

# KRITISCHE ANALYSE VON RENDITE- UND RISIKOKENNZAHLEN

Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
der Wirtschafts- und Sozialwissenschaftlichen Fakultät  
der Eberhard Karls Universität Tübingen

vorgelegt von  
Martin Kipp, M.Sc.  
aus Dortmund

Tübingen  
2023

1. Betreuer: Professor Dr. rer. pol. Christian Koziol  
2. Betreuer: Professor Dr. rer. pol. Joachim Grammig

Tag der mündlichen Prüfung: 15. Dezember 2023

Dekan: Professor Dr. phil. Ansgar Thiel

1. Gutachter: Professor Dr. rer. pol. Christian Koziol

2. Gutachter: Professor Dr. rer. pol. Joachim Grammig

# Inhaltsverzeichnis

	Seite
Abbildungsverzeichnis	iv
Tabellenverzeichnis	v
Abkürzungsverzeichnis	vii
Symbolverzeichnis	ix
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>I Der korrekte Diskontsatz: arithmetisches versus geometrisches Mittel</b>	<b>7</b>
<b>2 Motivation</b>	<b>9</b>
<b>3 Theoretischer Hintergrund</b>	<b>13</b>
3.1 Renditegrundlagen . . . . .	13
3.2 Geometrische Brownsche Bewegung . . . . .	16
<b>4 Arithmetisches und geometrisches Mittel diskreter Renditen</b>	<b>22</b>
4.1 Geometrisches Mittel diskreter Renditen . . . . .	22
4.2 Arithmetisches Mittel diskreter Renditen . . . . .	24
<b>5 Der korrekte Diskontsatz</b>	<b>29</b>
<b>6 Capital Asset Pricing Model</b>	<b>32</b>
6.1 Beweis des CAPM . . . . .	33

---

6.2	Analyse potenzieller Fehler . . . . .	40
6.2.1	Bestimmung der erwarteten diskreten Rendite . . . . .	40
6.2.2	Bestimmung der erwarteten logarithmierten Rendite . . . . .	41
<b>7</b>	<b>Basisinformationsblätter</b>	<b>44</b>
7.1	Hintergrund . . . . .	44
7.2	Performanceszenarien . . . . .	45
<b>8</b>	<b>Zusammenfassende Beurteilung</b>	<b>50</b>
<b>II</b>	<b>Management von Tail-Risiken und die Schiefeprämie</b>	<b>52</b>
<b>9</b>	<b>Motivation</b>	<b>54</b>
<b>10</b>	<b>Modellbeschreibung</b>	<b>58</b>
10.1	Markt- und Zeitstruktur . . . . .	58
10.2	Aktienpreisprozesse . . . . .	61
10.3	Nutzenfunktion der Investoren . . . . .	64
10.3.1	Konstante relative Risikoaversion . . . . .	65
10.3.2	Abnehmende relative Risikoaversion . . . . .	68
10.3.3	Diskretionäre Vermögenshypothese . . . . .	71
10.4	Herleitung des Gleichgewichts . . . . .	76
10.4.1	Zeitpunkt $T_K$ . . . . .	77
10.4.2	Zeitpunkt $t_0$ . . . . .	78
<b>11</b>	<b>Modellergebnisse</b>	<b>79</b>
11.1	Parameterwahl . . . . .	80
11.2	Investoren mit homogenen Anlagehorizonten . . . . .	81
11.3	Investoren mit heterogenen Anlagehorizonten . . . . .	85
11.4	Variierender Anteil von Investoren . . . . .	91
<b>12</b>	<b>Robustheitsanalyse</b>	<b>94</b>
12.1	Aktienpreisprozesse . . . . .	94
12.2	Nutzenfunktion . . . . .	95
12.3	Investitionszeitraum . . . . .	97

---

<b>13 Zusammenfassende Beurteilung</b>	<b>99</b>
<b>III Kontextspezifische Risikomaße von Pensionsfonds</b>	<b>103</b>
14 Motivation	104
<b>15 Ausgewählte Aspekte zu Pensionsfonds</b>	<b>108</b>
15.1 Auslagerung von Pensionsverpflichtungen . . . . .	110
15.2 Unterdeckung und Nachschussverpflichtung . . . . .	114
15.3 Anwendungsspezifische Risikokennzahlen . . . . .	115
<b>16 Anlageuniversum und Renditesimulation</b>	<b>118</b>
16.1 Anlageuniversum . . . . .	118
16.1.1 Charakterisierung der Renditezeitreihen . . . . .	119
16.1.2 Definition der erwarteten Rendite . . . . .	122
16.2 Renditesimulation mittels der Cornish-Fisher-Erweiterung . . . . .	124
16.2.1 Hintergrund . . . . .	125
16.2.2 Renditesimulation . . . . .	129
<b>17 Strategische Asset-Allokation</b>	<b>130</b>
17.1 $\mu$ -CVaR Strategie . . . . .	131
17.2 Risikoeffiziente Portfolios . . . . .	133
<b>18 Robustheitsanalyse</b>	<b>144</b>
18.1 Anwärter- und Rentnerstruktur . . . . .	144
18.2 Schiefe und Kurtosis des Aktienportfolios . . . . .	152
18.3 Einmalprämie zur Auslagerung der Pensionsverpflichtungen . . . . .	154
<b>19 Zusammenfassende Beurteilung</b>	<b>157</b>
<b>IV Schlussbetrachtung</b>	<b>160</b>
Literaturverzeichnis	166

# Abbildungsverzeichnis

4.1	Konvexitätskorrektur . . . . .	26
6.1	Größe des Fehlers $\mu'_{logS} - \mu_{logS}$ in Abhängigkeit von $\beta$ . . . . .	43
10.1	Investitionshorizonte der repräsentativen Investoren . . . . .	60
10.2	Aktienquote in Abhängigkeit des Anlagehorizontes . . . . .	69
11.1	Geforderte Renditen des langfristigen Investors L . . . . .	83
11.2	Schiefepremie . . . . .	84
15.1	Auslagerung der Pensionsverpflichtungen des 55-jährigen Versorgungsanwärters . . . . .	113
15.2	Rückstellungen des Pensionsfonds (Alters-Ø = 55 Jahre) . . . . .	114
17.1	NW-NaR Diagramm (Alters-Ø = 55 Jahre) . . . . .	134
17.2	Portfolioallokation risikoeffizienter Portfolios (Alters-Ø = 55 Jahre) . .	136
17.3	Eigenschaften risikoeffizienter Portfolios (Alters-Ø = 55 Jahre) . . . . .	137
17.4	Entwicklung des Medians und des 90%-Konfidenzintervalls von Portfolios mit unterschiedlichen Aktienquoten . . . . .	140
17.5	Entwicklung des 5%-Quantils der Kapitalanlage mit Rentenzahlungen (Alters-Ø = 55 Jahre) . . . . .	141
18.1	Rückstellungen des Pensionsfonds (Alters-Ø = 45 Jahre) . . . . .	145
18.2	NW-NaR-Diagramm (Alters-Ø = 45 Jahre) . . . . .	146
18.3	Portfolioallokation risikoeffizienter Portfolios (Alters-Ø = 45 Jahre) . .	147
18.4	Entwicklung des 5%-Quantils der Kapitalanlage mit Rentenzahlungen (Alters-Ø = 45 Jahre) . . . . .	149

# Tabellenverzeichnis

3.1	Renditedifferenz diskreter und logarithmierter Renditen . . . . .	15
4.1	Schätzer für verschiedene Frequenzen . . . . .	28
7.1	Performanceszenarien eines Partizipationszertifikats . . . . .	48
11.1	Parameter . . . . .	80
11.2	Gleichgewichtsergebnisse mit heterogenen Investoren . . . . .	88
11.3	Geforderte Renditen der Investoren . . . . .	88
11.4	Variierender Anteil kurz- und langfristiger Investoren . . . . .	92
12.1	Robustheitsanalyse . . . . .	96
16.1	Historische Verteilungseigenschaften . . . . .	120
16.2	Korrelationsmatrix . . . . .	121
16.3	Erwartete Rendite des Aktienportfolios und der Anleiheindizes . . . . .	123
16.4	Bestimmung der historischen Risikoprämie . . . . .	124
16.5	Cornish-Fisher-Parameter . . . . .	128
17.1	Eigenschaften des $\mu$ -CVaR Portfolios (Alters-Ø = 55 Jahre) . . . . .	132
18.1	Eigenschaften des $\mu$ -CVaR und des NW-NaR Portfolios (Alters-Ø = 45 Jahre) . . . . .	148
18.2	Portfolioeigenschaften für unterschiedliche Strukturen der Versorgungs- anwärter und -empfänger . . . . .	151
18.3	Portfolioeigenschaften mit höherer (negativer) Schiefe und Kurtosis des Aktienportfolios (Alters-Ø = 55 Jahre) . . . . .	153

---

18.4	Portfolioeigenschaften mit höherer Einmalprämie zur Auslagerung der Pensionsverpflichtungen (Alters-Ø = 55 Jahre) . . . . .	155
------	---	-----

# Abkürzungsverzeichnis

Abs.	Absatz
Bafin	Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht
bAV	Betriebliche Altersvorsorge
BIB	Basisinformationsblatt
CAPM	Capital Asset Pricing Model
CRRA	Konstante relative Risikoaversion (constant relative risk aversion)
CVaR	Conditional Value-at-Risk
DAI	Deutsches Aktieninstitut
DAX	Deutscher Aktienindex
DCF	Discounted Cash Flow
DeckRV	Deckungsrückstellungsverordnung
DRRA	Abnehmende relative Risikoaversion (decreasing relative risk aversion)
EbAV	Einrichtungen der betrieblichen Altersversorgung
EQ	Gleichgewicht (equilibrium)
EU	Europäische Union
FAUB	Fachausschuss für Unternehmensbewertung und Betriebswirtschaft
HGB	Handelsgesetzbuch
IDW	Institut der Wirtschaftsprüfer
IRRA	Zunehmende relative Risikoaversion (increasing relative risk aversion)
KPI	Wesentliche Geschäftskennzahl (key performance indicator)

---

NaR	Nachschuss-at-Risk
Nr.	Nummer
NW	Nachschusswahrscheinlichkeit
NYSE	New York Stock Exchange
p.a.	Jährlich (per annum)
PF	Portfolio
PFAV	Pensionsfonds-Aufsichtsverordnung
PRIIP	Verpackte Anlageprodukte für Kleinanleger und Versicherungsanlageprodukte (packaged retail and insurance-based investment products)
RHP	Empfohlene Haltedauer (recommended holding period)
RRA	Relative Risikoaversion (relative risk aversion)
RTS	Technische Regulierungsstandards (regulatory technical standards)
SRI	Risikoindikator (summary risk indicator)
USD	US-amerikanischer Dollar
VAG	Versicherungsaufsichtsgesetz
VaR	Value-at-Risk
WACC	Gewichtete durchschnittliche Kapitalkosten (weighted average cost of capital)

# Symbolverzeichnis

$\alpha$	Signifikanzniveau
$\beta$	Beta-Faktor
$\hat{\beta}$	Geschätzter Beta-Faktor
$\gamma$	Risikoaversionsparameter
$\Gamma$	Größe einer Abweichung
$\delta$	Diskontfaktor
$\Delta t$	Länge eines diskreten Zeitschritts
$\zeta$	Sprunghöhe eines Poisson-Prozesses im Logarithmus des Aktienkurses
$\eta^i$	Existenzminimum von Investor $i$
$\theta_j$	Mittelwert der Zustandsvariablen $j$
$\lambda$	Sprungintensität eines Poisson-Prozesses
$\mu_j$	Erwartete diskrete Rendite von Vermögenswert $j$
$\hat{\mu}_j$	Geschätzte erwartete diskrete Rendite von Vermögenswert $j$
$\mu'_j$	Inkorrekte erwartete diskrete Rendite von Vermögenswert $j$
$\mu_J$	Sprungbereinigte Drift
$\mu_{logj}$	Erwartete logarithmierte Rendite von Vermögenswert $j$
$\hat{\mu}_{logj}$	Geschätzte erwartete logarithmierte Rendite von Vermögenswert $j$
$\mu'_{logj}$	Inkorrekte erwartete logarithmierte Rendite von Vermögenswert $j$
$\xi$	Anzahl der auftretenden Sprünge des Poisson-Prozesses
$\pi_\omega$	Wahrscheinlichkeit des Auftretens von Zustand $\omega$
$\rho$	Korrelation zwischen den Renditen von zwei Vermögenswerten

---

$\sigma_\epsilon$	Idiosynkratische Volatilität
$\sigma_{CF}$	Cornish-Fisher-Standardabweichung
$\sigma_j$	Standardabweichung der Renditen von Vermögenswert $j$
$\hat{\sigma}_j$	Geschätzte Standardabweichung der Renditen von Vermögenswert $j$
$\sigma_J$	Sprungbereinigte Standardabweichung der Renditen
$\phi_\omega$	Preis einer zustandsabhängigen Forderung für eine Einheit des Konsums in Zustand $\omega$
$\varphi$	Nicht lineare Funktion in Abhängigkeit der Schiefe und Überkurtosis zur Bestimmung der Cornish-Fisher-Schiefe
$\Phi(\cdot)$	Kumulative Verteilungsfunktion einer standardnormalverteilten Zufallsvariablen
$\chi_j^i$	Nachfragefunktion von Investor $i$ für Vermögenswert $j$
$\psi$	Nicht lineare Funktion in Abhängigkeit der Schiefe und Überkurtosis zur Bestimmung der Cornish-Fisher-Überkurtosis
$\omega$	Zustand der Ökonomie
$\Omega$	Gesamtheit aller Zustände $\omega$ der Ökonomie
$a$	Mittelwert einer normalverteilten Zufallsvariablen
$b$	Standardabweichung einer normalverteilten Zufallsvariablen
$B$	Preis einer Nullkuponanleihe
$c$	Shortfall-Punkt nach Wilcox (2003)
$C_0$	Aggregierter Konsum im Zeitpunkt $t = 0$
$C_\omega$	Aggregierter Konsum im Zustand $\omega$ im Zeitpunkt $t = 1$
$dJ_t$	Inkrement des Poisson-Prozesses im Zeitpunkt $t$
$dS_t$	Dynamik des Preises eines Vermögenswertes im Zeitpunkt $t$
$dt$	Zeitinkrement
$dz_t$	Inkrement des Wiener-Prozesses im Zeitpunkt $t$
$\mathbb{E}(\cdot)$	Erwartungswertoperator
$\bar{J}_T$	Maximale Anzahl berücksichtigter Sprünge bezüglich des Zeitraums $T$
$k$	Überkurtosis

---

$k_{CF}$	Cornish-Fisher-Überkurtosis
$L$	Risikoaversionsparameter nach Wilcox (2003)
$M_t$	Preis/Auszahlung des Marktportfolios im Zeitpunkt $t$
$n$	Subperiode
$N$	Anzahl der Zeitschritte identischer Länge eines Zeitraums
$p_{j,t}$	Handelspreis des Vermögenswertes $j$ im Zeitpunkt $t$
$p_{j,t}^{EQ}$	Gleichgewichtspreis des Vermögenswertes $j$ im Zeitpunkt $t$
$PV_t$	Barwert (present value) im Zeitpunkt $t$
$PV'_t$	Inkorrekter Barwert (present value) im Zeitpunkt $t$
$q_{CF,\alpha}$	$\alpha$ -Cornish-Fisher-Quantil
$q'_{CF,\alpha}$	Inkorrektes $\alpha$ -Cornish-Fisher-Quantil
$\bar{r}_a$	Arithmetisches Mittel diskreter Renditen
$r_f$	Risikofreier Zinssatz
$\bar{r}_{geo}$	Geometrisches Mittel diskreter Renditen
$\bar{r}_{log-geo}$	Logarithmierte Darstellung des geometrischen Mittels diskreter Renditen
$r_{n,d}$	Diskrete Teilperiodenrendite über Subperiode $n$
$r_{n,log}$	Logarithmierte Teilperiodenrendite über Subperiode $n$
$sk$	Schiefe
$sk_{CF}$	Cornish-Fisher-Schiefe
$sk^{prem}$	Schiefepremie
$S_{j,t}$	Preis von Vermögenswert $j$ im Zeitpunkt $t$
$t$	Zeitindex
$T$	Länge eines Zeitraums
$U(\cdot)$	Nutzenfunktion
$V_j$	Wert des Performanceszenarios $j$ gemäß theoriekonsistenter Herleitung
$V_j^{RTS}$	Wert des Performanceszenarios $j$ gemäß PRIIP-Verordnung und technischen Regulierungsstandards (RTS)

---

$W_t^i$	Vermögen von Investor $i$ im Zeitpunkt $t$
$x_\alpha$	$\alpha$ -Perzentil der Standardnormalverteilung
$x_{CF,\alpha}$	Standardisiertes $\alpha$ -Cornish-Fisher-Quantil
$\bar{X}_{Cash}$	Aggregierte Geldausstattung aller Investoren
$\bar{X}_{Cash}^i$	Geldausstattung von Investor $i$
$\bar{X}_j$	Angebotene Einheiten des Vermögenswertes $j$
$X_j^i$	Erworbene Einheiten von Investor $i$ des Vermögenswertes $j$
$X_j^{i,EQ}$	Erworbene Einheiten von Investor $i$ des Vermögenswertes $j$ im Gleichgewicht
$y$	Stetiger Diskontsatz
$y_j^i$	Geforderte Rendite von Investor $i$ für Vermögenswert $j$
$y_j^{i,EQ}$	Geforderte Rendite von Investor $i$ für Vermögenswert $j$ im Gleichgewicht
$z_\alpha$	$\alpha$ -Perzentil der Normalverteilung mit Mittelwert $a$ und Varianz $b^2$
$z_T$	Wiener-Prozess im Zeitpunkt $T$ mit Mittelwert null und Varianz $T$
$Z$	Normalverteilte Zufallsvariable mit Mittelwert $a$ und Varianz $b^2$



# Kapitel 1

## Einleitung

Die vorliegende Arbeit bietet eine neue Perspektive auf etablierte Rendite- und Risikokennzahlen und setzt sich kritisch mit dem Einsatz dieser Kennzahlen in grundlegenden und prominenten Anwendungen in der Finanzwirtschaft auseinander. Für eine Vielzahl von Anwendungen stellt sich die fundamentale Frage, welches Renditemaß die (methodisch) korrekte Wahl im Rahmen der spezifischen Applikation darstellt und welches von vielen zur Auswahl stehenden (etablierten) Risikomaßen das tatsächliche Risiko adäquat erfassen kann – und ob überhaupt. So kommt der Methode zur Bestimmung der durchschnittlichen Rendite von Vermögenswerten auf Basis historischer Daten zur Herleitung der erwarteten Rendite in zahlreichen Anwendungen eine entscheidende Rolle zu. Mit dem arithmetischen Mittel diskreter Renditen und dem geometrischen Mittel, das eng mit dem arithmetischen Mittel logarithmierter Renditen verwandt ist, existieren dazu zwei bewährte Ansätze. Mit einer bei Aktienindizes typischerweise zu beobachtenden Abweichung der beiden jährlichen Durchschnittsrenditen von mehr als 2 Prozentpunkten pro Jahr ist die korrekte Wahl der Berechnungsmethode dabei von zentraler Bedeutung und erfordert damit eine sorgfältige Prüfung, welche der beiden Berechnungsmethoden in ausgewählten Anwendungen Verwendung finden sollte.

Ob sich die Beziehung zwischen der erwarteten Rendite eines Vermögenswertes und des Marktportfolios des Capital Asset Pricing Model (CAPM) auf das arithmetische oder geometrische Mittel diskreter Renditen stützt, stellt dabei einen besonders prominenten Anwendungsfall dar. Interessanterweise finden sich Befürworter sowohl für das arithmetische Mittel, wie zum Beispiel Brealey et al. (2011), als auch für das geometrische Mittel, wie

---

beispielsweise Damodaran (2013). Als weitere Anwendungen mit herausragender Bedeutung in der Finanzwirtschaft lassen sich der Diskontsatz zur Bestimmung des Wertes einer Investition oder eines Unternehmens im Rahmen der Methode des Discounted Cash Flow (DCF) und die zukünftig zu erwartende Rendite eines Vermögenswertes aufführen. Ebenso erfordert die Bestimmung der Werte der Performanceszenarien im Rahmen der Basisinformationsblätter für verpackte Anlageprodukte und Versicherungsanlageprodukte – als wichtige Grundlage für Privatanleger, Merkmale und Risikoeigenschaften dieser Produkte verstehen und vergleichen zu können – die korrekte Wahl der Berechnungsmethode zur Erfassung der zugrunde liegenden Durchschnittsrendite.

Teil 1 dieser Arbeit soll durch eine rigorose Aufarbeitung der unterschiedlichen Renditekonzepte der diskreten und logarithmierten Rendite sowie einen Vergleich der Berechnungsmethoden zur Bestimmung von Durchschnittsrenditen (arithmetisches und geometrisches Mittel) das Bewusstsein für die Relevanz dieser fundamentalen Konzepte in der Finanzwirtschaft schärfen. Durch eine formale Herleitung – bei der als methodisches Fundament angenommen wird, dass Renditen von Vermögenswerten einer geometrischen Brownschen Bewegung folgen – können die unterschiedlichen Berechnungsmethoden zur Bestimmung von durchschnittlichen Renditen mit den Renditedefinitionen verschiedener Anwendungen in Beziehung gesetzt werden. Es wird geprüft, auf welcher Berechnungsmethode der durchschnittlichen Rendite die Schätzung der erwarteten Rendite eines Vermögenswertes basieren sollte, um eine angemessene zukünftige Wertentwicklung ausdrücken zu können. Daraus ergibt sich, dass die erwartete diskrete Rendite (arithmetisches Mittel diskreter Renditen) und nicht die erwartete logarithmierte Rendite (arithmetisches Mittel logarithmierter Renditen, das eng mit dem geometrischen Mittel diskreter Renditen verbunden ist), die korrekte Rendite darstellt, um den erwarteten prozentualen Vermögenszuwachs anzugeben. Durch die Herleitung des CAPM auf Basis eines konsumbasierten Frameworks, das dem von Huang und Litzenberger (1988) und Cochrane (2009) ähnelt, wird gezeigt, dass die bedeutende Beziehung ausschließlich für erwartete diskrete Renditen Gültigkeit besitzt. Der korrekte Diskontsatz zur Bestimmung des Wertes einer Investition oder eines Unternehmens entspricht ebenfalls der erwarteten diskreten Rendite. Schließlich deutet die Überprüfung der Performanceszenarien im Rahmen der Basisinformationsblätter<sup>1</sup> für Produkte der zweiten Kategorie – Produkte, deren Wertentwicklung sich linear

---

<sup>1</sup>Die Analyse bezieht sich auf die am 01.01.2018 in Kraft getretene EU-Verordnung Nr. 1286/2014 vom 26.11.2014, Amtsblatt EU L 352 über Basisinformationsblätter zusammen mit der Delegierten Verordnung (EU) 2017/653 vom 08.03.2017, Amtsblatt EU L 100/1.

---

an der Wertentwicklung des Basiswertes orientiert – darüber hinaus auf eine inkorrekte Verwendung der erwarteten logarithmierten Rendite statt der erwarteten diskreten Rendite hin. Die Ergebnisse dieses Teils der vorliegenden Dissertation verdeutlichen, dass die Verwendung des falschen Konzepts zur Herleitung der durchschnittlichen Renditen in den aufgeführten Anwendungen zu gravierenden Performanceunterschieden und Fehlberechnungen führen kann.

Neben der methodisch korrekten Bestimmung der erwarteten Rendite von Vermögenswerten ist ebenso die Wahl des Risikomaßes in der Portfolioallokation von entscheidender Bedeutung. Gemäß des Capital Asset Pricing Model von Sharpe (1964), Lintner (1965) und Mossin (1966) können optimale Investitionsentscheidungen lediglich auf Basis der erwarteten Rendite und Standardabweichung der Gesamtrendite eines Portfolios getroffen werden. Höhere Momente der Renditeverteilung finden somit in der Anlageentscheidung keine Berücksichtigung. Während die Portfoliooptimierung auf dieser Grundlage breite Akzeptanz findet und einen etablierten Ansatz in der Portfolioallokation darstellt, betonen Arditti (1967), Samuelson (1970) und Rubinstein (1976), dass höhere Momente in der Portfolioallokation nicht vernachlässigt werden können. Die empirisch beobachteten Präferenzen von Marktteilnehmern bestätigen, dass Risikoeigenschaften von Renditeverteilungen von Bedeutung sind, die von der Standardabweichung der Renditen nicht vollständig erfasst werden (Harvey und Siddique, 2000 und Ang et al., 2006). Dazu gehört das für Investoren (ungeliebte) Katastrophenrisiko – die positive (sehr kleine) Wahrscheinlichkeit, einen großen Teil einer Investition oder eines Portfoliowertes zu verlieren –, das durch die (negative) Schiefe einer Renditeverteilung messbar ist. Diese Beobachtungen implizieren, dass eine zusätzliche Prämie für das Tail-Risiko (Katastrophenrisiko) existieren kann, also eine positive Schiefeprämie, die auf einem Konzept ähnlich des CAPM oder der Portfoliotheorie nach Markowitz (1952) per Definition beziehungsweise aufgrund restriktiver Annahmen nicht auftreten kann. Als Folge fehlt das Verständnis für grundlegende Faktoren, die zu Schiefeprämien führen und diese beeinflussen.

Ziel des zweiten Teils dieser Arbeit ist die Herleitung eines Asset-Pricing-Modells, das die Analyse der Auswirkungen von Tail-Risiken auf die optimale Portfolioallokation von Marktteilnehmern und die Preise von Vermögenswerten ermöglicht und ein tieferes Verständnis von Schiefeprämien erlaubt. Während das CAPM ein einperiodiges Modell darstellt, wird dazu ein mehrperiodiges Framework eingeführt, das zusätzlich Investoren mit heterogenen Anlagehorizonten zulässt. Außerdem wird von der typischen Annahme kon-

---

stanter relativer Risikoaversion abgewichen und unterstellt, dass Investoren eine Nutzenfunktion mit abnehmender relativer Risikoaversion aufweisen. So wird das häufig zu beobachtende Verhalten von Marktteilnehmern, bei längeren Investitionszeiträumen einen größeren Teil des Vermögens in Aktien zu investieren, aufgegriffen (Thorley, 1995). Neben einem risikofreien Wertpapier stehen Investoren zwei Vermögenswerte zur Verfügung, die eine identische erwartete Rendite und Standardabweichung der Renditen – aber ein unterschiedlich ausgeprägtes Katastrophenrisiko (negative Schiefe) – aufweisen. Das ermöglicht die rigorose Analyse der i) Präferenzen der Investoren bezüglich des in das Portfolio aufgenommenen Tail-Risikos in Abhängigkeit der Investitionshorizonte sowie der ii) resultierenden Schiefeprämie aus den endogenen Marktpreisen der Vermögenswerte.

Zentrales Ergebnis des zweiten Teils der vorliegenden Dissertation ist, dass die Two-Fund-Separation im Rahmen des eingeführten Modells nicht mehr gilt und Investoren aufgrund des Tail-Risikos unterschiedliche Portfolios risikobehafteter Vermögenswerte halten: Für die stets positive Schiefeprämie – als (zusätzliche) Kompensation für das Tail-Risiko von Vermögenswerten mit linksschiefer Renditeverteilung – halten (*ceteris paribus*) langfristige orientierte Investoren höhere Portfoliogewichte in Assets, die durch das Katastrophenrisiko charakterisiert sind, als kurzfristige Investoren. Diese Implikation des Modells stellt einen grundlegenden Unterschied zum CAPM dar, in dessen Rahmen alle Investoren ein identisches risikobehaftetes Portfolio – das Marktportfolio – halten. Zusätzlich zeigt sich, dass eine stärker ausgeprägte Risikoaversion, kürzere Investitionshorizonte der Investoren und wenn ein Markt stärker von kurzfristigen Investoren dominiert wird, zu einer höheren Schiefeprämie führen. Diese aus dem Modell abgeleiteten Implikationen sollen das Bewusstsein für die Existenz von Schiefeprämien schärfen, ein intuitives Verständnis für die Ursachen dieser Prämien vermitteln sowie die praktische Relevanz für Investoren, Tail-Risiken bei ihren Anlageentscheidungen sorgfältig zu berücksichtigen, betonen.

