Durfee and D.M. Stamper-Kurn, *Making, probing and understanding Bose-Einstein condensates*, in , *Proceedings of the International School of Physics - Enrico Fermi*, edited by M. Inguscio, S. Stringari and C.E. Wieman, (IOS Press, 1999) , S. 67.
- [Kra88] John D. Kraus, *Antennas*, (McGraw-Hill Book Company, 1988) 2 edition.
- [Li98] Mingzhe Li, Zijun Yan, Jincan Chen and Chuanhong Chen, *Thermodynamic properties of an ideal Fermi gas in an external potential with  $U = br^t$  in any dimensional space*, Phys. Rev. A **58**, 1445 (1998).
- [Lui96] O.J. Luiten, M.W. Reynolds and J. T. M. Walraven, *Kinetic theory of the evaporative cooling of a trapped gas*, Phys. Rev. A **53**, 381 (1996).
- [Lun04] Emil Lundh, Anssi Collin and Kalle-Antti Suominen, *Rotational States of Bose Gases with Attractive Interactions in Anharmonic Traps*, Phys. Rev. Lett. **92**, 070401 (2004).
- [Man04] M. W. Mancini, G. D. Telles, A. R. L. Caires, V. S. Bagnato and L. G. Marcassa, *Observation of Ultracold Ground-State Heteronuclear Molecules*, Phys. Rev. Lett. **92**, 133203 (2004).
- [McA96] W. I. McAlexander, E. R. I. Abraham and R. G. Hulet, *Radiative lifetime of the  $2P$  state of Lithium*, Phys. Rev. A **54** (1996).
- [Mew96] M.-O. Mewes, M.R. Andrews, N.J. van Druten, D.M. Kurn, D.S. Durfee and W. Ketterle, *Bose-Einstein Condensation in a Tightly Confining dc Magnetic Trap*, Phys. Rev. Lett. **77**, 416 (1996).

- [Mig85] Alan L. Migdall, John V. Prodan, William D. Phillips, Thomas H. Bergeman and Harold J. Metcalf, *First Observation of Magnetically Trapped Neutral Atoms*, Phys. Rev. Lett. **54**, 2596 (1985).
- [Mos01] A. Mosk, S. Kraft, M. Mudrich, K. Singer, W. Wohlleben, R. Grimm and M. Weidemüller, *Mixture of ultracold lithium and cesium atoms in an optical dipole trap*, Applied Physics B **73**, 791 (2001).
- [Mya97] C.J. Myatt, E.A. Burt, R.W. Ghrist, E.A. Cornell and C.E. Wieman, *Production of Two Overlapping Bose-Einstein Condensates by Sympathetic Cooling*, Phys. Rev. Lett. **78**, 586 (1997).
- [O'H02] K.M. O'Hara, S.L. Hemmer, S.R. Granade, M.E. Gehm and J.E. Thomas, *Observation of a strongly-interacting degenerate Fermi gas of atoms*, Science **298**, 2179 (2002).
- [Ott03] Herwig Ott, *Dynamik von Bose-Einstein-Kondensaten in anharmonischen Wellenleitern*, PhD thesis Universität Tübingen 2003.
- [Pet95] Wolfgang Petrich, Michael H. Anderson, Jason R. Ensher and Eric A. Cornell, *Stable, Tightly Confining Magnetic Trap for Evaporative Cooling of Neutral Atoms*, Phys. Rev. Lett. **74**, 3352 (1995).
- [Rad03] A. Radouani, *Gray solitons and phonons in repulsive Bose-Einstein condensates confined in one-dimensional nonharmonic traps*, Phys. Rev. A **68**, 043620 (2003).
- [Rub81] J.R. Rubbmark, M.M. Kash, M.G. Littman and D. Kleppner, *Dynamical effects at avoided level crossings: A study of the Landau-Zener effect using Rydberg atoms*, Phys. Rev. A **23**, 3107 (1981).
- [San00] L. Santos, G.V. Shlyapnikov, P. Zoller and M. Lewenstein, *Bose-Einstein Condensation in Trapped Dipolar Gases*, Phys. Rev. Lett. **85**, 1791 (2000).
- [Sch01a] U. Schlöder, C. Silber and C. Zimmermann, *Photoassociation of heteronuclear lithium*, Appl. Phys. B. **73**, 801 (2001).
- [Sch01b] F. Schreck, G. Ferrari, K. L. Corwin, J. Cubizolles, L. Khaykovich, M.-O. Mewes and C. Salomon, *Sympathetic cooling of bosonic and fermionic*