In der Portfolioallokation lässt sich mit dem Value-at-Risk (VaR) und dem darauf aufbauenden Conditional Value-at-Risk (CVaR) die Einbindung weiterer komplexer Risikomaße beobachten, die mit der Betrachtung der Wertentwicklung des Portfolios in einem Extremszenario ein anschauliches Risikoverständnis vermitteln. Auch in zahlreichen weiteren Anwendungen in der Finanzwirtschaft, wie beispielsweise im Risikomanagement, in der Finanzberichterstattung oder in der Bankenaufsicht, haben sich diese beiden Downside-Risikokennzahlen etabliert. Als Risikomaße für die maximale Verlusthöhe eines Portfolios innerhalb eines Zeitraums bezüglich eines bestimmten Konfidenzniveaus (VaR) und

---

für die durchschnittliche Höhe der Verluste, die diese maximale Verlusthöhe übersteigen (CVaR), werden – bei korrekter Bestimmung – neben der Standardabweichung der Portfoliorenditen mit der Schiefe und Kurtosis weitere Verteilungseigenschaften der Renditen berücksichtigt. (Jorion, 2007) Beide Risikomaße stellen aussagekräftige Kennzahlen dar, die in der Portfolioallokation zusätzlich zur Standardabweichung der Renditen zur Charakterisierung von Portfolios herangezogen werden können. Für eine Vielzahl von Anlageentscheidungen in der Praxis scheint es damit zunächst naheliegend, solch verbreitete und etablierte Risikomaße (standardmäßig) als Zielkennzahlen in die strategische Asset-Allokation zu integrieren.

Ziel des dritten Teils der vorliegenden Arbeit ist es, Marktteilnehmer dafür zu sensibilisieren, grundsätzlich kritisch zu hinterfragen, ob ein (Standard-)Risikomaß das tatsächliche Risiko im Rahmen einer spezifischen Anwendung aufgreift, um – wenn erforderlich – die strategische Asset-Allokation auf passgenaue Risikomaße zu stützen. Als ein beispielhaftes Portfolioallokationsproblem mit großer praktischer Relevanz wird dazu die strategische Asset-Allokation von Pensionsfonds betrachtet. Vor dem Hintergrund der gesetzlichen Vorschriften zu Nachschussverpflichtungen, die das Unternehmen an den Pensionsfonds nach Auslagerung der Pensionsverpflichtungen im Fall einer Unterdeckung, wenn der Wert der Kapitalanlage während der Auszahlungsphase der Renten den Barwert der Ansprüche der Versorgungsempfänger unterschreitet, leisten muss, spiegeln Standard-Risikomaße wie die Standardabweichung der Portfoliorendite oder der (Conditional) Value-at-Risk das kontextspezifische Risiko von Pensionsfonds nicht wider und stellen damit keine passgenauen Risikokennzahlen dar. Im Gegensatz dazu können aus dem gesetzlichen Rahmen mit i) der Nachschusswahrscheinlichkeit – die ex ante Wahrscheinlichkeit, dass es über die gesamte Auszahlungsphase der Versorgungsansprüche zu einer Unterdeckung kommt – und ii) dem Nachschuss-at-Risk – die Höhe der Nachschusszahlung des Trägerunternehmens an den Pensionsfonds in einem (extrem) ungünstigen Szenario – zwei kontextspezifische Risikomaße abgeleitet werden, die das Risiko verbunden mit einer (unerwünschten) Unterdeckung direkt aufgreifen. Der Vergleich der Portfolioallokation und -eigenschaften einer Strategie, die auf Standard-Risikomaßen basiert, mit einer Strategie, die auf den kontextspezifischen Risikokennzahlen aufbaut, erlaubt die Ableitung zentraler Implikationen hinsichtlich der strategischen Asset-Allokation von Pensionsfonds.

Die Ergebnisse dieses Teils zeigen, dass eine Strategie, die den einjährigen Conditional Value-at-Risk unter Berücksichtigung einer jährlichen Mindestrendite, die zur Erfüllung

aller künftigen Rentenzahlungen ausreicht, minimiert, in einer fehlgeleiteten Portfolioallokation resultiert. Aufgrund des (typischerweise) langfristigen Investitionshorizontes des Pensionsfonds ist eine höhere erwartete Portfoliorendite vorteilhaft, um langfristig ausreichend Kapital zu bilden und so das Risiko einer Unterdeckung über die gesamte Auszahlungsperiode der Pensionsansprüche effektiv reduzieren zu können. Dazu ist jedoch eine größere Risikoaufnahme – gemessen an den Standard-Risikomaßen – durch eine höhere Aktienquote erforderlich, die gemäß der CVaR-Strategie gerade minimiert wird. Das Ergebnis zeigt somit die Unvereinbarkeit einer auf Standard-Risikomaßen basierenden Portfolioallokationsstrategie mit der strategischen Asset-Allokation von Pensionsfonds auf, was sich auf weitere Anwendungsfälle in der Finanzwirtschaft übertragen lässt.

# Teil I

Der korrekte Diskontsatz:  
arithmetisches versus geometrisches  
Mittel

Dieser Teil der vorliegenden Dissertation beruht auf dem mit Prof. Dr. Christian Koziol in Credit and Capital Markets veröffentlichten Paper *Which is the correct Discount Rate? Arithmetic versus Geometric Mean* (Kipp und Koziol, 2020).

# Kapitel 2

## Motivation

Zur Bestimmung der durchschnittlichen Rendite eines Vermögenswertes auf Basis historischer Daten kann auf zwei bewährte Berechnungsmethoden zurückgegriffen werden, dem arithmetischen Mittel und dem geometrischen Mittel. Im Rahmen zahlreicher praktischer Anwendungen wird eine der beiden Methoden zur Berechnung der durchschnittlichen Rendite gewählt, ohne kritisch zu hinterfragen, ob diese Wahl angemessen ist oder nicht. Das ist dahingehend überraschend, als dass die ermittelten Werte des arithmetischen und des geometrischen Mittels diskreter durchaus stark voneinander abweichen können. Beispielsweise sind bei jährlichen Durchschnittsrenditen von Aktien nach beiden Methoden Abweichungen von 200 Basispunkten häufig zu beobachten. Die Wahl der korrekten Berechnungsmethode zur Bestimmung der Durchschnittsrendite ist insbesondere bei den folgenden beiden Anwendungen von Bedeutung:

Erstens ist die Schätzung der erwarteten Rendite erforderlich, um für eine Investition eine angemessene zukünftige Wertentwicklung ausdrücken zu können. Es ist naheliegend, dass eine erwartete Rendite von beispielsweise 6 Prozent, die durch das arithmetische Mittel bestimmt wird, andere Schlussfolgerungen bei Marktteilnehmern zulässt als eine erwartete Rendite von lediglich 4 Prozent, die sich aus dem geometrischen Mittel ergibt. Als Beispiel veröffentlicht das Deutsche Aktieninstitut (DAI) regelmäßig das Rendite-Dreieck des Deutschen Aktienindex (DAX), in dem historische jährliche Durchschnittsrenditen des DAX Performance Index für beliebig lange Anlagezeiträume von einem Jahr bis zu fünfzig Jahren ausgewiesen werden (Deutsches Aktieninstitut, 2022). Standardmäßig wird hier auf das geometrische Mittel als Kennzahl für die durchschnittliche jährliche Rendite

zurückgegriffen und dieses häufig auch als Indikator für die zukünftige Wertentwicklung des DAX interpretiert.

Zweitens erfordert die DCF-Methode die Kenntnis des korrekten Diskontsatzes. Dabei können substantielle Bewertungsunterschiede resultieren, je nachdem ob der Diskontsatz auf Basis des geometrischen Mittels oder des arithmetischen Mittels ermittelt wird. Nach der DCF-Methode werden risikoadjustierte Diskontsätze in der Regel aus der bekannten Beziehung des Capital Asset Pricing Model gewonnen und der Wert einer Investition oder eines Unternehmens wird als Summe künftiger diskontierter Zahlungsströme bestimmt. Daher stellt sich die zusätzliche Frage, ob sich der Zusammenhang zwischen der erwarteten Kapitalrendite eines Vermögenswertes und der erwarteten Marktrendite des CAPM auf das arithmetische Mittel oder das geometrische Mittel bezieht. In der Praxis gibt es Befürworter für beide Ansichten. Zu den Vertretern des geometrischen Mittels gehören unter anderem Damodaran (2013) und Koller et al. (2015), während Brealey et al. (2011) in diesem Kontext für die Verwendung des arithmetischen Mittels plädieren.

Ziel dieses Teils der Dissertation ist für ausgewählte Anwendungen zu klären, welche Methode zur Bestimmung der durchschnittlichen Rendite Verwendung finden sollte. Als methodische Grundlage werden Renditen von Vermögenswerten betrachtet, die einer geometrischen Brownschen Bewegung folgen. Dieser zeitkontinuierliche Prozess berücksichtigt normalverteilte Renditen und ist aus der Optionspreistheorie bekannt (Black und Scholes, 1973). Durch eine formale Herleitung können so die unterschiedlichen Methoden zur Bestimmung von durchschnittlichen Renditen mit verschiedenen Anwendungen in Beziehung gesetzt werden.

Im ersten Teil der vorliegenden Dissertation werden die folgenden Erkenntnisse herausgearbeitet:

- (I) Die erwartete diskrete Rendite entspricht dem arithmetischen Mittel diskreter Renditen, während die erwartete logarithmierte Rendite den Charakter des geometrischen Mittels aufweist.
- (II) Die erwartete diskrete Rendite (arithmetisches Mittel) ist die Rendite, die den erwarteten Vermögenszuwachs einer Investition angibt und stellt daher die richtige Wahl dar – im Gegensatz zur erwarteten logarithmierten Rendite (geometrisches Mittel) – um die erwartete prozentuale Vermögensentwicklung anzugeben.

- 
- (III) Der korrekte Diskontsatz im Rahmen eines DCF-Ansatzes ist die erwartete diskrete Rendite (arithmetisches Mittel) und nicht die erwartete logarithmierte Rendite (geometrisches Mittel).
- (IV) Durch eine Herleitung des CAPM zeigt sich, dass die bedeutende Beziehung zwischen der erwarteten Rendite eines einzelnen Vermögenswertes und der erwarteten Marktrendite durch ihren Beta-Faktor nur für die erwarteten diskreten Renditen (arithmetische Mittelwerte), nicht aber für die erwarteten logarithmierten Renditen (geometrische Mittelwerte) gilt.
- (V) Die nähere Betrachtung der ursprünglichen Verordnung für verpackte Anlageprodukte für Kleinanleger und Versicherungsanlageprodukte (packaged retail and insurance-based investment products, PRIIPs) zur Erstellung der Basisinformationsblätter zeigt, dass eine falsche Verwendung der Methode zur Bestimmung der erwarteten Rendite der den Emittenten vorgeschriebenen Berechnung im Rahmen der am 01.01.2018 in Kraft getretenen EU-Verordnung Nr. 1286/2014 vom 26.11.2014 über Basisinformationsblätter zusammen mit der Delegierten Verordnung (EU) 2017/653 vom 08.03.2017 zugrunde gelegt wird:<sup>2</sup> Für die Bestimmung der Vermögensendwerte im Rahmen der Performanceszenarien soll die erwartete logarithmierte Rendite (geometrisches Mittel) mit einer zusätzlichen – aber unnötigen – Varianzkorrektur angewandt werden. Für eine widerspruchsfreie Anwendung der Performanceszenarien könnte die erwartete diskrete Rendite (arithmetisches Mittel) in Verbindung mit der Varianzkorrektur verwendet werden. Dieses Ergebnis steht im Einklang mit dem von Graf (2019).

Diese auf den ersten Blick theoretischen Ergebnisse haben weitreichende praktische Implikationen. Die Verwendung der falschen Methodik zur Bestimmung der durchschnittlichen Rendite führt in der Regel zu ökonomisch signifikanten Abweichungen: Für den DAX Performance Index von August 1988 bis Dezember 2019 ergibt sich eine Differenz zwischen dem arithmetischen Mittelwert und dem geometrischen Mittelwert in Höhe von 2,24 Prozentpunkten. Die Verwendung des geometrischen Mittels als Diskontsatz führt in diesem Zahlenbeispiel zu einer Fehlbepreisung eines ewigen (nicht wachsenden) erwarteten Zahlungsstroms von mehr als 30 %. Zur Ermittlung der erwarteten Rendite eines Vermögenswertes mithilfe des CAPM führt die Anwendung der bekannten Renditeglei-

---

<sup>2</sup>EU-Verordnung Nr. 1286/2014 vom 26.11.2014, Amtsblatt EU L 352 und Delegierte Verordnung (EU) 2017/653 vom 08.03.2017, Amtsblatt EU L 100/1.

chung als falsche Beziehung zwischen geometrischen Mittelwerten zu einer erheblichen Abweichung von mehr als 10 Prozentpunkten bei Vermögenswerten mit hohem idiosynkratischen Risiko. Für ein illustratives Partizipationszertifikat auf den DAX Performance Index mit einer empfohlenen Haltedauer von dreißig Jahren resultieren Performanzenwerte gemäß der Verordnung, die nur halb so groß sind wie die theoriekonsistenten Werte.

Dieser Teil der vorliegenden Dissertation ist wie folgt aufgebaut: Das nächste Kapitel rekapituliert bekannte Grundlagen zur Bestimmung von Renditen und führt die geometrische Brownsche Bewegung als den zugrunde liegenden Vermögenspreisprozess ein. In Kapitel 4 werden die Beziehungen zwischen der erwarteten diskreten und der erwarteten logarithmierten Rendite und den typischen Berechnungsmethoden zur Bestimmung der durchschnittlichen Rendite beschrieben. Der korrekte Diskontsatz für Vermögenspreise, die einer geometrischen Brownschen Bewegung folgen, wird in Kapitel 5 hergeleitet. In Kapitel 6 wird dargelegt, welche Definition der erwarteten Rendite sich auf die bedeutende Renditebeziehung im CAPM bezieht. Kapitel 7 befasst sich mit den Performanceszenarien von PRIIPs im Rahmen der Basisinformationsblätter. Kapitel 8 schließt mit einem Fazit.

# Kapitel 3

## Theoretischer Hintergrund

In diesem Kapitel werden zunächst die zugrunde gelegte Notation des vorliegenden Teils der Dissertation erläutert, bekannte Grundlagen zu diskreten und logarithmierten Renditen rekapituliert und die Beziehung zwischen der diskreten und logarithmierten Rendite herausgearbeitet. Abschließend wird die etablierte geometrische Brownsche Bewegung als Aktienpreisprozess eingeführt und anhand dieser die Beziehung zwischen der erwarteten diskreten Rendite und der erwarteten logarithmierten Rendite analysiert.

### 3.1 Renditegrundlagen

In dieser Dissertation bezeichnet  $T$  die Gesamtlänge eines betrachteten und in Jahren ausgedrückten Zeitraums, der aus insgesamt  $N$  Zeitschritten mit identischer Länge besteht. Entsprechend werden  $N + 1$  Zeitpunkte von Zeitpunkt  $t_0$  bis Zeitpunkt  $T$  betrachtet. Die Länge  $\Delta t$  eines jeden Zeitschritts, ausgedrückt in Jahren, ist somit durch

$$\Delta t = \frac{T}{N} \tag{3.1}$$

gegeben. Die Frequenz der betrachteten Zeitpunkte entspricht  $\frac{1}{\Delta t}$ . Des Weiteren wird  $n$  als der Zähler der beobachteten Zeitschritte mit Werten zwischen 1 und  $N$  definiert. Für

einen nicht dividendenzahlenden Vermögenswert mit Preis  $S_{n \cdot \Delta t}$  zum Zeitpunkt  $n \cdot \Delta t$  schreibt sich die diskrete Teilperiodenrendite  $r_{n,d}$  von Zeitpunkt  $(n-1) \cdot \Delta t$  bis  $n \cdot \Delta t$  als:

$$\begin{aligned} r_{n,d} &:= \frac{S_{n \cdot \Delta t} - S_{(n-1) \cdot \Delta t}}{S_{(n-1) \cdot \Delta t}} \\ &= \frac{S_{n \cdot \Delta t}}{S_{(n-1) \cdot \Delta t}} - 1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Entsprechend ist die stetige Rendite  $r_{n,log}$  über den Zeitschritt  $n$ , im Folgenden logarithmierte Rendite genannt, definiert als:

$$\begin{aligned} r_{n,log} &:= \ln \left( \frac{S_{n \cdot \Delta t}}{S_{(n-1) \cdot \Delta t}} \right) \\ &= \ln(S_{n \cdot \Delta t}) - \ln(S_{(n-1) \cdot \Delta t}). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Wie in zahlreichen grundlegenden Lehrbüchern zur Zeitreihenanalyse und in Finanzlehrbüchern beschrieben, bieten beide Renditedefinitionen praktische und vorteilhafte Eigenschaften in bestimmten Anwendungsfeldern (Tsay, 2005, S. 2 ff. und Schmid und Trede, 2006, S. 3 ff). Während logarithmierte Renditen im zeitlichen Verlauf additiv sind und sich die logarithmierte Rendite über die Gesamtlänge eines Zeitraums als Summe aller aufeinanderfolgenden Teilperiodenrenditen  $r_{n,log}$  bestimmen lässt, kann mit diskreten Renditen die Portfoliorendite als gewichtete Summe der Renditen der Einzelpositionen berechnet werden (Dorfleitner, 2002).

Da beide Renditedefinitionen in der Praxis Anwendung finden, wird an dieser Stelle die Größe der Differenz zwischen beiden Definitionen nähergehend betrachtet. Aus der Definition logarithmierter Renditen in Gleichung (3.3) kann durch Umstellen und Einsetzen der Definition diskreter Renditen aus Gleichung (3.2) die Beziehung zwischen beiden Renditedefinitionen wie folgt

$$\begin{aligned} r_{n,log} &= \ln \left( 1 + \frac{S_{n \cdot \Delta t}}{S_{(n-1) \cdot \Delta t}} - 1 \right) \\ &= \ln(1 + r_{n,d}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

hergeleitet werden, wobei  $1 + r_{n,d}$  die diskrete Bruttorendite eines Vermögenswertes bezeichnet.

**Tabelle 3.1: Renditedifferenz diskreter und logarithmierter Renditen**

Tabelle 3.1 zeigt die logarithmierten Renditen für gegebene Werte diskreter Renditen im Bereich von  $-20\%$  bis  $20\%$  gemäß Gleichung (3.4). Die Differenz entspricht der diskreten minus der entsprechenden logarithmierten Rendite und wird in Prozentpunkten angegeben.

Diskrete Rendite $r_{n,d}$	Logarithmierte Rendite $\ln(1 + r_{n,d})$	Differenz (Prozentpunkte)
$-20,00\%$	$-22,31\%$	2,31
$-15,00\%$	$-16,25\%$	1,25
$-10,00\%$	$-10,53\%$	0,54
$-5,00\%$	$-5,12\%$	0,13
$-2,00\%$	$-2,02\%$	0,02
$-1,00\%$	$-1,00\%$	0,01
$-0,50\%$	$-0,50\%$	0,00
$0,00\%$	$0,00\%$	—
$0,50\%$	$0,49\%$	0,00
$1,00\%$	$0,99\%$	0,00
$2,00\%$	$1,98\%$	0,02
$5,00\%$	$4,87\%$	0,12
$10,00\%$	$9,53\%$	0,47
$15,00\%$	$13,97\%$	1,02
$20,00\%$	$18,23\%$	1,77

Aus allgemein bekannten Eigenschaften logarithmierter Funktionen kann aus dem Zusammenhang aus Gleichung (3.4) abgeleitet werden, dass die logarithmierten Renditen bei von null verschiedenen Renditen kleiner sind als die jeweils korrespondierenden diskreten Renditen. Während bei einer Rendite von null beide Renditedefinitionen übereinstimmen, vergrößert sich der Unterschied, je weiter die Rendite von null entfernt ist. Um einen Eindruck von der Größenordnung der Abweichung beider Definitionen zu erhalten, werden in Tabelle 3.1 numerische Beispiele für Gleichung (3.4) aufgeführt. Für diskrete Renditen zwischen  $-20\%$  und  $20\%$  sind die entsprechenden logarithmierten Renditen und die jeweiligen Differenzen zwischen beiden Renditedefinitionen dargestellt.

Die Ergebnisse in Tabelle 3.1 bestätigen, dass die Unterschiede zwischen beiden Renditedefinitionen bei Renditen nahe null gering sind. Lediglich marginale Unterschiede von

bis zu 2 Basispunkten für diskrete Renditen zwischen  $-2\%$  und  $2\%$  sind festzustellen, entsprechend der Schlussfolgerung von Dorfleitner (2003). Renditen dieser Größe können als typische Tagesrenditen eingestuft werden. Dementsprechend sind bei der Berechnung von diskreten und logarithmierten Renditen auf täglicher oder höherer Frequenz auf den ersten Blick keine großen Unterschiede zwischen den Renditekonzepten erkennbar. Bei beispielsweise jährlichen Renditen hingegen, die sich durch Skalierung täglicher Renditen mit der Anzahl an Handelstagen pro Jahr bestimmen lassen, können die marginalen Unterschiede zu substantiellen Abweichungen zwischen beiden Renditedefinitionen führen. Tabelle 3.1 veranschaulicht, dass der resultierende Unterschied mit der betragsmäßigen Größe der Renditen ansteigt. Während sich die Differenz bei einer diskreten Rendite von  $5\%$  beziehungsweise  $-5\%$  auf 12 beziehungsweise 13 Basispunkte beläuft, beträgt die Abweichung bei einer Rendite von  $20\%$  und  $-20\%$  bereits 177 und 231 Basispunkte.

Die Ergebnisse verdeutlichen, dass bereits bei typischerweise beobachtbaren jährlichen Aktienrenditen und folglich auch bei Gesamrenditen, die die Renditen über mehrere Jahre erfassen, wesentliche Unterschiede zwischen beiden Definitionen bestehen. Zusammenfassend lässt sich festhalten:

**Resultat 1 (Beziehung zwischen diskreten und logarithmierten Renditen)**

*Während die Unterschiede zwischen diskreten und logarithmierten Renditen bei Renditen nahe null lediglich marginal sind, werden sie bei von null abweichenden Renditen substantiell. Dabei sind die logarithmierten Renditen stets kleiner als die entsprechenden diskreten Renditen für von null verschiedene Renditen.*

## 3.2 Geometrische Brownsche Bewegung

Ziel dieses Abschnitts ist die Einführung eines etablierten stochastischen Prozesses für Aktien oder Vermögenswerte, um die bekannten erwarteten Renditen mit vertrauten Durchschnittskennzahlen auf Basis des arithmetischen und geometrischen Mittels in Beziehung zu setzen. Zu diesem Zweck wird eine geometrische Brownsche Bewegung in kontinuierlicher Zeit verwendet, die unter anderem bei der Optionsbewertung nach Black und Scholes (1973) Anwendung findet. Die Länge des eingeführten Zeitschritts  $\Delta t$  aus dem vorherigen Abschnitt konvergiert dabei zu  $dt$ , das einen infinitesimal kleinen Zeitschritt bezeichnet

(Hull, 2017, S. 327). Der zugrunde liegende Prozess beschreibt die diskrete Rendite über dieses infinitesimal kurze Zeitintervall.

Unter der Annahme normalverteilter Renditen kann die stochastische Differentialgleichung in der gewohnten Weise geschrieben werden als:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_S \cdot dt + \sigma_S \cdot dz_t, \quad (3.5)$$

wobei  $\frac{dS_t}{S_t}$  den Charakter der diskreten Rendite eines Vermögenswertes über die Zeitperiode  $dt$  hat und  $\mu_S \cdot dt$  dem Drift oder der erwarteten diskreten Rendite pro Jahr (p.a.) linear skaliert auf die Länge der Teilperiode  $dt$  entspricht (Hull, 2017, S. 331). Die jährliche Volatilität der Renditen ist durch  $\sigma_S$  gegeben und  $z_t$  bezeichnet einen standardisierten Wiener-Prozess. Allgemein lässt sich der Erwartungswert  $\mathbb{E}(r_{n,d})$  der diskreten Rendite über eine beliebige Teilperiodenlänge  $\Delta t > 0$  vom Zeitpunkt  $t - \Delta t$  bis zum Zeitpunkt  $t$  mit  $t = n \cdot \Delta t$  wie folgt ausdrücken:

$$\mathbb{E}(r_{n,d}) = \mathbb{E}\left(\frac{S_t - S_{t-\Delta t}}{S_{t-\Delta t}}\right). \quad (3.6)$$

Wie später in Abschnitt 4.2 gezeigt und in Resultat 5 zusammengefasst wird, hängt die annualisierte erwartete Rendite von der Länge  $\Delta t$  der zugrunde liegenden Subperioden ab. In dem speziellen Fall, dass die Länge des Zeitschritts  $\Delta t$  gegen null geht, konvergiert die annualisierte erwartete Rendite  $\frac{\mathbb{E}(r_{n,d})}{\Delta t}$  gegen  $\mu_S$ . Daher kann an dieser Stelle bereits präzisiert werden, dass  $\mu_S$  die erwartete (annualisierte, kurzfristige) diskrete Rendite bezeichnet.

Die logarithmierte Rendite für diesen Prozess folgt aus Itos Lemma und kann durch die stochastische Differentialgleichung

$$d\ln(S_t) = \left(\mu_S - \frac{1}{2}\sigma_S^2\right) \cdot dt + \sigma_S \cdot dz_t \quad (3.7)$$

formuliert werden (Hull, 2017, S. 335). In dieser Darstellung hat  $d\ln(S)$  den Charakter der logarithmierten Rendite über den Zeitschritt der Länge  $dt$ . Durch Lösen der stochastischen Differentialgleichungen in Gleichung (3.5), oder äquivalent Gleichung (3.7),

resultiert die bekannte Darstellung für den Preis eines Vermögenswertes:

$$\tilde{S}_T = S_{t_0} \cdot e^{(\mu_S - \frac{1}{2}\sigma_S^2) \cdot T + \sigma_S \cdot \tilde{z}_T}. \quad (3.8)$$

Da die Inkremente des Wiener-Prozesses normalverteilt sind, impliziert Gleichung (3.8), dass der Aktienkurs  $\tilde{S}_T$  lognormalverteilt ist. Der Wiener-Prozess  $\tilde{z}_T$  weist dabei einen Mittelwert von null und eine Varianz von  $T$  auf. Analog zur erwarteten diskreten Rendite in Formel (3.6) kann der Erwartungswert der logarithmierten Rendite über eine Subperiode der Länge  $\Delta t$  wie folgt dargestellt werden:

$$\mathbb{E}(r_{n,\log}) = \mathbb{E}(\ln(S_t) - \ln(S_{t-\Delta t})). \quad (3.9)$$

Durch Substitution von  $S_t$  durch die prominente Formulierung des Aktienkurses aus Formel (3.8), unter Berücksichtigung der Subperiodenlänge  $\Delta t$ , lässt sich Formel (3.9) folgendermaßen schreiben:

$$\mathbb{E}(r_{n,\log}) = \mathbb{E}\left(\ln\left(S_{t-\Delta t} \cdot e^{(\mu_S - \frac{1}{2}\sigma_S^2) \cdot \Delta t + \sigma_S \cdot \tilde{z}_{\Delta t}}\right) - \ln(S_{t-\Delta t})\right).$$

Die Gleichung kann nun wie folgt vereinfacht werden:

$$\mathbb{E}(r_{n,\log}) = \mathbb{E}\left(\left(\mu_S - \frac{1}{2}\sigma_S^2\right) \cdot \Delta t + \sigma_S \cdot \tilde{z}_{\Delta t}\right)$$

und im Anschluss der Erwartungswert berechnet werden, wobei  $\mathbb{E}(\tilde{z}_{\Delta t}) = 0$ , sodass:

$$\mathbb{E}(r_{n,\log}) = \left(\mu_S - \frac{1}{2}\sigma_S^2\right) \cdot \Delta t. \quad (3.10)$$

Gleichung (3.10) bezeichnet die erwartete und linear angepasste logarithmierte Rendite für eine beliebige Länge  $\Delta t$  eines Zeitschritts. Die erwartete logarithmierte Rendite p.a. wird definiert als  $\mu_{\log S}$ , sodass die folgende Beziehung zwischen der erwarteten (kurzfristigen) diskreten und der erwarteten logarithmierten Rendite gilt:

$$\mu_{\log S} \cdot \Delta t := \left(\mu_S - \frac{1}{2}\sigma_S^2\right) \cdot \Delta t.$$

Zusammenfassend lässt sich festhalten:

**Resultat 2 (Verhältnis erwarteter diskreter und logarithmierter Renditen)**

Die (kurzfristige) annualisierte erwartete diskrete Rendite  $\mu_S$  übersteigt die annualisierte erwartete logarithmierte Rendite  $\mu_{\log S}$  um die Hälfte der jährlichen Varianz der Renditen:

$$\mu_S = \mu_{\log S} + \frac{1}{2}\sigma_S^2. \quad (3.11)$$

Bei einer positiven Volatilität der Renditen des zugrunde liegenden Vermögenswertes muss die erwartete diskrete Rendite  $\mu_S$  somit größer sein als die erwartete logarithmierte Rendite  $\mu_{\log S}$ . Die Differenz zwischen den beiden erwarteten Renditen nimmt dabei mit der Volatilität zu.