- lithium gases towards quantum degeneracy*, Phys. Rev. A **64**, 011402(R) (2001).
- [Sch02] U. Schlöder, C. Silber, T. Deuschle and C. Zimmermann, *Saturation in heteronuclear photoassociation of  $^6\text{Li}^7\text{Li}$* , Physiscal Review A **66** (2002).
- [Sch03a] U. Schlöder, *Heteronukleare Photoassoziation in einem kalten  $^6\text{Li}/^7\text{Li}$ -Gemisch*, PhD thesis Eberhard-Karls-Universität Tübingen 2003.
- [Sch03b] U. Schlöder, T. Deuschle, C. Silber and C. Zimmermann, *Autler-Townes splitting in two-color photoassociation of  $6\text{Li}$* , Phys. Rev. A **68**, 051403(R) (2003).
- [Sea02] C.P. Search, H. Pu, W. Zhang, B.P. Anderson and P. Meystre, *Manipulating the critical temperature for the superfluid phase transition in trapped atomic Fermi gases*, Phys. Rev. A **65**, 063616 (2002).
- [Sil00] Christian Silber, *Eine kombinierte magnetooptische Falle für bosonisches und fermionisches Lithium*, Diplomarbeit, Eberhard-Karls-Universität Tübingen (2000).
- [Sil03] C. Silber, T. Deuschle, U. Schlöder, S. Günther and C. Zimmermann, in *Interactions in Ultracold Gases: From Atoms to Molecules*, edited by M. Weidemüller and C. Zimmermann, chapter Iodine Fluorescence Spectroscopy as a Frequency Standard for Lithium Photoassociation (Wiley-VCH, Weinheim, 2003).
- [Sta04] C. A. Stan, M. W. Zwierlein, C. H. Schunck, S. M. F. Raupach and W. Ketterle, *Observation of Feshbach Resonances between Two Different Atomic Species*, Phys. Rev. Lett. **93**, 143001 (2004).
- [Suk97] C.V. Sukumar and D.M. Brink, *Spin-flip transitions in a magnetic trap*, Phys. Rev. A **56**, 2451 (1997).
- [Tol95] J.J. Tollett, C.C. Bradley, C.A. Sackett and R.G. Hulet, *Permanent magnet trap for cold atoms*, Phys. Rev. A **51**, R22 (1995).
- [Tru01] Andrew G. Truscott, Kevin E. Strecker, William I. McAlexander, Guthrie B. Partridge and Randall G. Hulet, *Observation of Fermi Pressure in a Gas of Trapped Atoms*, Science **291**, 2570 (2001).

- [Vit99] N.V. Vitanov, *Transition times in the Landau-Zener model*, Physical Review A **59**, 988 (1999).
- [Win84] W.H. Wing, *On Neutral Particle Trapping in Quasistatic Electromagnetic Fields*, Prog. Quant. Electr. **8**, 181 (1984).
- [Wu96] Huang Wu and Christopher J. Foot, *Direct simulation of evaporative cooling*, J. Phys. B **29**, L321 (1996).
- [Yan99] Zijun Yan, *Bose-Einstein condensation of a trapped gas in  $n$  dimensions*, Phys. Rev. A **59**, 4657 (1999).