Um einen Eindruck über die Größenordnung der beiden erwarteten Renditedefinitionen und der Differenz zu erhalten, wird im Folgenden ein konkretes Zahlenbeispiel gegeben. Dazu wird die rechte Seite von Gleichung (3.11) anhand empirischer Daten geschätzt, sodass der Schätzer  $\hat{\mu}_S$  für die annualisierte erwartete diskrete Rendite anhand der Formel

$$\hat{\mu}_S = \hat{\mu}_{\log S} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_S^2 \quad (3.12)$$

bestimmt werden kann. Zur Berechnung des Schätzers  $\hat{\mu}_{\log S}$  für die annualisierte erwartete logarithmierte Rendite wird das arithmetische Mittel logarithmierter Renditen verwendet und zur Bestimmung des Schätzers  $\hat{\sigma}_S^2$  die bekannte Formel zur Berechnung der Stichprobenvarianz. Die Formeln lauten:

$$\hat{\mu}_{\log S} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N r_{n,\log} \cdot \frac{1}{\Delta t} \quad (3.13)$$

$$\hat{\sigma}_S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (r_{n,\log} - \hat{\mu}_{\log S} \cdot \Delta t)^2 \cdot \frac{1}{\Delta t}. \quad (3.14)$$

Zunächst soll geprüft werden, ob  $\hat{\mu}_{\log S}$  ein unverzerrter Schätzer für  $\mu_{\log S}$  darstellt, wenn die geometrische Brownsche Bewegung als der zugrunde gelegte Prozess unterstellt wird. Dazu wird der Erwartungswert des Schätzers  $\hat{\mu}_{\log S}$  aus Gleichung (3.13) bestimmt, was sich in einem ersten Schritt wie folgt liest:

$$\mathbb{E}(\hat{\mu}_{\log S}) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \tilde{r}_{n,\log} \cdot \frac{1}{\Delta t}\right). \quad (3.15)$$

Gemäß der eingeführten Notation bezüglich der Länge eines Zeitschritts aus Gleichung (3.1) und nach Einsetzen der Definition der logarithmierten Rendite aus Gleichung (3.3) kann Formel (3.15) ausgedrückt werden als:

$$\mathbb{E}(\hat{\mu}_{\log S}) = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^N \mathbb{E} \left( \ln \left( \frac{S_{n \cdot \Delta t}}{S_{(n-1) \cdot \Delta t}} \right) \right).$$

Nach Einsetzen des Aktienkurses aus Formel (3.8) für die beiden Zeitpunkte  $n \cdot \Delta t$  und  $(n-1) \cdot \Delta t$  sowie nach Vereinfachung unter Berücksichtigung, dass  $\tilde{z}_{n \cdot \Delta t} - \tilde{z}_{(n-1) \cdot \Delta t}$  ein Inkrement des Wiener-Prozesses über den Zeitschritt  $\Delta t$  bezeichnet und normalverteilt mit Mittelwert null und Varianz  $\Delta t$  ist, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\hat{\mu}_{\log S}) &= \frac{1}{T} \sum_{n=1}^N \mathbb{E} \left( \ln \left( \frac{S_{t_0} \cdot e^{(\mu_S - \frac{1}{2}\sigma_S^2) \cdot n \cdot \Delta t + \sigma_S \cdot \tilde{z}_{n \cdot \Delta t}}}{S_{t_0} \cdot e^{(\mu_S - \frac{1}{2}\sigma_S^2) \cdot (n-1) \cdot \Delta t + \sigma_S \cdot \tilde{z}_{(n-1) \cdot \Delta t}}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=1}^N \mathbb{E} \left( \left( \mu_S - \frac{1}{2}\sigma_S^2 \right) \cdot \Delta t + \sigma_S \cdot \left( \tilde{z}_{n \cdot \Delta t} - \tilde{z}_{(n-1) \cdot \Delta t} \right) \right) \\ &= \mu_S - \frac{1}{2}\sigma_S^2 \\ &= \mu_{\log S}. \end{aligned}$$

Zusammenfassend lässt sich festhalten:

**Resultat 3 (Eigenschaften des arithmetischen Mittels logarithmierter Renditen)** *Der Schätzer  $\hat{\mu}_{\log S}$ , der das annualisierte arithmetische Mittel der logarithmierten Renditen darstellt, ist ein unverzerrter Schätzer der erwarteten annualisierten logarithmierten Rendite  $\mu_{\log S}$ . Der Schätzer ist unabhängig von der betrachteten Teilperiodenlänge  $\Delta t$  der zugrunde liegenden Daten. Betrachtet man eine Stichprobe von Preisen von  $S_{t_0}$  bis  $S_T = S_{N \cdot \Delta t}$ , so ist  $\hat{\mu}_{\log S}$  fix und pfadunabhängig.*

Das illustrative Beispiel basiert auf den täglichen Schlusskursen des DAX Performance Index von August 1988 bis Dezember 2019. Die Zeitreihe entstammt der Datenbank Thomson Reuters Datastream. Es werden zunächst die ersten beiden Momente der historischen logarithmierten Renditen gemäß den Formeln (3.13) und (3.14) geschätzt, die unter Annahme von 240 Handelstagen pro Jahr annualisiert werden. Die erwartete logarithmierte Rendite  $\hat{\mu}_{\log S}$  beträgt 7,13 % und die Varianz  $\hat{\sigma}_S^2$  weist einen Wert von 4,47 % auf, was

einer Varianzkorrektur  $\frac{1}{2}\hat{\sigma}_S^2$  von 2,24 % entspricht. Nach Gleichung (3.12) ergibt sich ein Wert für die erwartete diskrete Rendite  $\hat{\mu}_S$  von 9,37 %.

So ergeben sich selbst bei Vermögenswerten oder Indizes mit üblicher Volatilität – wie die des DAX mit  $\hat{\sigma}_S = 21,15$  % – erhebliche numerische Unterschiede zwischen beiden Definitionen der erwarteten Rendite. Als Faustregel lässt sich festhalten, dass eine Volatilität von 20 % p.a. eine Differenz zwischen der erwarteten annualisierten diskreten Rendite  $\hat{\mu}_S$  und der logarithmierten Rendite  $\hat{\mu}_{logS}$  von 2 Prozentpunkten impliziert. Das konservativ gewählte Beispiel impliziert, dass die Differenz bei vielen Einzelaktien sogar deutlich stärker ausgeprägt ist, da die Varianzkorrektur mit der Volatilität des zugrunde liegenden Vermögenswertes ansteigt: Für eine für Einzelaktien durchaus häufig zu beobachtende Volatilität von 30 % resultiert bereits in einer Differenz von 4,5 Prozentpunkten. Ebenso fällt die Differenz größer aus, wenn die erwarteten Renditen als Gesamtrenditen über mehrere Jahre ausgedrückt werden.

# Kapitel 4

## Arithmetisches und geometrisches Mittel diskreter Renditen

Mit der geometrischen Brownschen Bewegung, die im vorherigen Abschnitt als zugrunde liegender Aktienpreisprozess eingeführt wurde, kann im Folgenden der Frage nachgegangen werden, wie sowohl die erwartete diskrete Rendite  $\mu_S$  als auch die erwartete logarithmierte Rendite  $\mu_{\log S}$  zu den typischen Berechnungsmethoden zur Bestimmung der Durchschnittsrendite – dem arithmetischen und geometrischen Mittel diskreter Renditen – im Verhältnis stehen.

### 4.1 Geometrisches Mittel diskreter Renditen

Zunächst werden die Eigenschaften des geometrischen Mittels diskreter Renditen analysiert und mit den Schätzern für die erwartete Rendite  $\mu_S$  und  $\mu_{\log S}$  des betrachteten Aktienpreisprozesses aus dem vorherigen Kapitel in Beziehung gesetzt. Unter Berücksichtigung der eingeführten Notation kann das annualisierte geometrische Mittel  $\bar{r}_{geo}$  auf Basis der Frequenz  $\frac{1}{\Delta t}$  der vorliegenden Renditezeitreihe wie folgt bestimmt werden:

$$\bar{r}_{geo} = \sqrt[N]{\prod_{n=1}^N (1 + r_{n,d})} - 1. \quad (4.1)$$

Das geometrische Mittel  $\bar{r}_{geo}$  ist somit als die konstante (diskret aufzinsende) Rendite jeder Subperiode  $n$  definiert, die bei gegebenem Anfangskurs  $S_{t_0}$  den gegebenen Endkurs  $S_{N \cdot \Delta t}$  wie folgt in Relation setzt:

$$S_{t_0} \cdot (1 + \bar{r}_{geo})^{N \cdot \Delta t} = S_{N \cdot \Delta t}.$$

Die Beziehung zwischen dem geometrischen Mittel  $\bar{r}_{geo}$  der diskreten Renditen und dem Schätzer  $\hat{\mu}_{logS}$  für die erwartete logarithmierte Rendite kann wie folgt hergeleitet werden. Zu diesem Zweck wird zunächst die logarithmierte Darstellungsweise  $\bar{r}_{log-geo}$  des geometrischen Mittels  $\bar{r}_{geo}$  betrachtet, die lautet:

$$\bar{r}_{log-geo} := \ln(1 + \bar{r}_{geo}).$$

Nach Substitution von  $\bar{r}_{geo}$  durch den Ausdruck in Gleichung (4.1) und anschließender Vereinfachung des resultierenden Terms unter Berücksichtigung der Beziehung zwischen der diskreten und logarithmierten Rendite aus Gleichung (3.4) kann gezeigt werden, dass:

$$\begin{aligned} \bar{r}_{log-geo} &= \ln \left( 1 + \sqrt[T]{\prod_{n=1}^N (1 + r_{n,d})} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{T} \ln \left( \prod_{n=1}^N (1 + r_{n,d}) \right) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=1}^N \ln(1 + r_{n,d}) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=1}^N r_{n,log} \\ &= \hat{\mu}_{logS}. \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist zusammengefasst in:

**Resultat 4 (Eigenschaften des geometrischen Mittels diskreter Renditen)** *Die logarithmierte Darstellung  $\bar{r}_{log-geo}$  des geometrischen Mittels diskreter Renditen entspricht dem linear annualisierten arithmetischen Mittel  $\hat{\mu}_{logS}$  logarithmierter Renditen. Gemäß Resultat 1 aus Abschnitt 3.1 ist das geometrische Mittel  $\bar{r}_{geo}$  der diskreten Renditen eng*

mit  $\bar{r}_{\log\text{-geo}}$  verwandt und konvergiert von oben gegen die erwartete logarithmierte Rendite  $\mu_{\log S}$  für Renditen, die sich null nähern. Dieses Ergebnis kann wie folgt zusammengefasst werden:

$$\bar{r}_{\text{geo}} \gtrsim \bar{r}_{\log\text{-geo}} \longrightarrow \mu_{\log S}.$$

## 4.2 Arithmetisches Mittel diskreter Renditen

Nach dem geometrischen Mittel diskreter Renditen wird im Folgenden das arithmetische Mittel diskreter Renditen betrachtet. Dazu wird das jährliche arithmetische Mittel  $\bar{r}_a$  diskreter Renditen als Durchschnitt linear annualisierter Teilperiodenrenditen  $r_{n,d} \cdot \frac{1}{\Delta t}$  wie folgt berechnet:

$$\bar{r}_a = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N r_{n,d} \cdot \frac{1}{\Delta t}. \quad (4.2)$$

Wie zuvor für den Schätzer des arithmetischen Mittels logarithmierter Renditen wird hier zunächst die Unverzerrtheit des arithmetischen Mittels diskreter Renditen untersucht. Das heißt, es wird überprüft, ob  $\bar{r}_a$  einen unverzerrten Schätzer für die erwartete diskrete Rendite  $\mu_S$  eines Vermögenswertes darstellt, dessen Aktienpreis einer geometrischen Brownschen Bewegung folgt. Zunächst werden die Erwartungen des arithmetischen Mittels in Gleichung (4.2) genommen und die Definition der diskreten Renditen aus Gleichung (3.2) eingesetzt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\bar{r}_a) &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbb{E}(\tilde{r}_{n,d}) \cdot \frac{1}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbb{E} \left( \frac{\tilde{S}_{n \cdot \Delta t}}{\tilde{S}_{(n-1) \cdot \Delta t}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{\Delta t}. \end{aligned}$$

Der Ausdruck für den Preis des Vermögenswertes aus Gleichung (3.8) wird für die entsprechenden Zeitpunkte eingesetzt, sodass:

$$\mathbb{E}(\bar{r}_a) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbb{E} \left( \frac{S_{t_0} \cdot e^{(\mu_S - \frac{1}{2}\sigma_S^2) \cdot n \cdot \Delta t + \sigma_S \cdot \tilde{z}_{n \cdot \Delta t}}}{S_{t_0} \cdot e^{(\mu_S - \frac{1}{2}\sigma_S^2) \cdot (n-1) \cdot \Delta t + \sigma_S \cdot \tilde{z}_{(n-1) \cdot \Delta t}}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{\Delta t}.$$

Nach Vereinfachung des Terms ergibt sich:

$$\mathbb{E}(\bar{r}_a) = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^N \mathbb{E} \left( e^{(\mu_S - \frac{1}{2}\sigma_S^2) \cdot \Delta t + \sigma_S \cdot (\tilde{z}_{n \cdot \Delta t} - \tilde{z}_{(n-1) \cdot \Delta t})} - 1 \right), \quad (4.3)$$

wobei der Exponent der Exponentialfunktion, charakterisiert durch das Inkrement eines Wiener-Prozesses, normalverteilt ist. Um den Erwartungswert der Gleichung (4.3) zu berechnen, kann die fundamentale Beziehung, dass das Exponential  $e^Z$  einer normalverteilten Variablen  $Z$  mit Mittelwert  $a$  und Standardabweichung  $b$  lognormalverteilt ist, genutzt werden. Der Erwartungswert von  $e^Z$  ist dann durch

$$\mathbb{E} \left( e^Z \right) = e^{\mathbb{E}(Z) + \frac{1}{2} \text{Var}(Z)} = e^{a + \frac{1}{2} b^2} \quad (4.4)$$

gegeben. Abbildung 4.1 veranschaulicht diesen Effekt und zeigt die Werte der lognormalverteilten Variablen  $e^Z$  in Abhängigkeit von der normalverteilten Variablen  $Z$ . Die Beziehung zwischen beiden Variablen wird durch die konvexe Funktion charakterisiert. Für negative und positive Abweichungen  $\Gamma$  vom Mittelwert  $a$  der Variablen  $Z$  zeigt sich, dass der Mittelwert von  $e^{a-\Gamma}$  und  $e^{a+\Gamma}$  auf der Verbindungslinie  $\frac{1}{2}e^{a-\Gamma} + \frac{1}{2}e^{a+\Gamma}$  oberhalb des Wertes  $e^a$  liegt. Aufgrund der Konvexität hat der Mittelwert von  $e^Z$  für jedes beliebige Paar symmetrischer Abweichungen von  $a$  einen Mittelwert gleich  $\frac{1}{2} \left( e^{a-\Gamma} + e^{a+\Gamma} \right) > e^a$ . Es folgt, dass bei der Bestimmung des Erwartungswertes einer lognormalverteilten Variablen – wie von  $e^Z$  in Gleichung (4.4) – die Konvexitätskorrektur berücksichtigt werden muss. Die Intuition dabei ist, dass für eine negative Abweichung  $-\Gamma$  der Verlust der stochastischen Variablen  $e^a - e^{a-\Gamma}$  geringer ist als der entsprechende Gewinn  $e^{a+\Gamma} - e^a$  für ein symmetrisches, aber positives Ergebnis der Variablen  $Z$ .

Als Ergebnis dieser Darlegung kann nun die Eigenschaft, dass

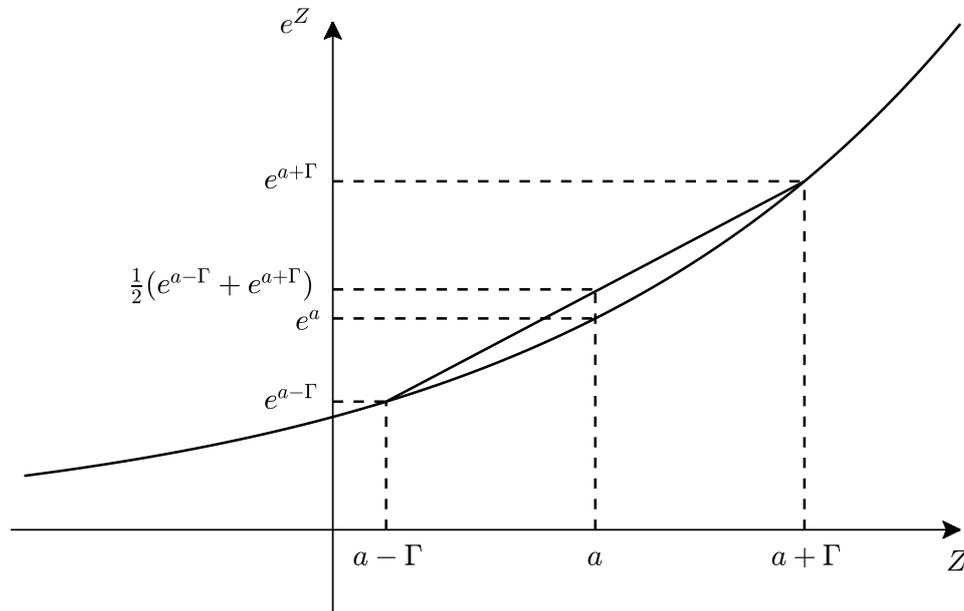
$$\mathbb{E} \left( e^{\sigma_S \cdot (\tilde{z}_{n \cdot \Delta t} - \tilde{z}_{(n-1) \cdot \Delta t})} \right) = e^{\frac{1}{2}\sigma_S^2 \cdot \Delta t}$$

genutzt werden, um den Erwartungswert in Gleichung (4.3) wie folgt zu berechnen:

$$\mathbb{E}(\bar{r}_a) = \frac{1}{T} \left( \sum_{n=1}^N e^{(\mu_S - \frac{1}{2}\sigma_S^2) \cdot \Delta t + \frac{1}{2}\sigma_S^2 \cdot \Delta t} - 1 \right).$$

**Abbildung 4.1: Konvexitätskorrektur**

Abbildung 4.1 zeigt die Werte der lognormalverteilten Variablen  $e^Z$  als Funktion der normalverteilten Variablen  $Z$ .



Die Gleichung kann unter Beachtung der eingeführten Notation für die Länge  $\Delta t$  einer Subperiode wie folgt umgeformt werden:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\bar{r}_a) &= \frac{1}{T} \left( \sum_{n=1}^N e^{\mu_S \cdot \Delta t} - 1 \right) \\ &= \frac{N}{T} \cdot (e^{\mu_S \cdot \Delta t} - 1) \\ &= \frac{e^{\mu_S \cdot \Delta t} - 1}{\Delta t}.\end{aligned}$$

Aus der Gleichung lässt sich schlussfolgern, dass der Schätzer  $\bar{r}_a$  von der Länge  $\Delta t$  der Subperiode abhängt und  $\mathbb{E}(\bar{r}_a)$  für eine Subperiodenlänge  $\Delta t > 0$  nicht der erwarteten diskreten Rendite  $\mu_S$  entspricht. Mithilfe der Regel von de l'Hospital<sup>3</sup> kann gezeigt

<sup>3</sup>vgl. Taylor (1952), S. 20 f.

werden, dass für eine infinitesimale Teilperiodenlänge  $\Delta t$  gilt:<sup>4</sup>

$$\mathbb{E}(\bar{r}_a) = \frac{e^{\mu_S \cdot \Delta t} - 1}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \mu_S,$$

sodass  $\bar{r}_a$  einen unverzerrten Schätzer von  $\mu_S$  für ein unendlich kleines Zeitintervall der Länge  $\Delta t$  darstellt. Dieses Ergebnis steht im Gegensatz zu Resultat 3, demzufolge das arithmetische Mittel der logarithmierten Renditen einen unverzerrten Schätzer der erwarteten logarithmierten Rendite  $\mu_{\log S}$  unabhängig von der Länge  $\Delta t$  der betrachteten Teilperioden darstellt. Dieses Ergebnis ist im folgenden Resultat zusammengefasst:

### Resultat 5 (Eigenschaften des arithmetischen Mittels diskreter Renditen)

*Der Schätzer für das linear annualisierte arithmetische Mittel diskreter Renditen entspricht im Grenzfall der annualisierten erwarteten diskreten Rendite  $\mu_S$ , wenn die Länge  $\Delta t$  der Subperioden gegen null geht:*

$$\bar{r}_a \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \mu_S.$$

Zur Veranschaulichung der theoretischen Ergebnisse soll erneut ein Zahlenbeispiel herangezogen werden. Tabelle 4.1 zeigt dazu Schätzer, die auf Basis unterschiedlicher Frequenzen aus der Zeitreihe des DAX Performance Index bestimmt werden. Berücksichtigt werden dabei tägliche, wöchentliche, monatliche und jährliche Schlusskurse. Es wird erneut von einer Anzahl von 240 Handelstagen pro Jahr ausgegangen. Durch Abweichen von der typischen Konvention von 250 oder 252 Handelstagen pro Jahr folgt, dass ein Monat vier Wochen mit je fünf Handelstagen pro Woche umfasst.

Das annualisierte geometrische Mittel  $\bar{r}_{geo}$  ist unabhängig von der Frequenz der beobachteten Renditen und weist einen Wert von 7,40 % auf. Das arithmetische Mittel logarithmierter Renditen  $\hat{\mu}_{\log S}$ , das mit der logarithmierten Darstellung des geometrischen Mittels übereinstimmt, beträgt 7,13 %. Wie die theoretische Analyse gezeigt hat, existieren zwei Möglichkeiten zur Schätzung der erwarteten diskreten Rendite  $\mu_S$  – zum einen auf

<sup>4</sup>Unter Anwendung der Regel von de l'Hospital können die Ableitungen der Terme im Zähler und im Nenner wie folgt geschrieben werden:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mu_S \cdot e^{\mu_S \cdot \Delta t}}{1}.$$

**Tabelle 4.1: Schätzer für verschiedene Frequenzen**

Tabelle 4.1 zeigt Schätzer für unterschiedliche Frequenzen auf Basis der Schlusskurse des DAX Performance Index von August 1988 bis Dezember 2019. Es werden tägliche, wöchentliche, monatliche und jährliche Preisfrequenzen berücksichtigt. Per Annahme besteht ein Jahr aus 240 Handelstagen, woraus folgt, dass ein Jahr 48 Wochen mit fünf Handelstagen pro Woche umfasst.  $\bar{r}_a$  bezeichnet das arithmetische Mittel der diskreten Renditen. Der Schätzer der erwarteten Rendite  $\hat{\mu}_S$  wird gemäß Gleichung (3.12) als  $\hat{\mu}_S = \hat{\mu}_{\log S} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_S^2$  berechnet, wobei  $\hat{\sigma}_S^2$  die Varianz der logarithmierten Renditen p.a. bezeichnet. Die Abweichung bezieht sich auf die Differenz zwischen  $\bar{r}_a$  und  $\hat{\mu}_S$  und wird in Basispunkten angegeben.  $\bar{r}_{geo}$  bezeichnet das geometrische Mittel diskreter Renditen und  $\hat{\mu}_{\log S}$  ist die geschätzte erwartete logarithmierte Rendite, die sich aus dem arithmetischen Mittel der logarithmierten Renditen gemäß Gleichung (3.13) berechnet. Der Schätzer ist äquivalent zur logarithmierten Darstellung des geometrischen Mittels  $\bar{r}_{\log-geo}$ .

	$\bar{r}_a$	$\hat{\mu}_S$	Abweichung (Basispunkte)	$\bar{r}_{geo}$	$\hat{\mu}_{\log S}$	$\hat{\sigma}_S^2$
Tägliche Preise	9,3694 %	9,3704 %	-0,10	7,3955 %	7,1348 %	4,4712 %
Wöchentliche Preise	9,3910 %	9,3960 %	-0,49	7,3955 %	7,1348 %	4,5223 %
Monatliche Preise	9,3386 %	9,3640 %	-2,54	7,3955 %	7,1348 %	4,2141 %
Jährliche Preise	9,6906 %	9,5007 %	18,99	7,3955 %	7,1348 %	4,4984 %

Basis diskreter und zum anderen auf Basis logarithmierter Renditen. Der aus dem arithmetischen Mittel  $\bar{r}_a$  diskreter Renditen abgeleitete Schätzer wird dabei mit dem Schätzer  $\hat{\mu}_S = \hat{\mu}_{\log S} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_S^2$  auf Grundlage logarithmierter Renditen aus Gleichung (3.12) verglichen. Während  $\hat{\mu}_{\log S}$  unabhängig von der Schätzfrequenz ist, hängt der Schätzer der Varianz  $\hat{\sigma}_S^2$  der logarithmierten Renditen von der zugrunde gelegten Frequenz ab. Die Werte des Schätzers für die erwartete diskrete Rendite  $\hat{\mu}_S$  liegen dabei zwischen 9,36 % und 9,50 % für die berücksichtigten Frequenzen. Bei der Verwendung des arithmetischen Mittels  $\bar{r}_a$  diskreter Renditen zur Schätzung von  $\mu_S$  variieren die entsprechenden Werte zwischen 9,34 % und 9,69 %.

Die resultierenden Abweichungen zwischen den Werten beider Ansätze zur Herleitung der erwarteten diskreten Rendite  $\mu_S$  sind zusätzlich in Tabelle 4.1 dargestellt. Werden die Schätzungen auf der Grundlage von Tagespreisen vorgenommen, so ergibt sich eine marginale Abweichung von deutlich weniger als einem Basispunkt. Die Ungenauigkeit steigt mit der Länge  $\Delta t$  der betrachteten Teilperioden. Auf Grundlage jährlicher Kursdaten wird eine hohe Abweichung von 19 Basispunkten erreicht. Es folgt, dass die Schätzung von  $\mu_S$  unbedingt auf Daten mit höherer Frequenz, vorzugsweise auf Tagespreisen, beruhen sollte. In diesem Fall stimmen  $\bar{r}_a$  und  $\hat{\mu}_S$  für praktische Zwecke überein.

# Kapitel 5

## Der korrekte Diskontsatz

Mit den Erkenntnissen aus den vorherigen Kapiteln, die das Verhältnis sowohl der erwarteten diskreten Rendite  $\mu_S$  als auch der erwarteten logarithmierten Rendite  $\mu_{\log S}$  zu den typischen Berechnungsmethoden der Durchschnittsrendite zeigen, werden in den folgenden Kapiteln nun konkrete Anwendungsfälle betrachtet. Im vorliegenden Kapitel wird die geforderte Rendite von Investoren hergeleitet, die zur angemessenen Diskontierung der erwarteten Preise von Vermögenswerten oder der erwarteten Zahlungsströme verwendet wird, um den fairen Wert von Vermögenswerten zu bestimmen. In der Praxis geht es um die Frage, ob die erwartete diskrete Rendite  $\mu_S$  (approximiert durch das arithmetische Mittel  $\bar{r}_a$  der diskreten Renditen) oder die erwartete logarithmierte Rendite  $\mu_{\log S}$  (approximiert durch das geometrische Mittel  $\bar{r}_{geo}$  der diskreten Renditen) dem korrekten Diskontsatz entspricht. Gemäß der (einperiodigen) DCF-Bewertung muss der Barwert  $S_{t_0}$  den erwarteten Zahlungsströmen  $\mathbb{E}(S_T)$  entsprechen, die mit dem zugehörigen (stetigen) Diskontsatz  $y$  abgezinst werden. Dies lässt sich wie folgt ausdrücken:

$$S_{t_0} \stackrel{!}{=} e^{-y \cdot T} \cdot \mathbb{E}(\tilde{S}_T). \quad (5.1)$$

Gleichung (5.1) kann nun nach  $y$  gelöst werden, sodass der Diskontsatz wie folgt ausgedrückt werden kann:

$$y = \frac{1}{T} \cdot \ln \left( \frac{\mathbb{E}(\tilde{S}_T)}{S_{t_0}} \right).$$

Setzt man den aus der geometrischen Brownschen Bewegung resultierenden Vermögenspreis zum Zeitpunkt  $T$  aus Gleichung (3.8) für  $S_T$  ein, erhält man:

$$y = \frac{1}{T} \cdot \ln \left( \frac{\mathbb{E} \left( S_{t_0} \cdot e^{(\mu_S - \frac{1}{2}\sigma_S^2) \cdot T + \sigma_S \cdot \tilde{z}_T} \right)}{S_{t_0}} \right),$$

wobei sich die Gleichung nach Berechnung des Erwartungswertes unter Berücksichtigung der Varianzkorrektur gemäß Formel (4.4) wie folgt schreiben und vereinfachen lässt:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{T} \cdot \ln \left( e^{(\mu_{\log S} + \frac{1}{2}\sigma_S^2) \cdot T} \right) \\ &= \mu_{\log S} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 = \mu_S. \end{aligned}$$

Es folgt, dass das arithmetische Mittel  $\bar{r}_a$  der diskreten Renditen, das für kurze Subperioden mit Länge  $\Delta t$  (beispielsweise einem Tag) gegen  $\mu_S$  konvergiert, den geeigneten Diskontsatz darstellt und nicht das geometrische Mittel  $\bar{r}_{geo}$ , das eng mit der erwarteten logarithmierten Rendite  $\mu_{\log S}$  verwandt ist. Das Ergebnis lässt sich wie folgt zusammenfassen:

**Resultat 6 (Der korrekte Diskontsatz)** *Die annualisierte erwartete diskrete Rendite  $\mu_S$  ist die geforderte Rendite von Investoren und stellt den korrekten Zinssatz dar, der zum Diskontieren, beispielsweise von erwarteten Zahlungsströmen zur Bestimmung des fairen Wertes von Vermögenswerten, zu verwenden ist.*

Wird fälschlicherweise die erwartete logarithmierte Rendite  $\mu_{\log S}$  als Diskontsatz – ohne die erforderliche Varianzkorrektur – verwendet, so wird der resultierende Vermögenspreis  $S_{t_0}$  überschätzt. Um die Auswirkungen auf die Bewertung abzuschätzen, wird das folgende Zahlenbeispiel herangezogen: Es wird ein ewiger Zahlungsstrom in Höhe von 100 Euro pro Jahr unterstellt. Der entsprechende Barwert  $PV_{t_0}$  des unendlichen Stroms erwarteter Zahlungen wird durch Diskontierung der Zahlungen mit dem kontinuierlichen Zinssatz  $y$  bestimmt. Der Barwert des ewigen Zahlungsstroms mit  $t_0 = 0$  schreibt sich wie folgt:

$$PV_{t_0} = \int_{t_0}^T \frac{100}{e^{y \cdot t}} dt \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{100}{y}.$$

Zur Veranschaulichung der Bewertungsunterschiede bei Verwendung des inkorrekten Diskontsatzes wird der Barwert des Zahlungsstroms sowohl auf Basis der annualisierten erwarteten diskreten Rendite  $\mu_S$  als auch der logarithmierten Rendite  $\mu_{logS}$  bestimmt. Als Werte für die beiden erwarteten Renditen werden die Parameter des DAX Performance Index aus dem vorherigen Beispiel in Tabelle 4.1 herangezogen. Mit dem Schätzer  $\hat{\mu}_S$  der annualisierten erwarteten diskreten Rendite als Diskontsatz  $y$  wird der korrekte Wert  $PV_{t_0}$  wie folgt berechnet:

$$PV_{t_0} = \frac{100}{9,37\%} = 1.067.$$

Der fehlerhafte Preis  $PV'_{t_0}$  unter Anwendung von  $\hat{\mu}_{logS}$  als Diskontsatz  $y$  ist gegeben durch:

$$PV'_{t_0} = \frac{100}{7,13\%} = 1.402.$$

Die Differenz zwischen dem korrekten und dem unzutreffenden Diskontsatz von ca. 2 Prozentpunkten führt zu einer Bewertungsdifferenz von 335 Euro, was einem prozentualen Unterschied von rund 31 % entspricht. Das Ergebnis zeigt, dass die Anwendung der erwarteten logarithmierten Rendite  $\mu_{logS}$  beziehungsweise des eng verwandten geometrischen Mittels  $\bar{r}_{geo}$ , zu erheblich nach oben verzerrten Vermögenspreisen im Rahmen der DCF-Bewertung führt.

Mit Blick auf das DAX Rendite-Dreieck des Deutschen Aktieninstituts<sup>5</sup>, das den geometrischen Mittelwert  $\bar{r}_{geo}$  über verschiedene Anlagehorizonte ausweist, zeigt sich nun, dass  $\bar{r}_{geo}$  sowohl zu Diskontierungszwecken sowie als Indikator für die zukünftige erwartete Performance irreführend ist: Erstens würden die angegebenen Größen hinsichtlich der DCF-Bewertung zu niedrige geforderte Renditen implizieren, um die Preise für die gegebenen Erwartungen zu rechtfertigen. Zweitens ist die durchschnittliche Rendite, die ein Investor erzielt, unter Performancegesichtspunkten  $\mathbb{E}(S_T) = S_{t_0} \cdot e^{\mu_S \cdot T}$  und damit höher als die erwartete logarithmierte Rendite  $\mu_{logS}$  beziehungsweise das geometrische Mittel  $\bar{r}_{geo}$ , die mit der Varianzkorrektur korrigiert werden müssen.

---

<sup>5</sup>vgl. Deutsches Aktieninstitut (2022).

# Kapitel 6

## Capital Asset Pricing Model

In diesem Kapitel wird die prominente CAPM-Beziehung hergeleitet, wobei das Hauptaugenmerk wie bereits im vorherigen Kapitel auf der zugrunde liegenden Definition der erwarteten Rendite liegt. Diese Herleitung geht der Frage nach, ob sich die bedeutende Renditebeziehung des CAPM auf die erwartete diskrete Rendite eines Vermögenswertes  $\mu_S$  und des Marktportfolios  $\mu_M$  oder auf die erwarteten logarithmierten Renditen  $\mu_{\log S}$  und  $\mu_{\log M}$  stützt.

In der Praxis gibt es Verfechter beider Ansichten. Damodaran (2013) vertritt die Ansicht, dass zumindest in der Unternehmensfinanzierung und -bewertung das Argument für die Verwendung geometrischer Durchschnittsprämien als Schätzer stark sei (Damodaran, 2013, S. 367). Ähnlich vertreten Koller et al. (2015) die Auffassung, dass das arithmetische Mittel diskreter Renditen zu einer nach oben verzerrten Marktrisikoprämie führe. Beide Publikationen beziehen sich dabei auf die Schätzung der jährlichen erwarteten Rendite für mehrjährige Zeiträume. Unter der Annahme, dass die jährliche erwartete Rendite nicht bekannt sei und Aktienrenditen eine negative Autokorrelation aufweisen, schlussfolgern die Autoren, dass die Marktrisikoprämie in einem Bereich zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel liege. Demgegenüber stehen Vertreter, die das arithmetische Mittel diskreter Renditen für die richtige Schätzung halten. Brealey et al. (2011) sind der Auffassung, dass arithmetische und nicht geometrische Durchschnittsrenditen verwendet werden sollten, wenn die Kapitalkosten aus historischen Renditen oder Risikoprämien geschätzt werden (Brealey et al., 2011, S. 159). Darüber hinaus argumentiert Cooper (1996), dass das arithmetische Mittel dem korrekten Diskontsatz beispielsweise

zur Unternehmensbewertung nur dann entspreche, wenn die wahre erwartete Rendite bekannt sei und keiner Schätzung zugrunde liege und andernfalls einen nach unten verzerrten Schätzer darstelle. Um für entsprechend nach oben verzerrte Bewertungen im Rahmen einer DCF-Analyse zu korrigieren, schlagen Breuer et al. (2014) vor, zwar das arithmetische Mittel diskreter Renditen zu verwenden – zur Bestimmung des Endwertes allerdings keine ewigen (wachsenden) Zahlungsströme zu unterstellen, sondern lediglich dreißig bis fünfzig Perioden zu berücksichtigen (Breuer et al., 2014, S. 570).

In der Praxis ist zu beobachten, dass zur Herleitung der Marktrisikoprämie häufig ein Proxy für die erwartete Marktrendite verwendet wird, der unterhalb des arithmetischen Mittels der diskreten Renditen liegt. Der Fachausschuss für Unternehmensbewertung und Betriebswirtschaft (FAUB) des Instituts der Wirtschaftsprüfer (IDW) schlägt in Übereinstimmung mit Stehle (2004) einen festen Abschlag auf die empirisch geschätzte erwartete Rendite diskreter Renditen vor. Das IDW veröffentlicht regelmäßig eine empfohlene Bandbreite von geeigneten Werten für die entsprechend ermittelte Marktrisikoprämie (Institut der Wirtschaftsprüfer, 2019). Eine Studie von KPMG (2019) zeigt, dass die von deutschen Unternehmen in der Praxis verwendete Marktrisikoprämie innerhalb der vorgegebenen Bandbreite des IDW und somit zwischen den Schätzungen für die erwarteten diskreten und erwarteten logarithmierten Renditen liegt.

## 6.1 Beweis des CAPM

Für den Beweis des CAPM mitsamt expliziter Herleitung der korrekten erwarteten Renditedefinition innerhalb des Modells wird ein konsumbasiertes Framework verwendet, das dem von Huang und Litzenberger (1988) und Cochrane (2009) ähnelt. Es wird eine einperiodige reine Tauschwirtschaft mit den Zeitpunkten  $t = 0$  und  $t = 1$  betrachtet. Zu beiden Zeitpunkten existieren Einheiten eines einzigen verderblichen Konsumguts. Für eine gegebene Gesamtausstattung des Guts wählen die Individuen in der Ökonomie ihren optimalen Konsum zum Zeitpunkt  $t = 0$  und zustandsabhängige Konsumansprüche für den Zeitpunkt  $t = 1$ .

Die Ökonomie ist darüber hinaus durch Unsicherheit über den Zustand der Ökonomie zum Zeitpunkt  $t = 1$  gekennzeichnet. Individuen verfügen dabei über eine homogene Wahrscheinlichkeitsabschätzung für das Auftreten eines Zustands  $\omega$  aller möglichen Zustände

$\Omega$  im Zeitpunkt  $t = 1$ , die als  $\pi_\omega$  bezeichnet wird. Außerdem wird von einer zeit-additiven und zustandsunabhängigen Nutzenfunktion ausgegangen, die mit dem Konsum steigt und streng konkav ist. Diesen Kriterien entsprechend wird für die Individuen im Folgenden eine logarithmierte Nutzenfunktion herangezogen. In der Wettbewerbsökonomie kann des Weiteren ein repräsentativer Agent für Bewertungszwecke herangezogen werden, dessen Ausstattung der Gesamtausstattung aller Individuen entspricht. Somit kann der lebenslange Nutzen des repräsentativen Agenten wie folgt

$$\begin{aligned} u(C_0, C_\omega) &= u_0(C_0) + \delta \cdot u_1(C_\omega) \\ &= \ln(C_0) + \delta \cdot \ln(C_\omega) \end{aligned} \quad (6.1)$$

ausgedrückt werden, wobei  $C_0$  den aggregierten Konsum zum Zeitpunkt  $t = 0$  bezeichnet, der exogen gegeben ist und durchgehend als Numeraire dient.  $C_\omega$  bezeichnet den aggregierten Konsum im Zustand  $\omega$  zum Zeitpunkt  $t = 1$ . In Anlehnung an Cochrane (2009) wird ein Diskontfaktor  $\delta$  berücksichtigt, der die Ungeduld der Investoren abbildet. Als prominentes Ergebnis folgt, dass der Preis  $\phi_\omega$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  einer zustandsabhängigen Forderung für eine Einheit des Konsums im Zustand  $\omega$  durch

$$\phi_\omega = \delta \cdot \frac{\pi_\omega u'_1(C_\omega)}{u'_0(C_0)}, \quad \text{für } \omega \in \Omega \quad (6.2)$$

gegeben ist. Der Preis  $S_0$  eines Vermögenswertes zum Zeitpunkt  $t = 0$ , mit der Zahlung  $e^{x_{S\omega}}$  im Zustand  $\omega$  zum Zeitpunkt  $t = 1$ , ergibt sich dann aus dem gewichteten Durchschnitt der Zahlungen  $e^{x_{S\omega}}$  mit den entsprechenden Zustandspreisen  $\phi_\omega$  als:

$$S_0 = \sum_{\omega \in \Omega} \phi_\omega e^{x_{S\omega}}. \quad (6.3)$$

Setzt man den Ausdruck für  $\phi_\omega$  aus Gleichung (6.2) in Gleichung (6.3) ein, so ergibt sich die bekannte fundamentale Gleichung zur Bewertung von Vermögenswerten:

$$S_0 = \mathbb{E} \left( \delta \cdot \frac{u'_1(\tilde{C})}{u'_0(C_0)} e^{\tilde{x}_S} \right), \quad (6.4)$$

wobei  $\tilde{C}$  und  $\tilde{S} = e^{\tilde{x}_S}$  den aggregierten Konsum beziehungsweise die Auszahlung eines Vermögenswertes zum Zeitpunkt  $t = 1$  bezeichnen.

Für die betrachtete Volkswirtschaft entspricht der aggregierte Konsum  $\tilde{C}$  zum Zeitpunkt  $t = 1$  dem aggregierten Vermögen  $\tilde{M}$ . Die zufallsbedingte Auszahlung des Marktportfolios zum Zeitpunkt  $t = 1$  wird als  $e^{\tilde{x}_M}$  bezeichnet. Zusammenfassend lässt sich dies wie folgt darstellen:

$$\tilde{C} = \tilde{M} = e^{\tilde{x}_M}. \quad (6.5)$$

Sowohl die Auszahlung des Marktportfolios  $\tilde{M}$  als auch die Auszahlung  $\tilde{S}$  des Vermögenswertes sind lognormalverteilt.  $\tilde{x}_M = \ln(\tilde{M})$  und  $\tilde{x}_S = \ln(\tilde{S})$  sind dabei bivariat normalverteilt mit Mittelwert  $\mathbb{E}(\tilde{x}_M) = \theta_M$  und  $\mathbb{E}(\tilde{x}_S) = \theta_S$ , Standardabweichung  $\sigma_M$  beziehungsweise  $\sigma_S$  und Korrelation  $\rho$ . Es ist zu betonen, dass die Preisgleichung (6.4) sowohl für kontinuierliche als auch für diskrete Zustände der beiden Zustandsvariablen  $\tilde{x}_S$  und  $\tilde{x}_M$  gilt.

Ziel ist es nun, das CAPM als Beziehung zwischen der erwarteten Überrendite eines Vermögenswertes und der des Marktportfolios Schritt für Schritt herzuleiten, um eine Aussage über die korrekte Definition der erwarteten Renditen im Rahmen des CAPM treffen zu können. Die Herleitung basiert dabei bewusst auf der Verwendung von logarithmierten Renditen. In einem ersten Schritt wird dazu ein Ausdruck für den risikofreien Zinssatz in der beschriebenen Ökonomie hergeleitet. Zu diesem Zweck wird eine risikofreie Nullkuponanleihe betrachtet, die eine Einheit des Konsumguts zum Zeitpunkt  $t = 1$  in allen möglichen Zuständen der Welt zahlt, sodass  $e^{x_f} = 1$ . Mithilfe der Formel (6.4) zur Bewertung von Vermögenswerten und der beschriebenen Äquivalenz des aggregierten Konsums zum Zeitpunkt  $t = 1$  und der Auszahlung des Marktportfolios aus Gleichung (6.5) kann der Preis  $B$  der Nullkuponanleihe wie folgt ausgedrückt werden:

$$B = e^{-r_f} = \delta \cdot \mathbb{E} \left( \frac{u'_1(e^{\tilde{x}_M})}{u'_0(C_0)} \cdot 1 \right),$$

wobei  $r_f$  den stetigen risikofreien Zinssatz bezeichnet. Setzt man nun die ersten Ableitungen der gegebenen Nutzenfunktion aus Gleichung (6.1) ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} e^{-r_f} &= \delta \cdot \mathbb{E} \left( \frac{1/e^{\tilde{x}_M}}{1/C_0} \right) \\ &= \delta \cdot C_0 \cdot \mathbb{E}(e^{-\tilde{x}_M}). \end{aligned}$$

Gemäß Gleichung (4.4) folgt aus dem Erwartungswert des lognormalverteilten Payoffs des Marktportfolios, dass

$$e^{-r_f} = \delta \cdot C_0 \cdot e^{-\theta_M + \frac{1}{2}\sigma_M^2}.$$

Durch Umformung lässt sich der risikofreie Zinssatz wie folgt ausdrücken:

$$r_f = -\ln(\delta) - \ln(C_0) + \theta_M - \frac{1}{2}\sigma_M^2. \quad (6.6)$$

Mit dem Ausdruck für den risikofreien (logarithmierten) Zinssatz wird im nächsten Schritt die logarithmierte Rendite des Marktportfolios hergeleitet, um so den Ausdruck für die erwartete Überrendite des Marktportfolios ableiten zu können. Gleichung (6.4) entsprechend ist der Preis des Marktportfolios  $M_0$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  durch

$$M_0 = \delta \cdot \mathbb{E} \left( \frac{u'_1(e^{\tilde{x}_M})}{u'_0(C_0)} \cdot e^{\tilde{x}_M} \right)$$

gegeben, was sich zu dem Ausdruck

$$M_0 = \delta \cdot C_0 \quad (6.7)$$

vereinfachen lässt. Der Preis  $\delta \cdot C_0$  des Marktportfolios zum Zeitpunkt  $t = 0$  kann als der Konsum zum Zeitpunkt  $t = 0$  interpretiert werden, auf den verzichtet werden muss, um zum Zeitpunkt  $t = 1$  alle zur Verfügung stehenden Einheiten des Konsumguts konsumieren zu können.

Die Gleichung (6.7) kann nun verwendet werden, um einen Ausdruck für die logarithmierte Rendite des Marktportfolios herzuleiten, die mit  $\tilde{r}_M^{log}$  bezeichnet wird. Die Rendite von Zeitpunkt  $t = 0$  bis Zeitpunkt  $t = 1$  lautet

$$\tilde{r}_M^{log} = \ln \left( \frac{\tilde{M}}{M_0} \right)$$

und kann durch Einsetzen des Preises  $M_0$  des Marktportfolios als

$$\begin{aligned}\tilde{r}_M^{log} &= \ln\left(\frac{e^{\tilde{x}_M}}{\delta \cdot C_0}\right) \\ &= \tilde{x}_M - \ln(C_0) - \ln(\delta)\end{aligned}\tag{6.8}$$

geschrieben werden.

Die erwartete Überrendite des Marktportfolios  $\mathbb{E}(\tilde{r}_M^{log}) - r_f$ , die sich aus Gleichung (6.8) und Gleichung (6.6) ergibt, kann wie folgt ausgedrückt werden:

$$\mathbb{E}(\tilde{r}_M^{log}) - r_f = \mathbb{E}(\tilde{x}_M) - \ln(C_0) - \ln(\delta) - \left(-\ln(\delta) - \ln(C_0) + \theta_M - \frac{1}{2}\sigma_M^2\right).$$

Unter Berücksichtigung, dass  $\mathbb{E}(\tilde{x}_M) = \theta_M$ , vereinfacht sich die erwartete Überrendite des Marktes zu

$$\mathbb{E}(\tilde{r}_M^{log}) - r_f = \frac{1}{2}\sigma_M^2.\tag{6.9}$$

In einem nächsten Schritt kann die erwartete (logarithmierte) Überrendite eines Vermögenswertes hergeleitet werden. Analog zum Marktportfolio kann zunächst der Preis des Vermögenswertes zum Zeitpunkt  $t = 0$  mithilfe der Gleichung (6.4) wie folgt geschrieben und vereinfacht werden:

$$\begin{aligned}S_0 &= \delta \cdot \mathbb{E}\left(\frac{u'_1(e^{\tilde{x}_M})}{u'_0(C_0)} \cdot e^{\tilde{x}_S}\right) \\ &= \delta \cdot C_0 \cdot \mathbb{E}\left(e^{\tilde{x}_S - \tilde{x}_M}\right).\end{aligned}\tag{6.10}$$

Da der Exponentialterm auf der rechten Seite lognormalverteilt ist, kann durch Berechnung des Erwartungswertes unter Berücksichtigung der Korrelation  $\rho$  zwischen den Renditen des Vermögenswertes und des Marktportfolios der Preis des Vermögenswertes

aus Gleichung (6.10) folgendermaßen geschrieben werden:<sup>6</sup>

$$S_0 = \delta \cdot C_0 \cdot e^{\theta_S - \theta_M + \frac{1}{2}\sigma_S^2 + \frac{1}{2}\sigma_M^2 - \sigma_S \cdot \sigma_M \cdot \rho}.$$

Die logarithmierte Rendite  $\tilde{r}_S^{log}$  des Vermögenswertes von Zeitpunkt  $t = 0$  bis Zeitpunkt  $t = 1$  kann mithilfe des Ausdrucks für den Preis des Vermögenswertes  $S_0$  als

$$\begin{aligned} \tilde{r}_S^{log} &= \ln\left(\frac{e^{\tilde{x}_S}}{S_0}\right) \\ &= \ln\left(\frac{e^{\tilde{x}_S}}{\delta \cdot C_0 \cdot e^{\theta_S - \theta_M + \frac{1}{2}\sigma_S^2 + \frac{1}{2}\sigma_M^2 - \sigma_S \cdot \sigma_M \cdot \rho}}\right) \end{aligned}$$

geschrieben und zu dem Ausdruck

$$\tilde{r}_S^{log} = -\ln(\delta) - \ln(C_0) + \tilde{x}_S - \theta_S + \theta_M - \frac{1}{2}\sigma_S^2 - \frac{1}{2}\sigma_M^2 + \sigma_S \cdot \sigma_M \cdot \rho$$

umgeformt werden. Die erwartete logarithmierte Rendite des Vermögenswertes lässt sich dann wie folgt:

$$\mathbb{E}\left(\tilde{r}_S^{log}\right) = -\ln(\delta) - \ln(C_0) + \theta_M - \frac{1}{2}\sigma_S^2 - \frac{1}{2}\sigma_M^2 + \sigma_S \cdot \sigma_M \cdot \rho. \quad (6.11)$$

Unter Verwendung der Gleichung (6.11) und des Ausdrucks für den risikofreien Zinssatz aus Gleichung (6.6) kann die erwartete Überrendite des Vermögenswertes durch die folgende Bedingung ausgedrückt werden:

$$\mathbb{E}\left(\tilde{r}_S^{log}\right) - r_f = -\frac{1}{2}\sigma_S^2 + \sigma_S \cdot \sigma_M \cdot \rho. \quad (6.12)$$

Die prominente Beziehung des CAPM zwischen der erwarteten Überrendite eines Vermögenswertes und der des Marktportfolios kann nun mit den zuvor hergeleiteten

---

<sup>6</sup>Gemäß Gleichung (4.4) kann der Erwartungswert von  $e^{Z_1 - Z_2}$  bei normalverteilten Variablen  $Z_1$  und  $Z_2$  mit Mittelwert  $a_1$  und  $a_2$ , Standardabweichung  $b_1$  beziehungsweise  $b_2$  und Korrelation  $\rho$  wie folgt bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(e^{Z_1 - Z_2}\right) &= e^{\mathbb{E}(e^{Z_1 - Z_2}) + \frac{1}{2}\text{Var}(Z_1 - Z_2)} \\ &= e^{\mathbb{E}(Z_1) + \mathbb{E}(-Z_2) + \frac{1}{2}(\text{Var}(Z_1) + \text{Var}(-Z_2) + 2 \cdot \text{Cov}(Z_1, -Z_2))} \\ &= e^{a_1 - a_2 + \frac{1}{2}b_1^2 + \frac{1}{2}b_2^2 - b_1 \cdot b_2 \cdot \rho}. \end{aligned}$$

Gleichungen formuliert werden. Dazu wird zunächst die erwartete Überrendite des Marktportfolios aus Gleichung (6.9) um  $\frac{1}{2}\sigma_M^2$  erweitert und die des Vermögenswertes aus Gleichung (6.12) umgestellt, sodass sich beide Formeln wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\tilde{r}_M^{log}) + \frac{1}{2}\sigma_M^2 - r_f &= \sigma_M^2 \\ \mathbb{E}(\tilde{r}_S^{log}) + \frac{1}{2}\sigma_S^2 - r_f &= \sigma_S \cdot \sigma_M \cdot \rho.\end{aligned}$$

Durch Division beider Gleichungen und nach Umstellung ergibt sich der Zusammenhang:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\tilde{r}_S^{log}) + \frac{1}{2}\sigma_S^2 - r_f &= \frac{\sigma_S \cdot \sigma_M \cdot \rho}{\sigma_M^2} \cdot \left( \mathbb{E}(\tilde{r}_M^{log}) + \frac{1}{2}\sigma_M^2 - r_f \right) \\ &= \beta \cdot \left( \mathbb{E}(\tilde{r}_M^{log}) + \frac{1}{2}\sigma_M^2 - r_f \right),\end{aligned}$$

wobei die bekannte Definition für den Beta-Faktor  $\beta = \frac{\sigma_S \cdot \sigma_M \cdot \rho}{\sigma_M^2}$  genutzt werden kann. Führt man die aus den vorherigen Kapiteln vertraute Schreibweise für die erwartete logarithmierte Rendite  $\mu_{logS}$  eines Vermögenswertes beziehungsweise  $\mu_{logM}$  des Marktportfolios ein, so ergibt sich die grundlegende Beziehung:

$$\mu_{logS} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 = r_f + \beta \cdot \left( \mu_{logM} + \frac{1}{2}\sigma_M^2 - r_f \right). \quad (6.13)$$

Mithilfe des Verhältnisses zwischen der erwarteten diskreten und logarithmierten Rendite, zusammengefasst in Resultat 2, kann bezüglich der Renditebeziehung des CAPM das Folgende festgehalten werden:

**Resultat 7 (Renditebeziehung im CAPM)** *Das CAPM beschreibt die Beziehung zwischen der erwarteten diskreten Rendite  $\mu_S$  eines Vermögenswertes und der erwarteten diskreten Rendite  $\mu_M$  des Marktportfolios als:*

$$\mu_S = r_f + \beta \cdot (\mu_M - r_f).$$

*Wenn die erwarteten logarithmierten Renditen  $\mu_{logS}$  oder  $\mu_{logM}$ , das heißt das arithmetische Mittel der logarithmierten Renditen oder das eng verwandte geometrische Mittel, verwendet werden, müssen die jeweiligen Varianzkorrekturen berücksichtigt werden, um die erwarteten Renditen gemäß Gleichung (6.13) anzupassen.*

## 6.2 Analyse potenzieller Fehler

Im Folgenden werden zwei typische Fehler und ihre Auswirkungen näher betrachtet, die bei der Verwendung des CAPM in der Praxis auftreten können. Zu diesem Zweck werden sowohl die Varianz des Marktportfolios  $\sigma_M^2$  als auch des Vermögenswertes  $\sigma_S^2$ , die erwartete logarithmierte Rendite des Marktes  $\mu_{\log M}$  und der risikofreie Zinssatz  $r_f$  als gegeben angenommen. Ferner wird davon ausgegangen, dass die Sensitivität der Renditen des Vermögenswertes bezüglich der Renditen des Marktportfolios durch  $\beta$  korrekt geschätzt wurde. Die Größe des resultierenden Fehlers soll in Abhängigkeit von der Art des Fehlers und den Parametern des CAPM quantifiziert werden.

### 6.2.1 Bestimmung der erwarteten diskreten Rendite

Der erste betrachtete Fehler kann bei der Ermittlung des korrekten Diskontsatzes – die erwartete diskrete Rendite  $\mu_S$  – mithilfe des CAPM beispielsweise zur Schätzung der Eigenkapitalkosten eines Unternehmens als Bestandteil der gewichteten durchschnittlichen Kapitalkosten (weighted average cost of capital, WACC) auftreten. Zur Bestimmung des korrekten Diskontsatzes  $\mu_S$  wird nun aber statt der erwarteten diskreten Rendite des Marktes  $\mu_M$  fälschlicherweise die erwartete logarithmierte Rendite  $\mu_{\log M}$  verwendet, um die Marktrisikoprämie zu schätzen. Dieser Fehler tritt in ähnlicher Form auf, wenn das geometrische Mittel  $\bar{r}_{geo}$ , das in enger Beziehung zur erwarteten logarithmierten Rendite  $\mu_{\log S}$  steht, für das richtige Maß zur Herleitung der Marktrisikoprämie gehalten wird. Da, wie zu Beginn dieses Kapitels diskutiert, das arithmetische Mittel diskreter Renditen häufig als zu hoch im Vergleich zum geometrischen Mittel eingeschätzt wird, um die Marktrisikoprämie korrekt widerzuspiegeln, ist diese Fehlerart in der Praxis regelmäßig zu beobachten (KPMG, 2019).