# Danke

In dieser Arbeit habe ich versucht, meine in der Zeit als Doktorand gewonnenen Erkenntnisse über den Bau einer Lithium-Rubidium-Apparatur aufzuschreiben. Sie ist zwar ein wichtiger Teil des Promotionsverfahrens und der offizielle "Output" meiner Zeit in der Arbeitsgruppe von Claus Zimmermann, aber meinen ganz persönlichen Gewinn aus dieser Zeit kann sie sicherlich nicht beschreiben.

Claus Zimmermann vertritt die Devise, dass eine Doktorarbeit eine Chance auf ein wissenschaftliches Abenteuer ist, an dem man sich messen kann und bei dem man nicht unbedingt weiß, wie es am Ende ausgeht. Bei ihm möchte ich mich für das große Abenteuer und vor allem für die Bewegungsfreiheit, die er mir dabei zugestanden hat, ganz besonders bedanken. Er war für mich ein hervorragender Mentor, durch den ich viel gelernt habe, und bei dem mir die "Arbeit" immer Spaß gemacht hat.

Sebastian Günther war mein Mitstreiter im Kampf mit der Physik und der Technik. Dass wir am Ende so erfolgreich waren, lag sicherlich zum großen Teil daran, dass wir uns sehr gut ergänzt haben. Ich schätze ihn als starken Diskussionspartner und unermüdlichen Kämpfer im Labor. Wir haben uns selten gescheut, unkonventionelle Ideen zu verfolgen, oder Dinge auch einfach direkt im Experiment auszuprobieren. Von Misserfolgen haben wir uns dabei nie entmutigen lassen und vieles hat sich am Ende dann auch wirklich gelohnt.

Sebastian und ich haben keine Chance ausgelassen, immer noch mehr tolle Technik im Labor zu installieren. Unsere geistigen und physikalischen "Erben" Carsten Marzok und Benjamin Deh werden sich jetzt damit rumschlagen dürfen. Ich hoffe im Interesse aller, dass sie nicht allzu oft über Fehler fluchen müssen, die wir verbrochen haben. Auf jeden Fall wünsche ich ihnen immer viel Spaß und Erfolg mit unserem gemeinsamen Projekt. Ich freue mich jedes Mal, wenn ich von neuen Ergebnissen

aus dem Labor erfahre.

Philippe Courteille ist unsere Geheimwaffe im Hintergrund. Es war für uns ein Glücksfall, dass er in der heißen Phase zu uns gestoßen ist. Ob bei quantenoptischer Theorie, Matlab-Simulationen, oder beim Paper-Schreiben - ohne ihn wären wir sicher an vielen Stellen ratlos gewesen. Dass er außerdem auch noch sein tolles Ferienhaus in der Bretagne für Seminarreisen zu Verfügung gestellt hat, macht ihn nur noch sympathischer.

Im Rückblick auf meinen Start als Doktorand möchte ich auch Ulrike Schlöder und Thomas Deuschle nicht vergessen. Die Apparatur, mit der wir damals Experimente zur Photoassoziation gemacht haben, war wichtiger Ausgangspunkt für den heutigen Aufbau. Tobias Donner war dann in der Umbauphase dabei. Er hat zur neuen Apparatur viel beigetragen.

Bei einer experimentellen Arbeit ist man stark darauf angewiesen, die richtige Unterstützung von Spezialisten zu bekommen. Martin Brendle hat uns mit seinem Wissen so gut wie jeden "elektronischen" Wunsch erfüllt. Wegen seiner maßgeschneiderten und eleganten Schaltungen wurden wir regelmäßig von internationalen Besuchern im Labor beneidet. Sicherlich liegt das auch an unseren ausgezeichneten Institutswerkstätten. Sowohl die Elektronikwerkstatt unter Herrn Schreyer, wie auch die feinmechanische Werkstatt unter Herrn Brodbeck haben echte Meisterleistungen vollbracht. Selbst komplizierteste Ideen wurden so für uns realisierbar.

Vielen Dank allen, mit denen ich im Physikalischen Institut zusammenarbeiten durfte. Ich habe die gemeinsame Zeit sehr genossen und denke immer wieder gerne daran zurück.