Die Größe des resultierenden Fehlers wird aus dem Vergleich des korrekten Diskontsatzes  $\mu_S$  mit dem irrtümlich erhaltenen Diskontsatz  $\mu'_S$  abgeleitet. In Anlehnung an Gleichung (6.13) kann die korrekte Renditebeziehung des CAPM als

$$\mu_S = r_f + \beta \cdot \left( \mu_{\log M} + \frac{1}{2} \sigma_M^2 - r_f \right) \quad (6.14)$$

geschrieben werden, in der die erwartete logarithmierte Rendite  $\mu_{\log M}$  korrekterweise mit der Varianzkorrektur angepasst wird. Das fehlerhafte Modell für den Diskontsatz, das die

erforderliche Varianzkorrektur nicht berücksichtigt, liest sich wie folgt:

$$\mu'_S = r_f + \beta \cdot (\mu_{\log M} - r_f). \quad (6.15)$$

Durch Subtraktion der Gleichung (6.14) von Gleichung (6.15) erhält man den Ausdruck für die Größe des begangenen Fehlers:

$$\mu'_S - \mu_S = -\beta \cdot \frac{1}{2} \sigma_M^2.$$

Beruhet die Schätzung der Marktrisikoprämie auf dem arithmetischen Mittel logarithmierter Renditen  $\mu_{\log M}$  ohne die erforderliche Varianzkorrektur, so ist der resultierende falsche Diskontsatz  $\mu'_S$  kleiner als der zutreffende Diskontsatz  $\mu_S$  für  $\beta > 0$ . Bei gegebener Volatilität des Marktportfolios steigt der Wert des Fehlers mit der Größe des geschätzten Beta-Faktors an.

Mit dem DAX Performance Index als Proxy für das Marktportfolio kann die Größenordnung des Fehlers abgeschätzt werden. Aus Abschnitt 3.1 ist bekannt, dass die jährliche Volatilität  $\hat{\sigma}_M$  der entsprechenden Zeitreihe 21,15 % beträgt. Für  $\hat{\beta} = 1,5$  führt dies zu einer Unterschätzung des korrekten Diskontsatzes von 3,36 Prozentpunkten. Die Verwendung dieses inkorrekten Diskontsatzes im Rahmen der DCF-Methode führt daher dazu, den Unternehmenswert (substanziell) zu überschätzen.

### 6.2.2 Bestimmung der erwarteten logarithmierten Rendite

Der zweite berücksichtigte Fehler bezieht sich auf den Fall, dass das CAPM fälschlicherweise als eine Beziehung zwischen erwarteten logarithmierten Renditen,  $\mu_{\log S}$  und  $\mu_{\log M}$ , anstatt der korrekten Beziehung zwischen erwarteten diskreten Renditen,  $\mu_S$  und  $\mu_M$ , betrachtet wird mit dem Ziel, die erwartete logarithmierte Rendite  $\mu_{\log S}$  des Vermögenswertes zu schätzen. Die falsche erwartete logarithmierte Rendite wird als  $\mu'_{\log S}$  bezeichnet und die unzutreffende Beziehung liest sich wie folgt:

$$\mu'_{\log S} = r_f + \beta \cdot (\mu_{\log M} - r_f), \quad (6.16)$$

während die korrekte CAPM-Beziehung für die erwartete logarithmierte Rendite  $\mu_{logS}$  aus Gleichung (6.13) folgt und lautet:

$$\mu_{logS} = r_f + \beta \cdot \left( \mu_{logM} + \frac{1}{2} \sigma_M^2 - r_f \right) - \frac{1}{2} \sigma_S^2. \quad (6.17)$$

Subtrahiert man die Gleichung (6.17) von der Gleichung (6.16), so kann die Dimension des begangenen Fehlers quantifiziert werden:

$$\mu'_{logS} - \mu_{logS} = \frac{1}{2} \left( \sigma_S^2 - \beta \cdot \sigma_M^2 \right).$$

Um die Differenz näher zu analysieren, kann die Gesamtvarianz  $\sigma_S^2$  des Vermögenswertes in die systematische Varianz  $\beta^2 \cdot \sigma_M^2$  und in die idiosynkratische Varianz  $\sigma_\epsilon^2$  zerlegt werden gemäß:

$$\sigma_S^2 = \beta^2 \cdot \sigma_M^2 + \sigma_\epsilon^2. \quad (6.18)$$

Mithilfe der Zerlegung aus Gleichung (6.18) lässt sich der Fehler wie folgt darstellen:

$$\mu'_{logS} - \mu_{logS} = \frac{1}{2} \left( \sigma_\epsilon^2 + \beta \cdot (\beta - 1) \cdot \sigma_M^2 \right).$$

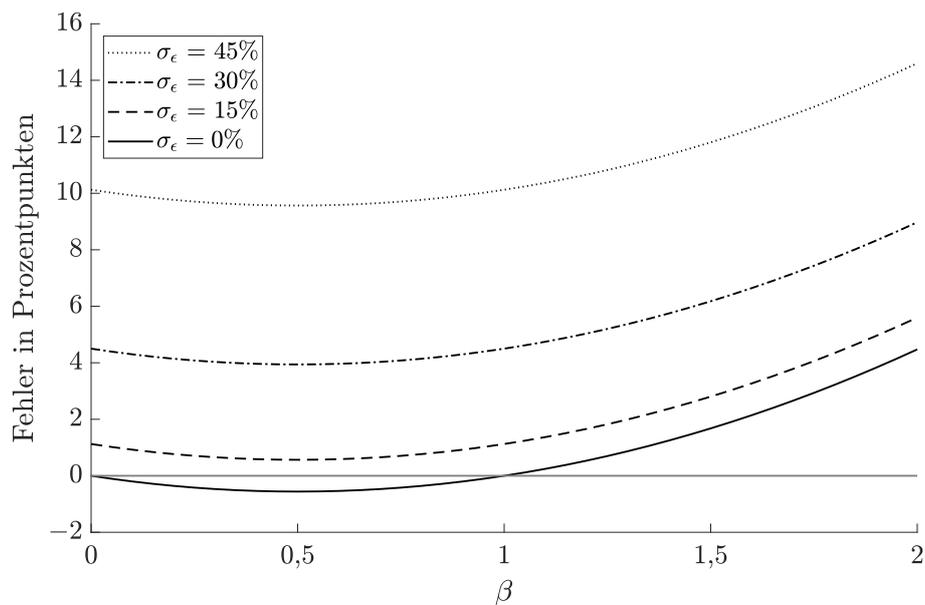
Die Größe des Fehlers steigt demnach mit der idiosynkratischen Volatilität  $\sigma_\epsilon$ , ceteris paribus. Die quadratische Funktion  $\mu'_{logS} - \mu_{logS}$  in  $\beta$  hat ihr Minimum bei  $\beta = \frac{1}{2}$  mit einem Wert des Fehlers von  $\frac{1}{2} \left( \sigma_\epsilon^2 - \frac{1}{4} \sigma_M^2 \right)$ . Für  $\beta = 0$  und  $\beta = 1$  entspricht der Fehler  $\frac{1}{2} \sigma_\epsilon^2$  und nimmt mit steigendem  $\beta$  weiter zu.

Abbildung 6.1 veranschaulicht die Größe des Fehlers, wenn erneut der DAX Performance Index als Marktportfolio mit  $\hat{\sigma}_M = 21,15\%$  unterstellt wird, als Funktion von  $\beta$  für drei unterschiedliche Ausprägungen des idiosynkratischen Risikos  $\sigma_\epsilon$ . Die Abbildung zeigt, dass der Fehler bei geringem idiosynkratischen Risiko negativ sein kann. Der maximale negative Fehler für  $\sigma_\epsilon = 0\%$  und  $\beta = \frac{1}{2}$  entspricht  $-\frac{1}{4} \sigma_M^2$  und beläuft sich in dem gegebenen Beispiel auf etwa  $-55$  Basispunkte. Ein positiver Fehler liegt in diesem konkreten Fall für  $\beta > 1$  vor.

Da die idiosynkratische Volatilität  $\sigma_\epsilon$  von Aktien jedoch typischerweise gleich oder größer als die Volatilität  $\sigma_M$  des Marktes ist, ist in der Regel ein positiver Fehler zu erwarten. Daher wird die erwartete logarithmierte Rendite  $\mu_{logS}$  eines Vermögenswertes überschätzt,

### Abbildung 6.1: Größe des Fehlers $\mu'_{\log S} - \mu_{\log S}$ in Abhängigkeit von $\beta$

Abbildung 6.1 veranschaulicht die Größe des Fehlers  $\mu'_{\log S} - \mu_{\log S}$  der erwarteten logarithmierten Rendite, der resultiert, wenn das CAPM als Beziehung zwischen erwarteten logarithmierten Renditen betrachtet wird. Dieser Fehler wird als Funktion von  $\beta$  und für vier Ausprägungen des idiosynkratischen Risikos  $\sigma_\epsilon$  dargestellt. Die Standardabweichung der Renditen des Marktportfolios  $\hat{\sigma}_M$  entspricht 21,15 % und die des Vermögenswertes  $\hat{\sigma}_S$  wird mit 50 % angenommen. Die Korrelation zwischen den Renditen des Marktes und des Vermögenswertes ist 0,40. Der Fehler wird in Prozentpunkten ausgedrückt.



wenn das CAPM als eine Beziehung zwischen erwarteten logarithmierten Renditen gesehen wird. Motiviert durch einen speziellen, aber nicht unrealistischen Fall einer Korrelation von 0,40 zwischen den Renditen des Marktes und eines Vermögenswertes und einer Volatilität  $\sigma_S$  von 50 % ergibt sich eine idiosynkratische Volatilität  $\sigma_\epsilon$  von etwa 45 %. Diese Parameterangabe wird als das Maximum in Abbildung 6.1 betrachtet. Bei hohen Werten des idiosynkratischen Risikos zeigt sich, dass der Fehler Werte von mehr als 10 Prozentpunkten erreichen kann und die erwartete logarithmierte Rendite des Vermögenswertes somit deutlich überschätzt wird.

# Kapitel 7

## Basisinformationsblätter

### 7.1 Hintergrund

Im Zusammenhang mit der am 01.01.2018 in Kraft getretenen EU-Verordnung Nr. 1286/2014 über Basisinformationsblätter (BIBs) des Europäischen Parlaments und des Rates<sup>7</sup> kann ein weiteres Beispiel für eine fehlerhafte Verwendung erwarteter Renditen angeführt werden. Gemäß dieser Verordnung sind die Emittenten von verpackten Anlageprodukten für Kleinanleger und Versicherungsanlageprodukten (packaged retail and insurance-based investments products, PRIIPs) verpflichtet, einheitliche Basisinformationsblätter für diese Produkte zu erstellen. Die PRIIP-Verordnung regelt zusammen mit der Delegierten Verordnung (EU) 2017/653 der Europäischen Kommission vom 08.03.2017 die Inhalte und Methodik für die Berechnung der im Basisinformationsblatt erforderlichen Angaben.<sup>8</sup> Diese Vorgaben werden als technische Regulierungsstandards (regulatory technical standards, RTS) bezeichnet. Mit der am 01.01.2023 in Kraft getretenen Delegierten Verordnung (EU) 2021/2268 vom 06.09.2021 wurden die ursprünglichen technischen Regulierungsstandards modifiziert.<sup>9</sup> Der im Folgenden aufgezeigte methodische Fehler bezieht sich auf die technischen Regulierungsstandards vom 08.03.2017.

Ziel der gesetzlichen Vorgaben ist die Schaffung eines gemeinsamen Standards für Produktinformationen, der Kleinanlegern eine Basis bieten soll, Produktcharakteristika zu

---

<sup>7</sup>EU-Verordnung Nr. 1286/2014 vom 26.11.2014, Amtsblatt EU L 352.

<sup>8</sup>Delegierte Verordnung (EU) 2017/653 vom 08.03.2017, Amtsblatt EU L 100.

<sup>9</sup>Delegierte Verordnung (EU) 2021/2268 vom 06.09.2021, Amtsblatt EU L 455.

verstehen und verschiedene Produkte miteinander vergleichen zu können (Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht, 2017). Solche PRIIP-Basisinformationsblätter charakterisieren die Produkte zum einen hinsichtlich ihres Markt- und Kreditrisikos, das durch den Risikoindikator (summary risk indicator, SRI) zusammengefasst wird. Zum anderen werden neben den Kosten des Produkts die Performanceszenarien ausgewiesen, die mögliche Auszahlungen des Produkts unter Berücksichtigung einer Investition von 10.000 Euro abhängig von zugrunde gelegten künftigen Marktentwicklungen angeben. Diese Auszahlungen werden zum Ende der empfohlenen Haltedauer (recommended holding period, RHP) des Produkts sowie zu weiteren zwischenzeitlichen Zeitpunkten ausgewiesen.

Generell schreibt die Verordnung dabei vor, die Berechnung des Risikoindikators und der Werte der Performanceszenarien auf logarithmierte Renditen zu stützen<sup>10</sup>, sodass infolgedessen auf das arithmetische Mittel  $\mu_{\log S}$  logarithmierter Renditen zurückgegriffen wird. Die Angemessenheit der angewandten Definition der erwarteten Rendite mit den daraus resultierenden Konsequenzen für die in den Basisinformationsblättern dargestellten Kennzahlen wird im Folgenden diskutiert. Auf Grundlage der Ergebnisse aus den vorangegangenen Kapiteln wird der Fokus auf eine methodische Ungenauigkeit bei den Performanceszenarien von Produkten der Kategorie 2 nach der PRIIP-Verordnung gelegt. Zu den Produkten der zweiten Kategorie zählen Produkte, deren Auszahlungsprofile linear sind, das heißt, die Wertentwicklung des Basiswertes eins zu eins (oder als ein konstantes Vielfaches) abbilden.

## 7.2 Performanceszenarien

Nach der Verordnung sind Emittenten im Rahmen der Performanceszenarien verpflichtet, die Werte und die entsprechenden Renditen eines Stressszenarios sowie eines pessimistischen, moderaten und optimistischen Szenarios anzugeben. Das Stressszenario findet im Folgenden keine Berücksichtigung, da gemäß der Verordnung eine erwartete Rendite des Basiswertes von null unterstellt wird und somit für dieses Szenario kein methodischer Fehler existiert. Die Werte der weiteren Szenarien werden auf Grundlage von vorgegebenen Perzentilen der Standardnormalverteilung hergeleitet, die durch die Approximation von Cornish und Fisher (1938) angepasst werden, um Abweichungen der

---

<sup>10</sup>Delegierte Verordnung (EU) 2017/653 vom 08.03.2017, Amtsblatt EU L 100.

empirischen Verteilung von der Normalverteilung zu berücksichtigen.<sup>11</sup> Da die Größe des resultierenden methodischen Fehlers unabhängig von der mithilfe der Anpassung berücksichtigten Schiefe und Kurtosis der empirischen Verteilung ist, wird die Anwendung der Cornish-Fisher-Erweiterung an dieser Stelle vernachlässigt. Die Werte für die Performanceszenarien  $V^{RTS}$  am Ende der empfohlenen Haltedauer  $T$  nach der Delegierten Verordnung 2017/653 – angepasst an die eingeführte Notation der vorliegenden Dissertation – werden wie folgt

$$V^{RTS} = e^{(\mu_{\log S} - \frac{1}{2}\sigma_S^2) \cdot T + \sigma_S \cdot x_\alpha \cdot \sqrt{T}}$$

bestimmt. Während sich die Parameter im Rahmen der PRIIP-Verordnung auf tägliche Kennzahlen beziehen, wird die empfohlene Haltedauer  $T$  hier in Jahren ausgedrückt und auch  $\mu_{\log S}$  sowie  $\sigma_S$  stellen weiterhin annualisierte Kennzahlen dar. Die Berechnung dieser Parameter basiert dabei, wie in der PRIIP-Verordnung vorgeschrieben, auf täglichen logarithmierten Renditen. Des Weiteren bezeichnet  $x_\alpha$  das  $\alpha$ -Perzentil der Standardnormalverteilung:

$$x_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha),$$

wobei  $\Phi(\cdot)$  die kumulative Verteilungsfunktion einer standardnormalverteilten Zufallsvariable bezeichnet. Für die jeweils betrachteten Performanceszenarien wird das zehnte, fünfzigste und neunzigste Perzentil der Standardnormalverteilung herangezogen.

Um den methodischen Fehler im Rahmen der RTS aufzuzeigen, wird in der folgenden Herleitung beispielhaft das moderate Szenario betrachtet, wobei die Erkenntnisse auf das pessimistische und optimistische Performanceszenario übertragbar sind. Gemäß der PRIIP-Verordnung ist der Wert des PRIIP im moderaten Szenario  $V_{mod}^{RTS}$  durch das fünfzigste Perzentil  $x_{\alpha=0,5}$  der Standardnormalverteilung, das null entspricht, charakterisiert und lässt sich somit wie folgt

$$V_{mod}^{RTS} = e^{(\mu_{\log S} - \frac{1}{2}\sigma_S^2) \cdot T} \quad (7.1)$$

ausdrücken.

---

<sup>11</sup>Die Cornish-Fisher-Approximation wird in Abschnitt 16.2 ausführlich betrachtet.

Nachfolgend wird der Wert des PRIIP im moderaten Szenario unter Berücksichtigung des Aktienpreisprozesses aus Kapitel 3 hergeleitet. Im Wesentlichen beschreiben die Performanceszenarien das Endvermögen  $e^{\ln\left(\frac{\tilde{S}_T}{\tilde{S}_{t_0}}\right)}$  zum Ende der empfohlenen Haltedauer  $T$  in Abhängigkeit des Perzentils des jeweiligen Performanceszenarios. Unter Verwendung des Ausdrucks des Vermögensendwertes  $\tilde{S}_T$  aus Gleichung (3.8) kann der Wert des PRIIP zum Zeitpunkt  $T$  wie folgt geschrieben werden:

$$e^{\ln\left(\frac{\tilde{S}_T}{\tilde{S}_{t_0}}\right)} = e^{\mu_{\log S} \cdot T + \sigma_S \cdot \tilde{z}_T}. \quad (7.2)$$

Da sich das moderate Performanceszenario auf das fünfzigste Perzentil bezieht, kann der Wert des PRIIP  $V_{mod}$  auf Basis des zugrunde gelegten Aktienpreisprozesses als Median des Endvermögens zum Ende der empfohlenen Haltedauer  $T$  aus Gleichung (7.2) abgeleitet werden. Da der Median des Wiener-Prozesses  $\tilde{z}_T$  null entspricht, ergibt sich so für den Wert des PRIIP im moderaten Szenario:

$$V_{mod} = e^{\mu_{\log S} \cdot T}. \quad (7.3)$$

Wenn statt der erwarteten logarithmierten Rendite  $\mu_{\log S}$  die erwartete diskrete Rendite  $\mu_S$  verwendet wird, um den Performancewert im moderaten Szenario zu bestimmen, kann Formel (7.3) gemäß Resultat 2 wie folgt ausgedrückt werden:

$$V_{mod} = e^{(\mu_S - \frac{1}{2}\sigma_S^2) \cdot T}. \quad (7.4)$$

Ein Vergleich der Gleichung (7.1) mit Gleichung (7.4) deutet darauf hin, dass die Werte der Performanceszenarien gemäß der PRIIP-Verordnung das Ergebnis einer fehlerhaften Verwendung der erwarteten logarithmierten Rendite  $\mu_{\log S}$  statt der erwarteten diskreten Rendite  $\mu_S$  sein könnte. Die Subtraktion der Varianzkorrektur von  $\mu_{\log S}$  entspricht einer doppelten und redundanten Varianzkorrektur. Das Ergebnis ist zusammengefasst in:

**Resultat 8 (Performanceszenarien von PRIIPs)** *Der Wert des PRIIP zum Zeitpunkt  $T$  gemäß der Delegierten Verordnung (EU) 2017/653 im moderaten Szenario unterschätzt den korrekten Wert aus Gleichung (7.3) aufgrund einer zweimaligen Varianzkorrektur. Um den theoriekonformen Wert  $V$  zu erhalten, muss der Wert  $V^{RTS}$  gemäß*

des regulatorischen Rechnungsstandards wie folgt angepasst werden:

$$V = e^{\frac{1}{2}\sigma_s^2 T} \cdot V^{RTS}. \quad (7.5)$$

Diese Anpassung gilt auch für das pessimistische und optimistische Szenario. Gleichung (7.5) zeigt, dass die Werte  $V^{RTS}$  des PRIIP nach der PRIIP-Verordnung um den Faktor  $e^{\frac{1}{2}\sigma_s^2 T}$  kleiner sind als die theoriekonsistenten Werte  $V$ . Der Bewertungsfehler steigt sowohl mit der berücksichtigten Haltedauer  $T$  als auch mit der Volatilität der Renditen des Basiswertes.

Um ein Zahlenbeispiel für den in der PRIIP-Verordnung enthaltenen Fehler zu liefern, wird im Folgenden ein konstruiertes Open-End-Partizipationszertifikat der Kategorie 2 auf den DAX Performance Index betrachtet. Dazu werden die Werte der Performanceszenarien zum einen nach der Verordnung gemäß Formel (7.1) und zum anderen nach der theoriekonformen Herleitung gemäß Formel (7.3) berechnet.<sup>12</sup> Außerdem wird angenommen, dass die Verteilung der Renditen des DAX einer Normalverteilung unterliegen, sodass die Anwendung der Cornish-Fisher-Erweiterung zur Berücksichtigung der Schiefe und Kurtosis nicht erforderlich ist. Es werden darüber hinaus eine empfohlene Haltedauer  $T$  von

**Tabelle 7.1: Performanceszenarien eines Partizipationszertifikats**

Die Tabelle 7.1 zeigt die nach der PRIIP-Verordnung und der theoriekonsistenten Herleitung berechneten Performancewerte eines konstruierten Partizipationszertifikats auf den DAX Performance Index für eine empfohlene Haltedauer von dreißig Jahren und eine Investition von 10.000 Euro gemäß Formel (7.1) und Formel (7.3). Die Rendite bezeichnet die annualisierte diskrete Rendite des jeweiligen Performanceszenarios. Der Fehler ist definiert als der Prozentsatz, um den der theoriekonforme Wert des Performanceszenarios  $V$  den entsprechenden Wert  $V^{RTS}$  gemäß Verordnung überschreitet. Der Fehler entspricht dem Wert  $e^{\frac{1}{2}\sigma_s^2 T} - 1$  für jedes Performanceszenario.

	RTS		Theoriekonsistent		
	$V^{RTS}$	Rendite	$V$	Rendite	Fehler
Pessimistisches Szenario	9.856	−0,05 %	19.275	2,21 %	95,55 %
Moderates Szenario	43.482	5,02 %	85.032	7,40 %	95,55 %
Optimistisches Szenario	191.828	10,35 %	375.128	12,84 %	95,55 %

<sup>12</sup>Bei der Berechnung der Momente werden nicht – wie von der Verordnung vorgesehen – die täglichen Renditen der letzten fünf Jahre zugrunde gelegt, sondern, wie in den vorherigen Beispielen, die Historie der täglichen Schlusskurse des DAX Performance Index von 1988 bis 2019.

dreißig Jahren und eine im Rahmen der Verordnung vorgesehene Investitionssumme von 10.000 Euro angenommen.

Tabelle 7.1 zeigt die resultierenden Werte der Performanceszenarien, die annualisierten diskreten Renditen und den Fehler definiert als den Prozentsatz, um den der theoriekonstante Wert des Performanceszenarios  $V$  den entsprechenden Wert  $V^{RTS}$  gemäß Verordnung überschreitet. Gleichung (7.5) entsprechend kann festgestellt werden, dass die theoriekonformen Werte der Performanceszenarien  $V$  die entsprechenden Werte  $V^{RTS}$  gemäß Verordnung um 95,55 % übersteigen, das heißt knapp doppelt so hoch sind. Die Unterschiede in den annualisierten Renditen von 2,25 Prozentpunkten im ungünstigen Szenario bis zu 2,5 Prozentpunkten im optimistischen Szenario führen zu Abweichungen in den Werten von  $V$  und  $V^{RTS}$  von 9.500 Euro beziehungsweise 183.300 Euro.

# Kapitel 8

## Zusammenfassende Beurteilung

Der Vergleich des arithmetischen Mittels diskreter Renditen mit dem geometrischen Mittel ist eng verknüpft mit dem Vergleich der durchschnittlichen logarithmierten Rendite mit der durchschnittlichen diskreten Rendite. Während beide Unterschiede für (typische) tägliche Aktienrenditen nahezu vernachlässigbar und von geringer Bedeutung zu sein scheinen, ist der Differenzierung eine wesentliche Bedeutung beizumessen, wenn diese Renditedurchschnitte beispielsweise auf jährliche Kennzahlen skaliert werden. Bei einer üblichen Standardabweichung der Renditen von Aktien von 20 % können die Unterschiede zwischen den entsprechenden Renditekonzepten durchaus 2 Prozentpunkte betragen. Folglich kommt es auf die richtige Wahl an, wenn (i) die ex ante erwartete Rendite eines Vermögenswertes aus der historischen Wertentwicklung bestimmt und (ii) der Diskontsatz zur Bestimmung des fairen Wertes einer künftigen (erwarteten) Auszahlung verwendet werden soll.

Als Ergebnis der rigorosen Aufarbeitung etablierter Renditekonzepte kann nun die Verwendung des arithmetischen Mittels der diskreten Rendite als geeignetes Performancemaß für den erwarteten Vermögenszuwachs eines Vermögenswertes gerechtfertigt werden. Ebenso muss dieses Konzept – das arithmetische Mittel diskreter Renditen – zur Bestimmung des angemessenen Diskontsatzes gewählt werden und nicht die durchschnittliche logarithmierte Rendite oder das eng verwandte geometrische Mittel. Hinsichtlich des CAPM gilt die prominente Beziehung zwischen einer erwarteten Vermögensrendite und der erwarteten Marktrendite ebenfalls nur für erwartete diskrete Renditen (arithmetische Mittel der diskreten Renditen). Zusätzlich kann gezeigt werden, dass in der ursprüngli-

chen PRIIP-Verordnung eine inkorrekte Methode zur Bestimmung der erwarteten Rendite im Rahmen der Performanceszenarien zugrunde gelegt wird. Für eine widerspruchsfreie Anwendung könnte die erwartete diskrete Rendite (arithmetisches Mittel) in Verbindung mit der Varianzkorrektur verwendet werden. Die Verwendung des falschen Konzepts zur Herleitung der durchschnittlichen Rendite kann in den erwähnten Anwendungen zu gravierenden Performanceunterschieden und Fehlbepreisungen führen.

Der in diesem Teil der vorliegenden Dissertation durchgeführte rigorose Vergleich beider Renditekonzepte und verschiedener Berechnungsmethoden durchschnittlicher Renditen soll das Bewusstsein für die Relevanz dieses Themas schärfen, eine fundierte Erklärung und Herleitung für ausgewählte Anwendungen liefern und alle damit verbundenen Fehler, wie zum Beispiel die unzutreffenden Performanceszenarien im Rahmen der Basisinformationsblätter, verhindern.

## Teil II

# Management von Tail-Risiken und die Schiefeprämie

Dieser Teil der vorliegenden Dissertation beruht auf dem mit Prof. Dr. Christian Koziol im *Journal of Asset Management* veröffentlichten Paper *Tail Risk Management and the Skewness Premium* (Kipp und Koziol, 2022).

# Kapitel 9

## Motivation

Gemäß des Capital Asset Pricing Model von Sharpe (1964), Lintner (1965) und Mossin (1966) können optimale Investitionsentscheidungen lediglich auf Basis der erwarteten Rendite und Standardabweichung der Gesamterrendite eines Portfolios getroffen werden, so dass höhere Momente keinerlei Berücksichtigung finden. Um dieses nachvollziehbare und handhabbare Resultat zu erhalten, erfordert das Modell bestimmte Annahmen bezüglich der Renditeverteilung und/oder der Nutzenfunktion der Investoren: Im vorherigen Teil der Dissertation wurde die Herleitung des CAPM unter Annahme einer logarithmierten Nutzenfunktion und normalverteilter Renditen in einem einperiodigen Modell aufgezeigt (vgl. Abschnitt 6.1). Cochrane (2009) zeigt zudem, dass sich das CAPM im Rahmen eines konsumbasierten Modells mit zwei Zeitpunkten außerdem mit (i) quadratischer Nutzenfunktion oder (ii) exponentieller Nutzenfunktion mit normalverteilten Renditen herleiten lässt.

Die empirische Kapitalmarktforschung liefert jedoch Belege dafür, dass weitere Risikocharakteristika der Renditeverteilung für Marktteilnehmer von Bedeutung sind, die von der Standardabweichung der Renditen nicht vollständig erfasst werden (Harvey und Siddique, 2000, Ang et al., 2006 und Boyer et al., 2010). Ein Beispiel für diese Risikoeigenschaften ist das Tail-Risiko oder das Katastrophenrisiko. Ein Portfolio mit der Gefahr, mit einer sehr kleinen Wahrscheinlichkeit einen großen Teil des Vermögens des Portfolios – mit unter Umständen ruinösen Folgen für den Investor – zu verlieren, ist für viele Anleger deutlich weniger attraktiv als ein Portfolio mit normalverteilten Renditen – trotz identischer Mittelwerte und Standardabweichungen der Portfoliorenditen.

---

Daher begünstigen diese empirisch beobachteten Präferenzen eine zusätzliche Prämie für das Tail-Risiko oder, technisch ausgedrückt, eine Schiefeprämie für (systematisch) negativ oder linksschief verteilte Vermögensrenditen. Da viele theoretische Anwendungen auf einem Konzept ähnlich des CAPM oder auf der Portfoliotheorie von Markowitz (1952, 1959) beruhen, können Schiefeprämien in diesen Ansätzen nicht analysiert werden, da aufgrund der bewusst getroffenen Annahmen per Definition keine Prämien für Tail-Risiken existieren können. In der Praxis erfordert die optimale Zusammenstellung des Portfolios eines Investors jedoch eine sorgfältige Berücksichtigung der Tail-Risiken und – im Fall positiver Schiefeprämien – die freiwillige Auswahl und Aufnahme von Vermögenswerten mit linksschiefer Renditeverteilung.

Da im Gegensatz zum Gesamtmarktrisiko kein etabliertes Framework für das Tail-Risiko existiert, fehlt das Verständnis für die grundlegenden Faktoren, die potenzielle Schiefeprämien beeinflussen. Darüber hinaus ist es fraglich, ob jeder Investor beim erweiterten Fall, wenn Marktteilnehmer nicht nur das Marktrisiko, sondern auch das Katastrophenrisiko in ihre Portfolioallokation miteinbeziehen, weiterhin einen Teil des Marktportfolios im Gleichgewicht halten sollte, wie das CAPM schlussfolgert.

Ziel dieses Teils der vorliegenden Dissertation ist die Entwicklung eines aufschlussreichen Asset-Pricing-Modells zur Erklärung von Schiefeprämien. Auf Basis dieses Modells wird den Fragen nachgegangen, (i) welche Faktoren zu einer hohen Schiefeprämie beitragen und (ii) welches optimale Portfolio Investoren mit heterogenen Anlagehorizonten hinsichtlich des Tail-Risikos wählen.

Die Ergebnisse lauten wie folgt: Erstens zeigt sich in einer Ökonomie mit Marktteilnehmern, die eine abnehmende relative Risikoaversion (decreasing relative risk aversion, DRRA) aufweisen, dass eine positive Schiefeprämie existiert, die mit der Länge der Anlagehorizonte der Investoren abnimmt. Zweitens impliziert das eingeführte Asset-Pricing-Modell unter Berücksichtigung von Investoren mit heterogenen Anlagehorizonten, dass das Portfolio von langfristigen Investoren durch eine höhere Aktienquote charakterisiert ist als das Portfolio von kurzfristigen Investoren. Drittens lässt sich mithilfe des Gleichgewichtsmodells zeigen, dass sich die Zusammensetzung des Portfolios mit risikobehafteten Vermögenswerten – entgegen der Schlussfolgerung des CAPM, dass alle Marktteilnehmer einen Teil des Marktportfolios halten – der heterogenen Investoren unterscheidet: Langfristige Investoren wählen höhere Portfoliogewichte als kurzfristige Investoren für

---

Vermögenswerte, die durch das Katastrophenrisiko charakterisiert sind. Viertens wird gezeigt, dass die Struktur der Marktteilnehmer die Höhe der Schiefeprämie beeinflusst: Die Schiefeprämie steigt mit dem Anteil kurzfristiger Investoren in der Ökonomie.

Dieser Teil der vorliegenden Dissertation steht im Kontext mit der umfangreichen Literatur, die sich mit den Auswirkungen nicht normalverteilter Renditen in Finanzanwendungen beschäftigt. Ausgehend von Arditti (1967) und Scott und Horvath (1980), die unter allgemeinen Annahmen nachweisen, dass Investoren eine Präferenz für positive Schiefe haben, wird die Rolle der Schiefe im Zusammenhang mit der Bewertung von Vermögenswerten in zahlreichen Arbeiten untersucht. Zum Beispiel erweitern Kraus und Litzenberger (1976) das CAPM und betonen die Bedeutung der systematischen Schiefe in einem Drei-Momente-CAPM. Mitton und Vorkink (2007) führen ein einperiodiges Modell mit Agenten ein, die heterogene Präferenzen für Schiefe haben, und kommen zu dem Schluss, dass idiosynkratische Schiefe bepreist ist. Conrad et al. (2013) stellen einen ökonomisch signifikanten negativen Zusammenhang zwischen der Schiefe von Aktienrenditen zu einem Zeitpunkt und den darauf folgenden Renditen fest. Aktien mit weniger negativer oder positiver Schiefe erzielen demnach geringere Renditen in der Folgeperiode. In neuen empirischen Studien bestätigen Baltas und Salinas (2022) und Langlois (2020) die Relevanz positiver Schiefeprämien auf dem Aktienmarkt, ebenso wie Fernandez-Perez et al. (2018) für Warentermingeschäfte (commodity futures). Motiviert durch die Präferenz von Marktteilnehmern für Vermögenswerte mit lotterieähnlichen Auszahlungen untersuchen Bali et al. (2011) die Bedeutung extremer positiver Renditen auf die Preise von Aktien und finden einen negativen und signifikanten Zusammenhang zwischen der maximalen Tagesrendite des letzten Monats und den erwarteten Aktienrenditen. Darüber hinaus wird in mehreren Studien der Einfluss höherer Momente auf die optimale Portfolioallokation von Investoren hervorgehoben. Dazu gehören unter anderem Liu et al. (2003), Wu (2003), Jondeau und Rockinger (2006) und Harvey et al. (2010).

Während die aufgeführten Studien die Bedeutung der Schiefe der Renditeverteilung von Vermögenswerten im Bereich des Asset-Pricing unterstreichen, rücken Aretz und Arisoy (2023) und Jin et al. (2022) die Frage, welchen Einfluss der Zeithorizont auf die Bepreisung der Schiefe hat, in den Vordergrund. Die Autoren beider Papers schlussfolgern, dass die in der empirischen Asset-Pricing-Literatur dokumentierte Prämie für (negative) Schiefe fast ausschließlich auf historische oder zukunftsorientierte Proxies für die Schiefe zurückzuführen

ren sei, die die Schiefe über kurze – zumeist tägliche Renditen oder Innertagesrenditen – und nicht über lange Zeiträume erfassen.

Der vorliegende Teil dieser Dissertation trägt zu dieser Literatur bei, indem er aufzeigt, wie das Tail-Risiko

- (I) die Portfolio-Entscheidung von Investoren, die sich lediglich hinsichtlich der Länge ihrer Anlagehorizonte unterscheiden, und
- (II) die Gleichgewichtspreise, die zu Schiefeprämien in Abhängigkeit von den Anlagehorizonten der Investoren in einem mehrperiodigen Framework führen, beeinflusst.

Es wird dabei von der typischen Annahme einer konstanten relativen Risikoaversion (CRRA) oder einer Taylorreihenentwicklung zur Approximation von Nutzenfunktionen abgewichen. Stattdessen wird von Investoren mit DRRA ausgegangen und damit das beobachtete Verhalten von Marktteilnehmern, bei längeren Anlagezeiträumen höhere Aktienquoten zu wählen, erfasst (Hansson und Persson, 2000). Im Prinzip entspricht dieses Ergebnis der häufig von Praktikern vorgeschlagenen und weitläufig bekannten Investitionsregel, einen Prozentsatz des Vermögens in risikoreiche Anlagen zu investieren, der *100 minus Alter des Investors* entspricht (Willmroth, 2016). Auch wenn es sich hierbei um eine stilisierte Anlageempfehlung handelt, so greift sie doch die Idee, dass jüngere Anleger mit längeren Anlagezeiträumen höhere Aktienquoten wählen (sollten), auf.

Die nächsten Kapitel sind wie folgt gegliedert: In Kapitel 10 wird zunächst das Framework des Asset-Pricing-Modells vorgestellt. Die Eigenschaften der Ökonomien im Gleichgewicht mit homogenen und heterogenen Anlagehorizonten der Investoren werden in Kapitel 11 beschrieben. Kapitel 12 befasst sich mit ausgewählten Parameteränderungen als Robustheitsprüfungen. Kapitel 13 schließt mit einem Fazit.

# Kapitel 10

## Modellbeschreibung

Ziel dieses Kapitels ist die Einführung eines Gleichgewichtsmodells, mithilfe dessen die Ursachen von Schiefeprämien aufgezeigt werden können. Dazu wird im folgenden Abschnitt zunächst die Struktur der zugrunde gelegten Ökonomie mit zwei Aktien und einem risikofreien Wertpapier sowie mit Investoren, die sich hinsichtlich der Länge ihrer Anlagehorizonte unterscheiden, beschrieben. Die berücksichtigten Prozesse, die die Dynamiken der Aktienpreise bestimmen, werden im anschließenden Abschnitt konkretisiert und erläutert. Die im Rahmen des Modells unterstellte Nutzenfunktion der Investoren wird in Abschnitt 10.3 spezifiziert und die Wahl vor dem Hintergrund alternativer Nutzenfunktionen begründet. Abschließend wird in Abschnitt 10.4 die Herleitung des Gleichgewichts des Modells beschrieben.

### 10.1 Markt- und Zeitstruktur

Es wird eine Ökonomie vom Zeitpunkt  $t_0$  bis zum Zeitpunkt  $T$  betrachtet. In der Ökonomie existieren neben einem risikofreien Wertpapier, welches den risikofreien Zinssatz  $r_f$  pro Jahr zahlt, zwei weitere risikobehaftete Wertpapiere. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit werden diese beiden Wertpapiere im Folgenden als Aktien bezeichnet. Während beide Aktien identische erwartete diskrete Renditen und Standardabweichungen der Renditen aufweisen, sind die Renditen von Aktie 1 normalverteilt und die Renditen von Aktie 2 weisen eine negative Schiefe auf. Die linksschiefe Renditeverteilung impliziert, dass die

Wahrscheinlichkeit großer negativer Renditen die Wahrscheinlichkeit ebenso großer positiver Renditen übersteigt. Zum Zeitpunkt  $T$  zahlen beide Aktien ihre jeweiligen Fundamentalwerte  $\tilde{S}_{1,T}$  und  $\tilde{S}_{2,T}$  aus und es erfolgen keine weiteren zwischenzeitlichen Zahlungen zu anderen Zeitpunkten.

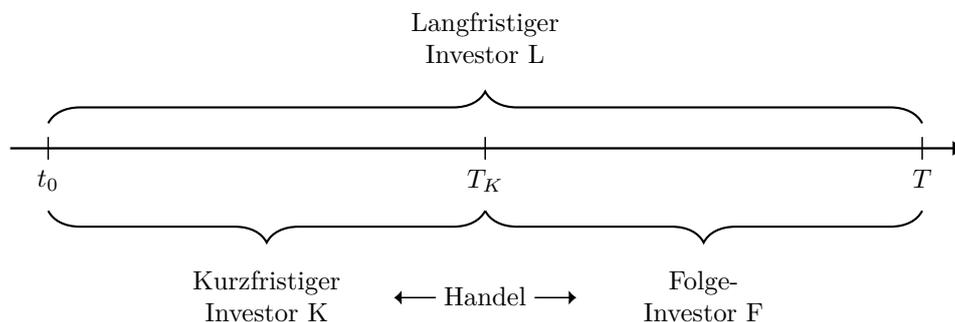
Die Verteilungseigenschaften der Renditen beider Aktien sind den Marktteilnehmern bekannt. Vor dem Zeitpunkt  $T$  werden die Gleichgewichtspreise der beiden Aktien durch die Marktteilnehmer unter Berücksichtigung der Verteilungen gebildet. Zum Zeitpunkt  $t_0$  sind die Fundamentalwerte  $S_{1,t_0}$  und  $S_{2,t_0}$  von Aktie 1 beziehungsweise Aktie 2 auf eins normiert. Diese Fundamentalwerte können dabei von den entsprechenden Handelspreisen  $p_{1,t_0}^{EQ}$  und  $p_{2,t_0}^{EQ}$  im Gleichgewicht (equilibrium, EQ) abweichen. Damit die Summe der Fundamentalwerte beider Aktien zum Zeitpunkt  $t_0$  dem Wert eins entspricht, ist das Angebot  $\bar{X}_j$  zum Zeitpunkt  $t_0$  der Aktie  $j = 1, 2$  durch

$$\bar{X}_1 = \bar{X}_2 = 0,5 \quad (10.1)$$

gegeben.

Zum Zeitpunkt  $t_0$  treten (unendlich viele) Investoren in die Wirtschaft ein, die entweder Anteile der beiden Aktien kaufen oder in das risikofreie Wertpapier investieren. Es wird davon ausgegangen, dass die Nachfrage nach Aktien dabei durch vollkommenen Wettbewerb gekennzeichnet ist. Dies impliziert, dass alle Investoren Preisnehmer sind, sodass das Konzept eines repräsentativen Investors verwendet werden kann (Huang und Litzenberger, 1988). Auf diese Weise können die Gleichgewichtspreise der beiden Aktien so bestimmt werden, als gäbe es nur einen Investor in der Ökonomie, der mit der Gesamtausstattung der (unendlich vielen) Marktteilnehmer ausgestattet ist.

Damit unterschiedliche Anlagehorizonte von Investoren berücksichtigt werden können, werden zwei Typen repräsentativer Investoren zum Zeitpunkt  $t_0$  betrachtet. Dies ist zum einen der repräsentative Investor L mit einem langfristigen Investitionszeitraum bis zum Zeitpunkt  $T$  und zum anderen der repräsentative Investor K mit einem kurzfristigen Anlagehorizont bis zum Zeitpunkt  $T_K$ , wobei Zeitpunkt  $T_K$  vor Zeitpunkt  $T$  liegt. Beide Investoren verfolgen dabei eine Buy-and-Hold-Strategie und können während ihrer jeweiligen Anlagezeiträume keine Portfolioanpassungen vornehmen. Die Aktien sind unendlich teilbar und es existieren keine Handelskosten.

**Abbildung 10.1: Investitionshorizonte der repräsentativen Investoren**

Die repräsentativen Investoren sind zum Zeitpunkt  $t_0$  zunächst mit Geld ausgestattet, wobei die gesamte Geldausstattung  $\bar{X}_{Cash}$  aller Investoren dem aggregierten Fundamentalwert aller ausstehenden Aktien entspricht:

$$\bar{X}_{Cash} = \bar{X}_1 \cdot S_{1,t_0} + \bar{X}_2 \cdot S_{2,t_0} = 1. \quad (10.2)$$

Gegen Zahlung der Gleichgewichtspreise  $p_{1,t_0}^{EQ}$  und  $p_{2,t_0}^{EQ}$  erhalten die Investoren zum Zeitpunkt  $t_0$  Einheiten der beiden Aktien. Während der repräsentative langfristige Investor L die Fundamentalwerte  $\tilde{S}_{1,T}$  und  $\tilde{S}_{2,T}$  zum Zeitpunkt  $T$  erhält, verlässt der repräsentative kurzfristige Investor K die Ökonomie zum Zeitpunkt  $T_K$  und bietet seine zum Zeitpunkt  $t_0$  erworbenen Aktienbestände  $X_1^K$  von Aktie 1 und  $X_2^K$  von Aktie 2 zum Verkauf an. Diese verkauft er ohne Limit, das heißt, der kurzfristige Investor ist bereit, seine Aktien ohne Mindestverkaufspreis zu veräußern.

Analog zum Zeitpunkt  $t_0$  ist das Aktienangebot zum Zeitpunkt  $T_K$  damit vollkommen unelastisch und es werden unendlich viele Folge-Investoren angenommen, die zum Zeitpunkt  $T_K$  in die Ökonomie eintreten und die Aktien des repräsentativen kurzfristigen Investors K erwerben können. Wie bereits zum Zeitpunkt  $t_0$ , ist die Nachfrage zum Zeitpunkt  $T_K$  somit erneut durch perfekten Wettbewerb gekennzeichnet. Dies ermöglicht es, den repräsentativen Folge-Investor F zu berücksichtigen, der mit der Gesamtausstattung aller Folge-Investoren ausgestattet ist und über den verbleibenden Anlagehorizont  $T - T_K$  verfügt. Die aggregierte Geldausstattung  $\bar{X}_{Cash}^F$  zum Zeitpunkt  $T_K$  entspricht erneut der Summe der Fundamentalwerte der zum Zeitpunkt  $T_K$  ausstehenden Aktien:

$$\bar{X}_{Cash}^F = X_1^K \cdot S_{1,T_K} + X_2^K \cdot S_{2,T_K}. \quad (10.3)$$

Damit werden die gleichen Bedingungen wie zum Zeitpunkt  $t_0$  gewährleistet. Der repräsentative Investor F kann ebenfalls in das risikofreie Wertpapier investieren oder die verfügbaren Aktieneinheiten des repräsentativen kurzfristigen Investors K erwerben, wobei er hierzu die Gleichgewichtspreise  $p_{1,T_K}^{EQ}$  und  $p_{2,T_K}^{EQ}$  zum Zeitpunkt  $T_K$  an Investor K zahlt. Abbildung 10.1 gibt einen Überblick über die Investitionshorizonte der Investoren in der Ökonomie.

Bevor auf die Gleichgewichtsbedingungen und die Herleitung der Gleichgewichtspreise zu beiden Zeitpunkten eingegangen wird, werden im Folgenden zunächst die statistischen Aktieneigenschaften dargelegt und im Anschluss die Nutzenfunktion der Anleger spezifiziert.

## 10.2 Aktienpreisprozesse

In der beschriebenen Ökonomie existieren neben einem risikofreien Wertpapier lediglich zwei Aktien. Während beide Aktien identische erwartete diskrete Renditen und Standardabweichungen der Renditen aufweisen, unterscheiden sie sich in Bezug auf die Schiefe der Renditeverteilungen. Dies ermöglicht es, die Unterschiede in den Gleichgewichtspreisen  $p_{1,t_0}^{EQ}$  und  $p_{2,t_0}^{EQ}$  zum Zeitpunkt  $t_0$  auf das Tail-Risiko zurückzuführen: Während Aktie 1 normalverteilte Renditen hat und somit kein Tail-Risiko aufweist, sind die Renditen von Aktie 2 dem Katastrophenrisiko ausgesetzt. Zu diesem Zweck werden zwei etablierte stochastische Prozesse für Aktie 1 und Aktie 2 zugrunde gelegt: ein reines Diffusionsmodell (geometrische Brownsche Bewegung) und ein Sprung-Diffusionsmodell (kompensierte geometrische Brownsche Bewegung mit Sprüngen).

Da die geometrische Brownsche Bewegung zur Modellierung der Renditen von Aktie 1 bereits im ersten Teil dieser Dissertation betrachtet wurde, wird an dieser Stelle auf eine erneute Erläuterung verzichtet und lediglich die wesentlichen Gleichungen und Parameter in der leicht modifizierten Darstellung rekapituliert (vgl. Abschnitt 3.2). Die bekannte stochastische zeitkontinuierliche Differentialgleichung der geometrischen Brownschen Bewegung für Aktie 1 lautet:

$$\frac{dS_{1,t}}{S_{1,t}} = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dz_t. \quad (10.4)$$

Gleichung (10.4) bezeichnet die instantane diskrete Rendite von Aktie 1 über einen infinitesimal kleinen Zeitschritt  $dt$ . Die Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  bezeichnen die annualisierte erwartete diskrete Rendite (oder Drift) beziehungsweise Standardabweichung und  $z_t$  wie zuvor einen standardisierten Wiener-Prozess. Die Darstellung der logarithmierten Rendite von Zeitpunkt  $t_0$  bis Zeitpunkt  $T$  ist gegeben durch:

$$\ln\left(\frac{\tilde{S}_{1,T}}{S_{1,t_0}}\right) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \cdot T + \sigma \cdot \tilde{z}_T, \quad (10.5)$$

wobei  $\tilde{z}_T$  normalverteilt ist mit Mittelwert null und Varianz  $T$ .

In Anlehnung an Merton (1976) basiert das Sprung-Diffusionsmodell zur Modellierung der Renditen von Aktie 2 auf der stochastischen Differentialgleichung der geometrischen Brownschen Bewegung in Gleichung (10.4) mit einer zusätzlichen Poisson-verteilten Sprungkomponente. Die diskrete Poisson-Wahrscheinlichkeitsverteilung ordnet der Anzahl der Ereignisse oder Sprünge, die während eines festen Zeitraums und einer durchschnittlichen Ereignisrate auftreten, eine Wahrscheinlichkeit zu. Zur Vereinfachung wird für den Fall, dass ein Sprung auftritt, eine nicht stochastische negative Sprunghöhe im Logarithmus des Aktienkurses der Größe  $\zeta < 0$  angenommen. Die stochastische Differentialgleichung von Aktie 2 mit der sprunghereinigten annualisierten Drift  $\mu_J$  und der Volatilität  $\sigma_J$  des Diffusionsterms lautet:

$$\frac{dS_{2,t}}{S_{2,t}} = \mu_J \cdot dt + \sigma_J \cdot dz_t + (e^\zeta - 1) \cdot dJ_t. \quad (10.6)$$

Der Poisson-Prozess wird mit  $J_t$  bezeichnet und im Fall eines Sprungs springt der Aktienpreis von  $S_{2,t}$  auf den niedrigeren Wert  $e^\zeta \cdot S_{2,t}$ . Die Volatilität  $\sigma_J$  bezeichnet die Standardabweichung (p.a.) der Renditen unter der Bedingung, dass kein Poisson-Ereignis eintritt. Die Inkremente des Poisson-Prozesses  $dJ_t$  und des Wiener-Prozesses  $dz_t$  werden als unabhängig angenommen.

Damit sichergestellt ist, dass die erwartete diskrete Rendite  $\mathbb{E}\left(\frac{dS_{2,t}}{S_{2,t}}\right)$  von Aktie 2 der erwarteten diskreten Rendite  $\mu \cdot dt$  von Aktie 1 für gegebene Parameter der Sprungkomponente entspricht, muss die sprunghereinigte Drift  $\mu_J$  in Gleichung (10.6) dem Ausdruck

$$\mu_J := \mu - \lambda \cdot (e^\zeta - 1) \quad (10.7)$$

entsprechen, wobei  $\lambda$  die Intensität des Poisson-Prozesses bezeichnet. Die instantane Sprungwahrscheinlichkeit entspricht somit  $\lambda \cdot dt$ . Durch Subtraktion der erwarteten (negativen) diskreten Sprunggröße  $(e^\zeta - 1)$  von  $\mu$  ergibt sich  $\mu_J > \mu$ . Die erwartete diskrete Rendite des Sprung-Diffusionsprozesses entspricht der erwarteten diskreten Rendite der geometrischen Brownschen Bewegung in Gleichung (10.4), die der Drift  $\mu$  entspricht. Aufgrund der Anpassung der Drift in Formel (10.7) um die erwartete Sprunggröße wird der Prozess als kompensierte geometrische Brownsche Bewegung mit Sprüngen bezeichnet (Merton, 1976 und Wu, 2003).

Die Darstellung der logarithmierten Rendite des betrachteten Prozesses für den Fundamentalwert  $S_{2,t}$  kann gemäß der Ito-Formel für Sprung-Diffusionsprozesse von Cont und Tankov (2003) hergeleitet werden:

$$\ln \left( \frac{\tilde{S}_{2,T}}{S_{2,t_0}} \right) = \left( \mu_J - \frac{1}{2} \sigma_J^2 \right) \cdot T + \sigma_J \cdot \tilde{z}_T + \zeta \cdot \tilde{J}_T, \quad (10.8)$$

wobei  $\tilde{J}_T$  einer Poisson-Verteilung mit der Intensität  $\lambda \cdot T$  folgt und die Anzahl der Sprünge vom Zeitpunkt  $t_0$  bis zum Zeitpunkt  $T$  bezeichnet. Die Varianz der logarithmierten Rendite vom Zeitpunkt  $t_0$  bis zum Zeitpunkt  $T$  ist gegeben durch:

$$\text{Var} \left( \ln \left( \frac{\tilde{S}_{2,T}}{S_{2,t_0}} \right) \right) = \left( \sigma_J^2 + \lambda \cdot \zeta^2 \right) \cdot T \quad (10.9)$$

Neben identischer erwarteter Rendite sollen beide Prozesse die gleiche Standardabweichung der Renditen aufweisen. Dazu muss die Volatilität  $\sigma_J$  des Diffusionsterms so gesetzt werden, dass die (gesamte) Standardabweichung der Renditen von Aktie 2, das heißt die Quadratwurzel der Gleichung (10.9), pro Jahr der jährlichen Standardabweichung  $\sigma$  der Renditen von Aktie 1 entspricht. Löst man nun nach der Volatilität  $\sigma_J$  von Aktie 2 – die Standardabweichung der Renditen unter der Bedingung, dass kein Poisson-Ereignis eintritt – auf, so erhält man:

$$\sigma_J = \sqrt{\sigma^2 - \lambda \cdot \zeta^2}, \text{ mit } \sigma^2 - \lambda \cdot \zeta^2 \geq 0. \quad (10.10)$$

Bei gegebener Volatilität  $\sigma$ , Sprungintensität  $\lambda$  und Sprunggröße  $\zeta$  gewährleistet Gleichung (10.10) für  $\sigma_J$  identische Standardabweichungen der Renditen von Aktie 1 und Aktie 2.

Die Schiefe der durch den Sprung-Diffusionsprozess erzeugten Renditen vom Zeitpunkt  $t_0$  bis zum Zeitpunkt  $T$  entspricht dabei:

$$sk\left(\ln\left(\frac{\tilde{S}_{2,T}}{S_{2,t_0}}\right)\right) = \frac{\lambda}{\sqrt{T}} \cdot \frac{\zeta^3}{\sqrt{\sigma_J^2 + \lambda \cdot \zeta^2}}. \quad (10.11)$$

Im Gegensatz zu den normalverteilten logarithmierten Renditen des reinen Diffusionsprozesses aus Gleichung (10.5) weicht die Schiefe der Renditen des Sprung-Diffusionsprozesses von null für  $\lambda > 0$  und  $\zeta \neq 0$  ab. Da  $\zeta < 0$  ist, ist die Schiefe der Renditen von Aktie 2 immer negativ. Gleichung (10.11) zeigt, dass die Schiefe mit zunehmender Länge des Anlagehorizontes  $T$  gegen null konvergiert. Dementsprechend konvergiert die Verteilung der Renditen, die durch den Sprung-Diffusionsprozess charakterisiert sind, für lange Anlagehorizonte  $T$  gegen die Verteilung der Renditen des reinen Diffusionsprozesses gemäß des zentralen Grenzwertsatzes (Fama und French, 2018 und Cont, 2001).

### 10.3 Nutzenfunktion der Investoren

Es wird nun die Nutzenfunktion der (repräsentativen) Investoren spezifiziert. Dabei wird von der häufig getroffenen Annahme einer Nutzenfunktion mit konstanter relativer Risikoaversion oder einer Taylorreihenentwicklung zur Approximation von Nutzenfunktionen abgewichen (Liu et al., 2003 und Jondeau und Rockinger, 2006). Mit dem Ziel, bei der Spezifikation der Nutzenfunktion das beobachtete Verhalten von Marktteilnehmern aufzugreifen, wonach Anleger mit einem langen Anlagehorizont, ceteris paribus, eine höhere Aktienquote wählen als Anleger mit einem kurzen Anlagehorizont, wird auf (rationale) Investoren mit abnehmender relativer Risikoaversion zurückgegriffen (Thorley, 1995). Um diesen Aspekt näher zu beleuchten, werden zunächst die Implikationen unterschiedlich langer Investitionshorizonte auf die optimale Portfolioallokation im Rahmen eines statischen Optimierungsproblems mit einer Nutzenfunktion mit konstanter relativer Risikoaversion (constant relative risk aversion, CRRA) und DRRA-Nutzenfunktion rekapituliert. Abschließend wird zudem die diskretionäre Vermögenshypothese von Wilcox (2003) diskutiert und in Beziehung zur DRRA-Nutzenfunktion gesetzt.

In Anlehnung an Merton (1971) wird eine Funktionsform aus der Familie der hyperbolischen absoluten Risikoaversion (HARA) zur Modellierung des Nutzens von Investoren

angenommen. In Abhängigkeit des Endvermögens  $W$  am Ende des Investitionszeitraumes eines beliebigen Investors  $i$  lautet die Nutzenfunktion

$$U^i(W) = \frac{(W - \eta^i)^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \quad (10.12)$$

wobei  $\gamma$  und  $\eta^i$  die Risikoaversion von Investor  $i$  mit  $\gamma > 0 (\neq 1)$  spezifizieren. Der Koeffizient der relativen Risikoaversion (RRA) für  $U^i(W)$  ist durch

$$\begin{aligned} RRA^i(W) &= -\frac{\frac{\partial^2 U^i(W)}{\partial W^2}}{\frac{\partial U^i(W)}{\partial W}} \cdot W \\ &= \gamma \cdot \left( \frac{W}{W - \eta^i} \right) \end{aligned} \quad (10.13)$$

gegeben. Daraus folgt, dass  $\eta^i$  angibt, ob Investor  $i$  eine mit dem Vermögen zunehmende, konstante oder abnehmende relative Risikoaversion aufweist. Während sich Gleichung (10.12) für  $\eta^i = 0$  zur bekannten CRRA-Nutzenfunktion reduziert, ist der Nutzen für  $\eta^i > 0$  durch eine abnehmende und für  $\eta^i < 0$  durch eine zunehmende relative Risikoaversion (increasing relative risk aversion, IRRA) gekennzeichnet. Da IRRA eine abnehmende Aktienquote mit der Länge des Investitionszeitraums impliziert, was nicht zum beobachteten Anlegerverhalten passt, findet sie im Folgenden keine weitere Berücksichtigung (Thorley, 1995).

### 10.3.1 Konstante relative Risikoaversion

Während die Verfügbarkeit von geschlossenen Lösungen die CRRA-Nutzenfunktion in vielen Anwendungen zur bevorzugten Nutzenfunktion macht, lässt sich zeigen, dass die optimale Aktienquote, die sich aus einem statischen Portfoliooptimierungsproblem ergibt, unabhängig vom Anlagehorizont des Investors ist. Für  $\eta = 0$  resultiert aus Gleichung (10.12) die bekannte CRRA-Nutzenfunktion

$$U(W) = \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \quad \text{mit } \gamma > 0 (\neq 1), \quad (10.14)$$

wobei die relative Risikoaversion konstant ist und  $\gamma$  entspricht. Im Rahmen der Portfoliooptimierung kann ein Investor den Anteil  $\nu$  seines Vermögens in eine Aktie, deren Preis der geometrischen Brownschen Bewegung aus Gleichung (10.4) folgt, und den

Anteil  $1 - \nu$  in ein risikofreies Wertpapier mit Zinssatz  $r_f$  investieren. Die Entwicklung des Gesamtvermögens kann geschrieben werden als:

$$\begin{aligned}\frac{dW_t}{W_t} &= [\nu \cdot \mu + (1 - \nu) \cdot r_f] dt + \nu \sigma dz_t \\ &= [r_f + \nu \cdot (\mu - r_f)] dt + \nu \sigma dz_t.\end{aligned}$$

Nach der Anwendung von Itos Lemma lässt sich die logarithmierte Rendite wie folgt

$$\ln \left( \frac{\widetilde{W}_T}{W_0} \right) = \left[ r_f + \nu \cdot \left( \mu - \frac{1}{2} \nu \sigma^2 - r_f \right) \right] T + \nu \sigma \widetilde{z}_T$$

darstellen und das Endvermögen zum Zeitpunkt  $T$  als:

$$\widetilde{W}_T = W_0 \cdot e^{[r_f + \nu \cdot (\mu - \frac{1}{2} \nu \sigma^2 - r_f)]T + \nu \sigma \widetilde{z}_T}.$$

Durch Einsetzen dieses Ausdrucks für das Endvermögen in die Nutzenfunktion aus Gleichung (10.14) kann der erwartete Nutzen wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[U(W)] &= \mathbb{E} \left[ \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \frac{e^{(1-\gamma)[r_f + \nu \cdot (\mu - \frac{1}{2} \nu \sigma^2 - r_f)]T + (1-\gamma)\nu \sigma \widetilde{z}_T}}{1-\gamma} \right].\end{aligned}$$

Nach Berechnung des Erwartungswertes unter Beachtung von Gleichung (4.4) und Vereinfachung ergibt sich:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[U(W)] &= \frac{e^{(1-\gamma)[r_f + \nu \cdot (\mu - \frac{1}{2} \nu \sigma^2 - r_f)]T + \frac{1}{2}(1-\gamma)^2 \nu^2 \sigma^2 T}}{1-\gamma} \\ &= \frac{e^{(1-\gamma)[r_f + \nu \cdot (\mu - \frac{1}{2} \nu \sigma^2 - r_f)]T}}{1-\gamma}.\end{aligned}\tag{10.15}$$

Die Maximierung des erwarteten Nutzens ist äquivalent zur Maximierung des Exponenten im Zähler der Gleichung (10.15). Die Bedingung erster Ordnung lautet:

$$(1 - \gamma) \cdot (\mu - \nu \sigma^2 - r_f) \cdot T \stackrel{!}{=} 0$$

und die optimale Aktienquote  $\nu^*$  ist damit durch

$$\nu^* = \frac{\mu - r_f}{\gamma \sigma^2} \quad (10.16)$$

gegeben. Gleichung (10.16) verdeutlicht, dass die optimale Aktienquote eines Investors unabhängig von der Länge des Anlagehorizontes  $T$  ist. Dabei liegt die Annahme zugrunde, dass ein Anleger die identische Nutzenfunktion aufweist, das heißt, gleich risikoavers ist (spezifiziert durch  $\gamma$ ), unabhängig von der Länge des Anlagezeitraums des Investors. Für eine erwartete Rendite  $\mu$  und Standardabweichung  $\sigma$  der Renditen der Aktie von 10 % und 20 %, einen risikofreien Zinssatz  $r_f$  von 2 % und einen Risikoaversionparameter  $\gamma$  von 8 resultiert eine optimale Aktienquote von 25 % unabhängig von der Investitionsperiode.

In der Praxis sind die Spezifikation der Nutzenfunktion des Investors und die Abhängigkeit der Nutzenfunktion von der Länge des Anlagehorizontes unbekannt: Konkret kann ein Anleger mit CRRA je nach Anlagehorizont unterschiedlich risikoscheu sein, also abhängig davon, ob er für fünf Jahre oder zwanzig Jahre investiert. Um dieser Tatsache Rechnung zu tragen, wird die relative Risikoaversion  $\gamma$  in einigen Studien als (abnehmende) Funktion der Länge des Investitionszeitraums modelliert, das heißt  $\gamma = \gamma(T)$  (Jaggia und Thosar, 2000). Darüber hinaus liefern empirische Studien Belege dafür, dass die Risikoaversion von Individuen im Laufe der Zeit schwankt (Campbell und Cochrane, 1999 und Guiso et al., 2018). Alternativ könnte dementsprechend auch angenommen werden, dass die Risikoaversion der Anleger anderen Faktoren wie der Wirtschaftslage und (latenten) persönlichen Umständen wie den Erwartungen hinsichtlich der gesamtwirtschaftlichen Entwicklung und der subjektiven Bewertung der Arbeitsmarktchancen unterliegt.

Mit dem Ziel, beobachtete Verhaltensmuster von Marktteilnehmern aufzugreifen, um so die Schiefeprämie im Rahmen des Modells erklären zu können, wird die CRRA-Nutzenfunktion im Folgenden nicht weiter berücksichtigt. Während die Möglichkeit besteht, die relative Risikoaversion als Funktion des Anlagehorizontes zu definieren, wird auf die DRRA-Nutzenfunktion zurückgegriffen, die im folgenden Abschnitt vorgestellt wird.

### 10.3.2 Abnehmende relative Risikoaversion

Für  $\eta^i > 0$  ist die Nutzenfunktion von Investor  $i$  aus Gleichung (10.12) durch abnehmende relative Risikoaversion charakterisiert. Aus dem Ausdruck der relativen Risikoaversion aus Gleichung (10.13) folgt, dass je wohlhabender ein Investor ist, desto weniger risikoavers ist er, was wiederum zu einer mit dem Anlagehorizont steigenden Aktienquote führt (Thorley, 1995 und Jaggia und Thosar, 2000). Sharpe (2007) interpretiert  $\eta^i$  dabei als das erforderliche Mindestvermögen eines Investors zum Ende des Anlagezeitraums. Dies greift die Tatsache auf, dass die Nutzenfunktion in Gleichung (10.12) nur für  $W > \eta^i$  definiert ist. Diese Bedingung gewährleistet einen positiven und abnehmenden Grenznutzen der Nutzenfunktion mit abnehmender relativer Risikoaversion. Sharpe (2007) betont, dass nur Vermögensendwerte, die  $\eta^i$  überschreiten, in Betracht gezogen werden sollten. In einem statischen Portfoliooptimierungsproblem impliziert die Anwendung der DRRA-Nutzenfunktion daher eine Obergrenze möglicher Aktienquoten, die gewährleisten, dass  $W > \eta^i$ . In Anlehnung an Ogaki und Zhang (2001) kann  $\eta^i$  auch als das anlegerspezifische Existenzminimum zum Ende des Investitionszeitraumes bezeichnet werden.

Während der Risikoaversionsparameter  $\gamma$  für alle berücksichtigten Investoren identisch ist, entspricht  $\eta^i$  einem Bruchteil der Geldausstattung von Investor  $i$  gemäß

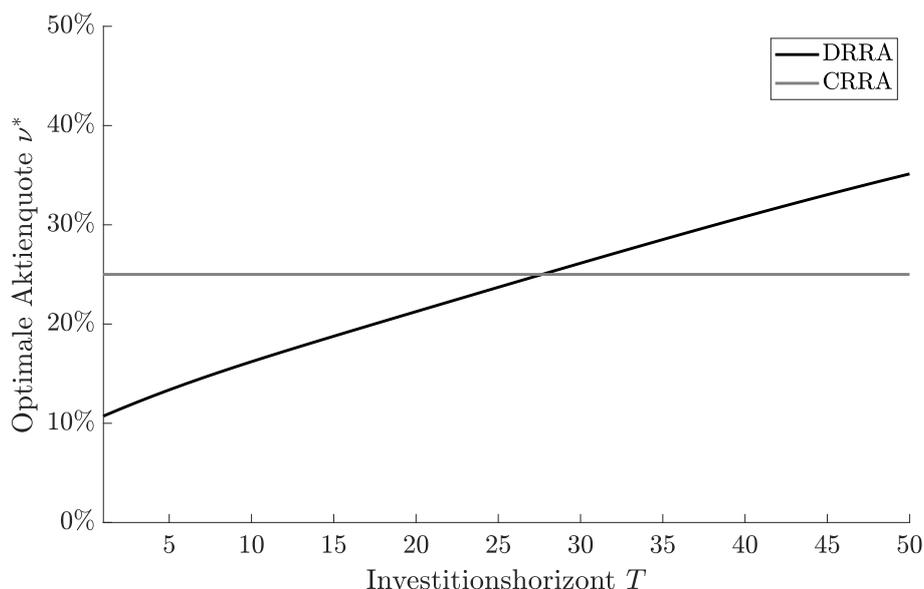
$$\eta^i = \eta \cdot \bar{X}_{Cash}^i, \quad (10.17)$$

wobei gilt, dass die monetäre Anfangsausstattung  $\bar{X}_{Cash}^i$  von Investor  $i$  stets positiv ist. Gleichung (10.17) stellt sicher, dass Investoren unabhängig vom Anfangsvermögen bei gegebenem Existenzminimum  $\eta$  zum Ende des Anlagezeitraumes, ausgedrückt in Prozent, identische Investitionsentscheidungen treffen. Für  $\eta = 0,8$  verlangen alle Investoren unabhängig von ihrer Anfangsausstattung ein Vermögen von mindestens 80 % ihres ursprünglichen Vermögens zum Ende des Investitionszeitraumes, was zu identischen Portfolioallokationsentscheidungen führt.

Die Nutzenfunktion ermöglicht es, die beobachtete Anlegergewohnheit (und die Empfehlungen von Praktikern), bei längeren Anlagezeiträumen höhere Aktienquoten zu wählen, zu berücksichtigen. Während keine geschlossene Lösung des statischen Optimierungsproblems für die optimale Aktienquote mit DRRA-Nutzenfunktion existiert, kann diese durch numerische Methoden bestimmt werden. Abbildung 10.2 zeigt die resultierenden Aktienquoten als Funktion des Anlagezeitraumes für CRRA- und DRRA-

### Abbildung 10.2: Aktienquote in Abhängigkeit des Anlagehorizontes

Abbildung 10.2 illustriert die optimale Aktienquote  $\nu^*$  resultierend aus einer statischen Portfoliooptimierung für die Nutzenfunktion mit konstanter relativer Risikoaversion aus Gleichung (10.14) und abnehmender relativer Risikoaversion aus Gleichung (10.12) mit  $\eta^i > 0$  in Abhängigkeit des Investitionszeitraumes. Die erwartete Rendite  $\mu$  und Standardabweichung  $\sigma$  der Renditen der Aktie entsprechen in diesem Beispiel 10 % und 20 % und der risikofreie Zinssatz  $r_f$  liegt bei 2 %. Der Risikoaversionsparameter  $\gamma$  entspricht 8 für die CRRA-Nutzenfunktion und 4 für die DRRA-Nutzenfunktion.



Nutzenfunktionen. Während die optimale Aktienquote mit CRRA-Nutzenfunktion 25 % beträgt und unabhängig von der Länge des Anlagehorizontes ist, steigt die Aktienquote von 10,72 % für einen Anlagehorizont von einem Jahr bis 35,13 % für einen Investitionszeitraum von dreißig Jahren mit DRRA-Nutzenfunktion.

Da der Nutzen des Investors mit der Nutzenfunktion aus Gleichung (10.12) ausschließlich vom Endvermögen zum Zeitpunkt  $T$  abhängt, werden die zwischenzeitlichen Vermögensbestände des Investors vor Zeitpunkt  $T$  nicht berücksichtigt und evaluiert: Während die Marktteilnehmer zwar ein zuvor definiertes Mindestvermögen am Ende ihres Anlagezeitraums verlangen, sind sie jedoch bereit, in der Zwischenzeit (erhebliche) Verluste im Wert ihres Portfolios hinzunehmen, ohne dass dies den resultierenden Nutzen beeinflusst. Konkret kann dabei von Marktteilnehmern ausgegangen werden, die eine Buy-and-Hold-Strategie verfolgen und zum Ende ihres Anlagehorizontes einen (Mindest-)Kapitalbedarf sicherstellen wollen: Dies können zum einen kurzfristig orientierte Anleger sein, die einen gewissen Kapitalbedarf für Konsumzwecke in der näheren Zukunft haben, oder aber längerfristig orientierte (junge) Investoren, die für den Ruhestand sparen und zu Beginn

ihrer Rentenzeit zum Zeitpunkt  $T$  einen bestimmten, zuvor definierten Kapitalbedarf haben. In beiden Fällen hat die zwischenzeitliche Portfolioentwicklung – bei gegebenem Endvermögen – keinen Einfluss auf den Nutzen des Investors. Die spezifischen Ausdrücke für das Endvermögen der drei repräsentativen Investoren sind im Folgenden gegeben.

#### *Langfristiger Investor L*

Das Endvermögen des repräsentativen langfristigen Investors L mit einem Anlagehorizont bis zum Zeitpunkt  $T$  lautet:

$$W_T^L(X_1^L, X_2^L; p_{1,t_0}, p_{2,t_0}) = X_1^L \cdot \tilde{S}_{1,T} + X_2^L \cdot \tilde{S}_{2,T} + X_{Cash}^L \cdot e^{r_f \cdot T}.$$

In dieser Darstellung bezeichnen  $X_1^L$  und  $X_2^L$  die Anzahl der zum Zeitpunkt  $t_0$  gekauften Anteile von Aktie 1 beziehungsweise Aktie 2 und  $\tilde{S}_{1,T}$  und  $\tilde{S}_{2,T}$  die fundamentalen Werte der beiden Aktien zum Zeitpunkt  $T$ , die sich aus Gleichung (10.4) und Gleichung (10.8) ergeben. Die Investition  $X_{Cash}^L$  in das risikofreie Wertpapier mit dem Zinssatz  $r_f$  lässt sich als Differenz aus der anfänglichen Geldausstattung  $\bar{X}_{Cash}^L$  und der Investition in die risikobehafteten Aktien mit den Handelspreisen  $p_{1,t_0}$  und  $p_{2,t_0}$  darstellen. Unter Berücksichtigung dieser Budgetbeschränkung kann das Endvermögen des Investors L wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{aligned} W_T^L(X_1^L, X_2^L; p_{1,t_0}, p_{2,t_0}) &= X_1^L \cdot S_{1,t_0} \cdot e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) \cdot T + \sigma \cdot \tilde{z}_T} \\ &+ X_2^L \cdot S_{2,t_0} \cdot e^{(\mu_J - \frac{1}{2}\sigma_J^2) \cdot T + \sigma_J \cdot \tilde{z}_T + \zeta \cdot \tilde{J}_T} \\ &+ \left( \bar{X}_{Cash}^L - X_1^L \cdot p_{1,t_0} - X_2^L \cdot p_{2,t_0} \right) \cdot e^{r_f \cdot T}. \end{aligned} \quad (10.18)$$

#### *Kurzfristiger Investor K*

Ähnlich zum Endvermögen des langfristigen Investors L lässt sich das Endvermögen des repräsentativen Investors K mit dem Anlagehorizont  $T_K (< T)$  schreiben als:

$$\begin{aligned} W_{T_K}^K(X_1^K, X_2^K; p_{1,t_0}, p_{2,t_0}) &= X_1^K \cdot \tilde{p}_{1,T_K} + X_2^K \cdot \tilde{p}_{2,T_K} \\ &+ \left( \bar{X}_{Cash}^K - X_1^K \cdot p_{1,t_0} - X_2^K \cdot p_{2,t_0} \right) \cdot e^{r_f \cdot T_K}. \end{aligned} \quad (10.19)$$

Während die Budgetbeschränkung von Investor K identisch zur Budgetbeschränkung von Investor L ist, erhält Investor K nicht die Fundamentalwerte der Aktien, sondern die Handelspreise  $\tilde{p}_{1,T_K}$  und  $\tilde{p}_{2,T_K}$  zum Zeitpunkt  $T_K$ , die aus dem Handel mit Folge-Investor F resultieren.

#### *Folge-Investor F*

Mit einem Investitionszeitraum vom Zeitpunkt  $T_K$  bis zum Zeitpunkt  $T$  erhält der repräsentative Investor F die Fundamentalwerte  $\tilde{S}_{1,T}$  und  $\tilde{S}_{2,T}$  zum Zeitpunkt  $T$ . Die Ausgaben zum Zeitpunkt  $T_K$  hängen von den Handelspreisen  $\tilde{p}_{1,T_K}$  und  $\tilde{p}_{2,T_K}$  ab, sodass das Endvermögen geschrieben werden kann als:

$$W_T^F(X_1^F, X_2^F; p_{1,T_K}, p_{2,T_K}) = X_1^F \cdot \tilde{S}_{1,T} + X_2^F \cdot \tilde{S}_{2,T} + \left( \bar{X}_{Cash}^F - X_1^F \cdot \tilde{p}_{1,T_K} - X_2^F \cdot \tilde{p}_{2,T_K} \right) \cdot e^{r_f \cdot (T - T_K)}, \quad (10.20)$$

wobei die monetäre Ausstattung  $\bar{X}_{Cash}^F$  des Folge-Investors F durch Gleichung (10.3) gegeben ist.

### 10.3.3 Diskretionäre Vermögenshypothese

Ob der Nutzen der Marktteilnehmer nur vom Vermögen zum Zeitpunkt  $T$  abhängt, wie von der angewandten Nutzenfunktion unterstellt, oder auch zwischenzeitliche erhebliche Verluste den Nutzen der Investoren beeinträchtigen und/oder der Anleger nicht bereit ist, diese Verluste während der Investitionsperiode hinzunehmen, wird kontrovers diskutiert (Bodie, 2015). Gemäß der Hypothese des diskretionären Vermögens von Wilcox (2020) wird die Risikoaversion des Investors durch die Notwendigkeit bestimmt, Verluste während des gesamten Investitionszeitraums – und nicht lediglich zum Ende des Anlagehorizontes – zu vermeiden. Dieser alternative Ansatz wird im Folgenden näher betrachtet und in Beziehung zur Nutzenfunktion mit abnehmender relativer Risikoaversion gesetzt.

Die Hypothese findet ihren Ursprung in der von Kelly (1956) eingeführten Theorie des optimalen Wachstums (optimal growth theory) und stellt eine Verallgemeinerung des Mittelwert-Varianz-Kriteriums von Markowitz (1952) dar. In Kellys Framework

maximieren die Marktteilnehmer die erwartete periodische logarithmierte Rendite

$$\ln(1 + r),$$

die langfristig und über viele Perioden hinweg den Median des Vermögens maximiert (Wilcox, 2020). Die sich daraus ergebende optimale Vermögensallokation stimmt mit der Mittelwert-Varianz-Optimierung und einem Risikoaversionskoeffizienten von 0,5 im Framework von Markowitz überein, das einen Investor mit einer relativ geringen Risikoaversion charakterisiert.

Wilcox (2020) betont, dass diese Investitionsstrategie, die auf die Maximierung des erwarteten langfristigen mittleren Vermögens abzielt, von den Anlegern verlangt, (potenzielle) erhebliche zwischenzeitliche Vermögensverluste in Kauf zu nehmen. Nach der Hypothese des diskretionären Vermögens wird die Risikoaversion durch die Notwendigkeit der Anleger bestimmt, auch zwischenzeitliche Vermögensverluste zu vermeiden und nicht nur zum Ende des Anlagehorizontes. Investoren versuchen demnach das langfristige mittlere diskretionäre Vermögen zu maximieren, indem sie die erwartete periodische logarithmierte Rendite des diskretionären Vermögens maximieren. Das diskretionäre Vermögen ist dabei als das Residualvermögen oberhalb eines Unterschreitungspunktes (shortfall point) oder anders ausgedrückt als das maximale Vermögen, das der Anleger im Rahmen der Investitionstätigkeit bereit ist zu verlieren, definiert. (Wilcox und Fabozzi, 2009)

Formal ausgedrückt maximiert ein Investor also den Erwartungswert von

$$\ln(1 + L \cdot r), \tag{10.21}$$

wobei  $L$  den Risikoaversionskoeffizienten und  $r$  die periodische Portfoliorendite bezeichnet. Die Rendite  $r = -\frac{1}{L}$  kann als der prozentuale Verlust über einen bestimmten Zeitraum interpretiert werden, der für einen Anleger nicht mehr tragbar ist. Für  $L = 5$  verlangt der Investor beispielsweise eine Rendite, die zumindest größer als  $-20\%$  ist.

Konkret basieren die Anlageentscheidungen der Marktteilnehmer auf den Renditeeigenschaften einer bestimmten Länge eines Beobachtungszeitraums der Rendite  $r$ , beispielsweise auf monatlichen oder jährlichen Renditen. Durch Maximierung der Gleichung (10.21) maximieren die Investoren das diskretionäre Medianvermögen über die Zeit, das heißt über viele Perioden der betrachteten Länge. Somit werden in jeder Periode Vermö-

gensverluste in bestimmter Höhe vermieden. Um höhere Momente als die Standardabweichung der Renditen – die Schiefe und Kurtosis – zu berücksichtigen, kann die Taylor-Reihe auf den Erwartungswert von Gleichung (10.21) angewandt werden. (Wilcox, 2020)

Wilcox (2003, 2020) setzt die vorgeschlagene Investitionsstrategie aus Gleichung (10.21) in Beziehung zur Nutzentheorie. Drückt man das diskretionäre Vermögen als die Differenz zwischen Vermögen  $W$  und Shortfall-Punkt  $c$  aus, so ist die Investitionsstrategie nach Wilcox äquivalent zu der logarithmierten Nutzenfunktion von Rubinstein (1976) gemäß der Form:

$$\ln(W - c). \quad (10.22)$$

Die Äquivalenz lässt sich wie folgt beweisen: In einem ersten Schritt kann das Vermögen  $W$  in Gleichung (10.22) als das Anfangsvermögen  $W_0$ , multipliziert mit der periodischen Bruttorendite  $1 + r$  des Portfolios, als

$$W = W_0 \cdot (1 + r)$$

und der Verlustpunkt  $c$  in Abhängigkeit des Risikoavversionsparameters  $L$  des Investitionskriteriums nach Wilcox als

$$c = W_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{L}\right) \quad (10.23)$$

ausgedrückt werden. Die Darstellung des Shortfall-Punktes  $c$  als Funktion von  $L$  in Gleichung (10.23) stellt sicher, dass der Investor bei der Nutzenfunktion von Rubinstein und dem Investitionskriterium von Wilcox übereinstimmende maximal hinnehmbare Verluste größer  $-\frac{1}{L}$  hat. Setzt man die Ausdrücke für  $W$  und  $c$  in die Nutzenfunktion von Rubinstein aus Gleichung (10.22) ein, so kann diese wie folgt geschrieben werden:

$$\ln(W - c) = \ln\left(W_0 \cdot (1 + r) - W_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{L}\right)\right).$$

Vereinfacht man die Gleichung, so ergibt sich der Ausdruck:

$$\ln(W - c) = \ln\left(W_0 \cdot \left(\frac{1}{L} + r\right)\right),$$

der umgeformt werden kann zu:

$$\ln(W - c) = \ln\left(\frac{1}{L} + r\right) + \ln(W_0). \quad (10.24)$$

Um die Äquivalenz von Rubinsteins Nutzenfunktion und der Investitionsstrategie von Wilcox zu zeigen, kann die rechte Seite der Gleichung (10.24) mit  $\ln(L) - \ln(L)$  erweitert werden, sodass die Gleichung nach Umformung wie folgt lautet:

$$\ln(W - c) = \ln(1 + L \cdot r) + \ln\left(\frac{W_0}{L}\right). \quad (10.25)$$

Die Darstellung in Gleichung (10.25) zeigt, dass die Nutzenfunktion von Rubinstein mit dem Investitionskriterium von Wilcox identisch ist, zusätzlich dem konstanten Term  $\ln\left(\frac{W_0}{L}\right)$ . Die additive Konstante hat jedoch keinen Einfluss auf die Ergebnisse einer Erwartungswertoptimierung und beeinflusst lediglich das resultierende Nutzenniveau. Daraus kann geschlossen werden, dass sowohl Rubinsteins Nutzenfunktion als auch die Investitionsstrategie von Wilcox bezüglich der optimalen Portfolioallokation gleichwertig sind.

Es ist zudem festzustellen, dass die Nutzenfunktion von Rubinstein formal identisch ist mit der Nutzenfunktion mit abnehmender relativer Risikoaversion aus Gleichung (10.12) für den speziellen Fall des Risikoaversionsparameters  $\gamma$  von 1 und wenn die gesamte Investitionsphase aus einer einzigen Periode besteht: Dazu kann die DRRA-Nutzenfunktion aus Gleichung (10.12) mit  $\gamma$ , das sich im Grenzwert 1 nähert, wie folgt geschrieben werden:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{(W - \eta)^{1-\gamma}}{1 - \gamma}.$$

Gemäß der Regel von de l'Hospital werden die Ableitungen der Terme im Zähler und im Nenner bestimmt:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{-\ln(W - \eta) \cdot (W - \eta)^{1-\gamma}}{-1},$$

sodass der Spezialfall der DRRA-Nutzenfunktion aus Gleichung (10.12) für  $\gamma = 1$

$$U(W) = \ln(W - \eta)$$

lautet, was der Nutzenfunktion von Rubinstein für  $\eta = c$  aus Gleichung (10.22) entspricht.

Als Ergebnis kann zusammengefasst werden, dass die Investitionsstrategie gemäß der diskretionären Vermögenshypothese von Wilcox und die Nutzenfunktion von Rubinstein mit der in diesem Teil der Dissertation verwendeten DRRA-Nutzenfunktion identisch sind

- (I) für eine spezifische Parameterwahl des Existenzminimums oder des Defizitpunktes (vgl. Gleichung (10.23)),
- (II) wenn der Risikoaversionsparameter  $\gamma$  gleich 1 und
- (III) der (gesamte) Investitionszeitraum aus einer einzigen Periode besteht.

Daraus folgt, dass die Anlagestrategie von Wilcox und die Nutzenfunktion von Rubinstein eine Teilmenge der DRRA-Nutzenfunktion aus Gleichung (10.12) darstellen. Letztere ist daher flexibler, da sie ermöglicht, die Risikoaversion der Investoren mit den Risikoaversionsparametern  $\gamma$  und  $\eta$  zu erfassen.

Darüber hinaus ermöglicht die DRRA-Nutzenfunktion Zeitdiversifikation – im Gegensatz zur diskretionären Vermögenshypothese – wenn der gesamte Investitionszeitraum nicht als eine Periode, sondern als sich wiederholende Einzelperioden mit periodischer Portfoliorendite  $r$  betrachtet wird: Da Investoren gemäß der diskretionären Vermögenshypothese periodische Ausfälle vermeiden, sind Investoren mit einem mehrperiodigen Anlagehorizont nicht bereit, während ihres Investitionszeitraums (erhebliche) Verluste hinzunehmen. Es folgt, dass als Resultat eines statischen Portfoliooptimierungsproblems langfristig orientierte Investoren keine höheren Aktienquoten halten als kurzfristig orientierte Anleger. Mit  $L = 5$  und einem Betrachtungszeitraum von beispielsweise einem Jahr treffen Investoren, die nicht bereit sind, jährliche Verluste von 20 % oder höher zu akzeptieren, im wiederholten einperiodigen Modell identische Investitionsentscheidungen unabhängig ihrer Gesamtinvestitionszeiträume.

## 10.4 Herleitung des Gleichgewichts

Das Gleichgewicht der beschriebenen Ökonomie ist durch die resultierenden endogenen Gleichgewichtspreise von Aktie 1 und Aktie 2 und durch die Anzahl der erworbenen Aktienanteile des kurzfristigen und langfristigen Investors charakterisiert. Zwei Bedingungen bestimmen dabei das Gleichgewicht des Modells. Zum einen treffen alle repräsentativen Investoren Investitionsentscheidungen, die ihren erwarteten Nutzen maximieren. Das Optimierungsproblem eines Investors  $i$  zum Handelszeitpunkt  $t_0$  für eine gegebene Preiskombination  $p_1$  und  $p_2$  der beiden Aktien lautet demnach:

$$\max_{X_1^i, X_2^i} \mathbb{E}_{t_0} \left[ U^i \left( W \left( X_1^i, X_2^i; p_1, p_2 \right) \right) \right]. \quad (10.26)$$

Zum anderen gilt im Gleichgewicht, dass die zum Zeitpunkt  $t_0$  und zum Zeitpunkt  $T_K$  jeweils zum Kauf ausstehenden Aktien von den Investoren gemäß den erwartungsnutzenmaximierenden Investitionsentscheidungen erworben werden. Diese Bedingung wird auch als Markträumung bezeichnet.

Wie im vorherigen Abschnitt erwähnt, existiert für die Nutzenfunktion mit abnehmender relativer Risikoaversion aus Gleichung (10.12) keine geschlossene Lösung für die optimale Anzahl der gekauften Aktien, sodass Optimierung (10.26) durch numerische Methoden gelöst werden muss. Ziel ist die Bestimmung der Nachfragefunktionen von Investor  $i$  für Aktie 1 und Aktie 2, jeweils in Abhängigkeit der Preise  $p_1$  und  $p_2$  beider Aktien. Zu diesem Zweck wird zunächst die Verteilung des Endvermögens  $W$  in Abhängigkeit von den von Investor  $i$  gewählten Einheiten der Aktien für eine Preiskombination generiert. Für Aktie 1 und Aktie 2 werden dazu 50.000 Werte für den Diffusionsterm  $\tilde{z}_T$  simuliert. Zur Gewährleistung der numerischen Stabilität wird explizit die Anzahl der Sprünge von null bis zu einer Obergrenze  $\bar{J}_T$  der Anzahl von Sprüngen von Aktie 2 berücksichtigt, anstatt die Poisson-verteilte Anzahl der Sprünge  $\tilde{J}_T$  für jede Realisierung von  $\tilde{z}_T$  zu simulieren. Die maximale Anzahl der berücksichtigten Sprünge  $\bar{J}_T$  bezüglich eines Investitionszeitraums  $T$  ist dabei so gewählt, dass die kumulative Wahrscheinlichkeit  $\sum_{\xi=0}^{\bar{J}_T} p(\xi; \lambda \cdot T)$  aller berücksichtigten Sprünge gerade über 99,9999 % liegt, wobei  $p(\xi; \lambda \cdot T)$  die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Poisson-Verteilung der Anzahl der auftretenden Sprünge  $\xi$  und Intensität  $\lambda \cdot T$  bezeichnet:

$$p(\xi; \lambda \cdot T) = \frac{(\lambda \cdot T)^\xi}{\xi!} \cdot e^{-\lambda \cdot T}.$$

Zu der Wahrscheinlichkeit der maximal berücksichtigten Sprunganzahl  $\bar{J}_T$  während des Zeitraums  $T$  wird die Restwahrscheinlichkeit  $1 - \sum_{\xi=0}^{\bar{J}_T} p(\xi; \lambda \cdot T)$  addiert. Der erwartete Nutzen ergibt sich dann als Durchschnitt der Werte des Nutzens, gewichtet mit der Eintrittswahrscheinlichkeit  $p(\xi; \lambda \cdot T)$  der jeweiligen Sprunganzahl  $\xi$  von Aktie 2, sodass die optimale Aktienanzahl für eine gegebene Preiskombination bestimmt werden kann.

Auf diese Weise können die Nachfragefunktionen  $\chi_1^i(p_1, p_2)$  und  $\chi_2^i(p_1, p_2)$  von Investor  $i$  für Aktie 1 und Aktie 2 hergeleitet werden. Die Nachfrage nach einer Aktie ist dabei grundsätzlich eine abnehmende Funktion des jeweiligen Preises der Aktie und eine zunehmende Funktion des Preises der anderen Aktie.

Da Investor K zum Zeitpunkt  $T_K$  die Handelspreise  $\tilde{p}_{1,T_K}$  und  $\tilde{p}_{2,T_K}$  erhält, die sich aus dem Handel mit dem Folge-Investor F ergeben, ist eine rekursive Lösung des Modells zur Bestimmung der Gleichgewichtspreise  $p_{1,t_0}^{EQ}$  und  $p_{2,t_0}^{EQ}$  erforderlich. Dabei wird im Sinne des vollkommenen Wettbewerbs sichergestellt, dass Investor K die Preise zum Zeitpunkt  $T_K$  nicht beeinflussen kann, indem er die Anzahl der zum Zeitpunkt  $t_0$  gekauften Aktien strategisch wählt.

### 10.4.1 Zeitpunkt $T_K$

Zum Zeitpunkt  $T_K$  maximiert Folge-Investor F den erwarteten Nutzen in Abhängigkeit des Endvermögens aus Gleichung (10.20) durch Wahl der optimalen Anzahl an Aktien für die Preise  $p_{1,T_K}$  und  $p_{2,T_K}$ :

$$\max_{X_1^F, X_2^F} \mathbb{E}_{T_K} \left[ U^F \left( W_T^F \left( X_1^F, X_2^F; p_{1,T_K}, p_{2,T_K} \right) \right) \right].$$

Daraus können die entsprechenden Nachfragefunktionen  $\chi_1^F(p_{1,T_K}, p_{2,T_K})$  und  $\chi_2^F(p_{1,T_K}, p_{2,T_K})$  für Aktie 1 und Aktie 2 abgeleitet werden. Die Gleichgewichtspreise  $p_{1,T_K}^{EQ}$  und  $p_{2,T_K}^{EQ}$  repräsentieren jene Preiskombination, bei der die Nachfrage des Investors F nach beiden Aktien zum Zeitpunkt  $T_K$  dem jeweiligen Angebot des Investors K entspricht. Die Marktträumungsbedingungen zum Zeitpunkt  $T_K$  lauten:

$$\begin{aligned} \chi_1^F(p_{1,T_K}^{EQ}, p_{2,T_K}^{EQ}) - X_1^{K,EQ} &\stackrel{!}{=} 0 \\ \chi_2^F(p_{1,T_K}^{EQ}, p_{2,T_K}^{EQ}) - X_2^{K,EQ} &\stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

In dieser Darstellung sind  $\chi_1^F(p_{1,T_K}^{EQ}, p_{2,T_K}^{EQ})$  und  $\chi_2^F(p_{1,T_K}^{EQ}, p_{2,T_K}^{EQ})$  die mit den Gleichgewichtspreisen zum Zeitpunkt  $T_K$  ausgewerteten Nachfragefunktionen und bezeichnen die Anzahl der Einheiten von Aktie 1 und Aktie 2, die Investor F im Gleichgewicht kauft. Das Angebot beider Aktien von Investor K im Gleichgewicht wird mit  $X_1^{K,EQ}$  und  $X_2^{K,EQ}$  bezeichnet und entspricht den vom kurzfristigen Investor K in Zeitpunkt  $t_0$  gewählten Einheiten:

$$X_1^{K,EQ} := \chi_1^K(p_{1,t_0}^{EQ}, p_{2,t_0}^{EQ})$$

$$X_2^{K,EQ} := \chi_2^K(p_{1,t_0}^{EQ}, p_{2,t_0}^{EQ}),$$

das heißt,  $\chi_1^K(p_{1,t_0}^{EQ}, p_{2,t_0}^{EQ})$  und  $\chi_2^K(p_{1,t_0}^{EQ}, p_{2,t_0}^{EQ})$  sind die Nachfragefunktionen des Investors K, die mit den Gleichgewichtspreisen zum Zeitpunkt  $t_0$  ausgewertet werden.

### 10.4.2 Zeitpunkt $t_0$

Zum Zeitpunkt  $t_0$  maximieren Investor L und Investor K den erwarteten Nutzen in Abhängigkeit des Endvermögens, das in Gleichung (10.18) und Gleichung (10.19) gegeben ist, indem sie die optimale Anzahl an Aktien für Preiskombinationen von  $p_{1,t_0}$  und  $p_{2,t_0}$  wählen. Die Optimierungsprobleme von Investor L und Investor K lauten:

$$\max_{X_1^L, X_2^L} \mathbb{E}_{t_0} \left[ U^L \left( W_T^L \left( X_1^L, X_2^L; p_{1,t_0}, p_{2,t_0} \right) \right) \right] \quad (10.27)$$

$$\max_{X_1^K, X_2^K} \mathbb{E}_{t_0} \left[ U^K \left( W_{T_K}^K \left( X_1^K, X_2^K; p_{1,t_0}, p_{2,t_0} \right) \right) \right]. \quad (10.28)$$

Aus den Nutzenmaximierungsproblemen folgen die Nachfragefunktionen  $\chi_1^L(p_{1,t_0}, p_{2,t_0})$ ,  $\chi_2^L(p_{1,t_0}, p_{2,t_0})$  und  $\chi_1^K(p_{1,t_0}, p_{2,t_0})$ ,  $\chi_2^K(p_{1,t_0}, p_{2,t_0})$  für Aktie 1 und Aktie 2, die von den Preisen zum Zeitpunkt  $t_0$  abhängen. Für die Gleichgewichtspreise  $p_{1,t_0}^{EQ}$  und  $p_{2,t_0}^{EQ}$  entspricht die aggregierte Nachfrage von Investor L und Investor K den verfügbaren Aktienanteilen von Aktie 1 und Aktie 2 aus Gleichung (10.1). Die Markträumungsbedingungen zum Zeitpunkt  $t_0$  können wie folgt formuliert werden:

$$\chi_1^L(p_{1,t_0}^{EQ}, p_{2,t_0}^{EQ}) + \chi_1^K(p_{1,t_0}^{EQ}, p_{2,t_0}^{EQ}) - \bar{X}_1 \stackrel{!}{=} 0 \quad (10.29)$$

$$\chi_2^L(p_{1,t_0}^{EQ}, p_{2,t_0}^{EQ}) + \chi_2^K(p_{1,t_0}^{EQ}, p_{2,t_0}^{EQ}) - \bar{X}_2 \stackrel{!}{=} 0. \quad (10.30)$$

# Kapitel 11

## Modellergebnisse

Ziel des Modells ist die Herleitung, welches optimale Portfolio Investoren mit unterschiedlichen Anlagehorizonten hinsichtlich des Tail-Risikos wählen und welche Faktoren eine hohe Schiefeprämie induzieren. Dazu werden aus den Gleichgewichtsergebnissen des Modells im vorliegenden Kapitel Modellimplikationen abgeleitet und als Resultate zusammengefasst. Aufgrund vereinfachender Annahmen des Modells, wie unter anderem der Berücksichtigung von zwei riskanten, bis auf das Katastrophenrisiko identischen Vermögenswerte, erlauben die theoretischen Modellergebnisse nicht, Aussagen über die (tatsächliche) Höhe von Schiefeprämien zu treffen. Die Ergebnisse und Implikationen dieses Modells bieten jedoch die Grundlage für eine empirische Analyse und werden vor diesem Hintergrund in Kapitel 13 diskutiert.

Die in diesem Kapitel präsentierten Ergebnisse des Modells beruhen auf den im folgenden Abschnitt erläuterten und in Tabelle 11.1 zusammengefassten Parameterspezifikationen. Für die Parameter der Aktienpreisprozesse wird dabei auf allgemein gehaltene, für Aktien und Indizes typische Größen zurückgegriffen. Kapitel 12 bietet eine Sensitivitätsanalyse, in der der Einfluss von Parameteränderungen der Aktienpreisprozesse und der Nutzenfunktion auf die Modellergebnisse analysiert wird.

Während Abschnitt 11.2 zunächst Investoren mit homogenen Anlagehorizonten betrachtet, wird in Abschnitt 11.3 eine Ökonomie mit heterogenen Anlagehorizonten der Investoren berücksichtigt. Abschnitt 11.4 analysiert den Einfluss variierender Anteile kurz- und langfristiger Investoren in der Ökonomie auf die Gleichgewichtsergebnisse des Modells.

## 11.1 Parameterwahl

In Anlehnung an die ersten beiden Momente der Renditeverteilung des DAX Performance Index wird für beide Aktien eine erwartete diskrete Rendite  $\mu$  von 10 % und eine Standardabweichung der Renditen  $\sigma$  von 20 % angenommen (vgl. Abschnitt 3.2). Die Sprungintensität  $\lambda$  von 0,1 bedeutet, dass im Durchschnitt alle zehn Jahre ein Sprung mit einer Sprunggröße  $\zeta$  von  $-30$  % im Logarithmus des Preises auftritt. Tritt ein Sprung auf, so fällt der Aktienkurs um die diskrete Sprunggröße von rund 26 %. Damit beide Aktien identische erwartete diskrete Renditen und Standardabweichungen der Renditen aufweisen, werden die sprungadjustierte Drift und die Volatilität gemäß den Gleichungen (10.7) und (10.10) bestimmt. Die sprungadjustierte Drift  $\mu_J$  ist dabei größer als Drift  $\mu$  und entspricht 12,59 % und kompensiert somit die negative Auswirkung der Sprungkomponente auf die erwartete Rendite. Aus Gleichung (10.10) folgt, dass die Volatilität  $\sigma_J$  der Renditen unter der Bedingung, dass kein Sprung auftritt, 17,61 % entspricht. Zusammen mit der zusätzlichen Variation der Renditen, die durch die Poisson-verteilte Sprungkomponente induziert wird, entspricht die Gesamtvolatilität der Renditen von Aktie 2 der Volatilität der Renditen von Aktie 1. Der risikofreie Zinssatz  $r_f$  beträgt 2 % p.a.

Zudem wird davon ausgegangen, dass die Renditen von Aktie 1 und von Aktie 2 durch denselben Wiener-Prozess  $z_t$  bestimmt werden. Auf diese Weise wird die Möglichkeit zur Diversifikation durch Aufnahme von Aktie 1 und Aktie 2 in das Portfolio der Investoren abgeschwächt und so der Einfluss des Tail-Risikos von Aktie 2 auf die optimale Portfolioallokation der Investoren hervorgehoben.

**Tabelle 11.1: Parameter**

*Tabelle 11.1 fasst die im Folgenden verwendeten Parameter zusammen. Der Parameter  $\mu$  bezeichnet die erwartete diskrete Rendite und  $\sigma$  die (gesamte) Standardabweichung der Renditen von Aktie 1 und Aktie 2 pro Jahr. Die Parameter  $\mu_J$  und  $\sigma_J$  bezeichnen die Drift und die Standardabweichung der Renditen von Aktie 2 unter der Bedingung, dass kein Sprung stattfindet. Die Sprunggröße  $\zeta$  im Logarithmus des Preises und die Sprungintensität  $\lambda$  charakterisieren die Sprungkomponente von Aktie 2. Der Parameter  $r_f$  bezeichnet den risikofreien Zinssatz (p.a.). Die Nutzenfunktion in Gleichung (10.12) ist durch  $\gamma$  und  $\eta$  definiert, wobei das spezifische Existenzminimum des Anlegers  $\eta^i$  von der Anfangsausstattung gemäß Gleichung (10.17) abhängt.*

Parameter	$\mu$	$\sigma$	$\mu_J$	$\sigma_J$	$\zeta$	$\lambda$	$r_f$	$\gamma$	$\eta$
Value	10 %	20 %	12,59 %	17,61 %	$-30$ %	0,1	2 %	4	0,8

Hinsichtlich der Spezifikation der Nutzenfunktion der Investoren wird angenommen, dass der Risikoaversionsparameter  $\gamma$  der Investoren dem Wert 4 und das Existenzminimum  $\eta$  zum Ende ihres jeweiligen Anlagezeitraums dem Wert 0,8 entspricht. Dies impliziert, dass die Investoren am Ende ihres Anlagehorizontes mehr als 80 % ihrer ursprünglichen monetären Ausstattung verlangen. Gemäß Gleichung (10.13) liegt die relative Risikoaversion für alle Vermögensniveaus daher stets über 4.

## 11.2 Investoren mit homogenen Anlagehorizonten

Mit homogenen Anlagehorizonten der Investoren, die durch den langfristigen Investor L repräsentiert werden, entspricht die Länge des Investitionszeitraums der Investoren der Länge der betrachteten Ökonomie. Für die beschriebenen Parameterspezifikationen aus dem vorherigen Abschnitt werden die Gleichgewichtseigenschaften für Investitions-horizonte  $T$  des Investors L von einem Jahr bis dreißig Jahren hergeleitet. Mit lediglich langfristigen Investoren folgt aus Gleichung (10.2), dass der repräsentative Investor L mit dem aggregierten monetären Vermögen  $\bar{X}_{Cash}$  aller Investoren ausgestattet ist, sodass:

$$\bar{X}_{Cash}^L = 1.$$

Die im vorherigen Kapitel beschriebene Herleitung des Gleichgewichts reduziert sich damit auf das Optimierungsproblem des Investors L aus Gleichung (10.27) und die Markträumungsbedingungen für beide Aktien aus den Gleichungen (10.29) und (10.30) vereinfachen sich zu:

$$\chi_1^L(p_{1,t_0}^{EQ}, p_{2,t_0}^{EQ}) - \bar{X}_1 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\chi_2^L(p_{1,t_0}^{EQ}, p_{2,t_0}^{EQ}) - \bar{X}_2 \stackrel{!}{=} 0.$$

Für die Gleichgewichtspreise  $p_{1,t_0}^{EQ}$  und  $p_{2,t_0}^{EQ}$  kauft Investor L alle verfügbaren Aktieneinheiten zum Zeitpunkt  $t_0$  gemäß seiner Nachfragefunktion, sodass gilt:

$$\chi_1^L(p_{1,t_0}^{EQ}, p_{2,t_0}^{EQ}) = \chi_2^L(p_{1,t_0}^{EQ}, p_{2,t_0}^{EQ}) = 0,5.$$

Das resultierende Gleichgewicht lässt sich mithilfe der annualisierten Rendite charakterisieren, die Investor L für beide Aktien jeweils fordert, damit er alle zur Verfügung stehenden Anteile der Aktien erwirbt. Im Gleichgewicht ergibt sich die geforderte Rendite des Investors L für Aktie 1 und Aktie 2 ( $j = 1, 2$ ) aus der logarithmierten Rendite des erwarteten Fundamentalwertes  $\mathbb{E}_{t_0}(S_{j,T})$  zum Zeitpunkt  $T$  bezogen auf den Gleichgewichtshandelspreis  $p_{j,t_0}^{EQ}$  zum Zeitpunkt  $t_0$ . Die geforderte jährliche Rendite von Investor L wird als  $y_j^{L,EQ}$  definiert und die geforderte Rendite für Aktie  $j$  kann geschrieben werden als:

$$T \cdot y_j^{L,EQ} := \ln \left( \frac{\mathbb{E}_{t_0}(S_{j,T})}{p_{j,t_0}^{EQ}} \right). \quad (11.1)$$

Abbildung 11.1 zeigt die geforderten jährlichen Renditen von Investor L im Gleichgewicht in Abhängigkeit von der Länge des Anlagehorizontes  $T$ . Es wird deutlich, dass  $y_1^{L,EQ}$  und  $y_2^{L,EQ}$  monoton abnehmende Funktionen des Investitionszeitraumes  $T$  darstellen. Während Investor L bei einem Anlagehorizont von einem Jahr eine Rendite von Aktie 2 in Höhe von 94,6 % verlangt, damit er alle ausstehenden Anteile der Aktien erwirbt, reduziert sich die geforderte Rendite auf 12,9 % (p.a.) für  $T = 30$ . Das Ergebnis verdeutlicht die Wirksamkeit der Zeitdiversifikation und dessen Einfluss auf die optimale Portfolioallokation des Investors: Mit einem längeren Anlagehorizont des Investors L ist er bei sonst gleichen Bedingungen bereit, niedrigere Renditen (p.a.) für beide Aktien zu akzeptieren, um alle ausstehenden Aktien zu kaufen.

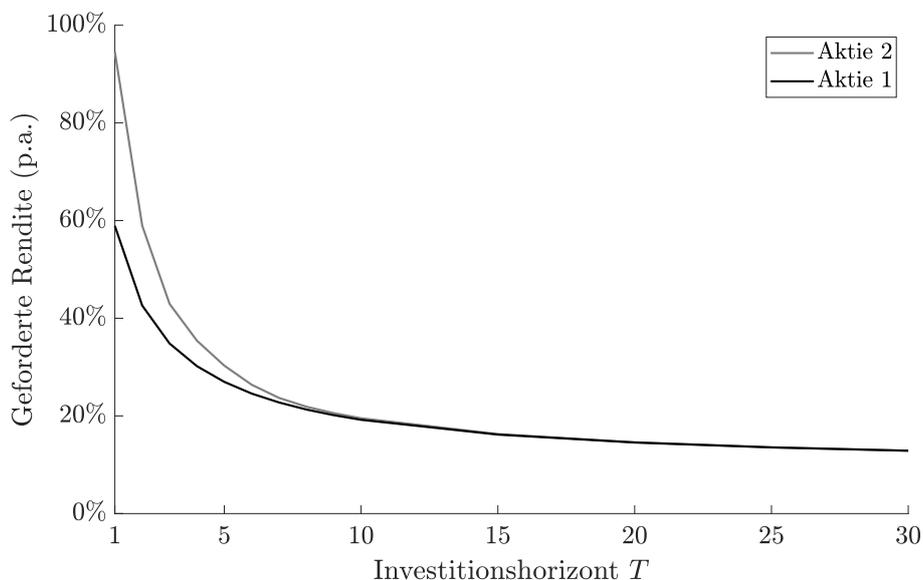
Darüber hinaus zeigen die geforderten Renditen in Abbildung 11.1, dass Investor L für Aktie 2 mit Katastrophenrisiko eine höhere jährliche Kompensation verlangt als für Aktie 1, da für alle berücksichtigten Anlagezeiträume  $T$  gilt, dass die geforderte Rendite für Aktie 2 die geforderte Rendite für Aktie 1 übersteigt:

$$y_2^{L,EQ} > y_1^{L,EQ}.$$

Die zusätzliche jährliche Vergütung  $y_2^{L,EQ} - y_1^{L,EQ}$ , die Investor L für Aktie 2 im Vergleich zu Aktie 1 einfordert, nimmt dabei mit der Länge des Anlagehorizontes  $T$  des Investors ab. Da beide Aktien die identische erwartete diskrete Rendite und Standardabweichung der Renditen aufweisen, Aktie 2 jedoch im Gleichgewicht einen niedrigeren Marktpreis als Aktie 1 aufweist, muss es eine positive Prämie für das mit Aktie 2 einhergehende Tail-

### Abbildung 11.1: Geforderte Renditen des langfristigen Investors L

Abbildung 11.1 zeigt die von Investor L für Aktie 1 und Aktie 2 geforderten Renditen (p.a.)  $y_1^{L,EQ}$  und  $y_2^{L,EQ}$ . Die geforderte Rendite ist als die annualisierte logarithmierte erwartete Rendite für beide Aktien im Gleichgewicht gemäß Gleichung (11.1) definiert. Die Länge der Investitionsperioden  $T$  von Investor L reichen von einem Jahr bis dreißig Jahren. Die Werte der zugrunde gelegten Parameter sind in Tabelle 11.1 gegeben.



Risiko geben. Die Schiefeprämie  $sk^{prem}$  wird dafür als die logarithmierte Preisdifferenz zwischen Aktie 1 und Aktie 2 im Gleichgewicht definiert und kann wie folgt ausgedrückt werden:

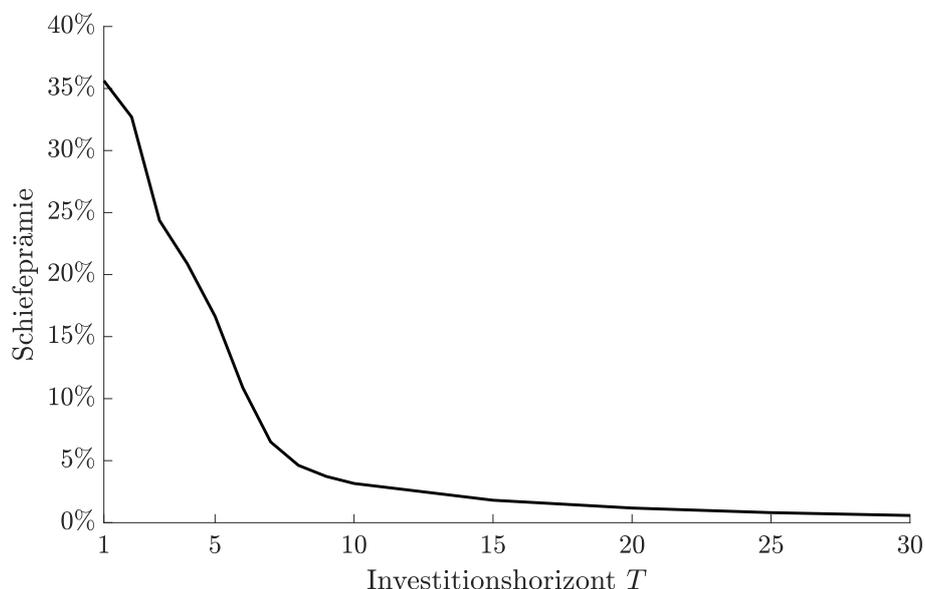
$$sk^{prem} := \ln \left( \frac{p_{1,t_0}^{EQ}}{p_{2,t_0}^{EQ}} \right). \quad (11.2)$$

Die Schiefeprämie misst demnach die zusätzliche Rendite von Aktie 2 relativ zu Aktie 1, die der Investor über den gesamten Anlagehorizont bis zum Zeitpunkt  $T$  als Ausgleich für das ungeliebte negative Sprungrisiko von Aktie 2 erhält. Abbildung 11.2 zeigt, dass die Schiefeprämie für alle berücksichtigten Längen des Anlagehorizontes  $T$  stets positiv ist. Dabei ist die Schiefeprämie eine abnehmende Funktion des Anlagehorizontes  $T$ , die von 35,6 % für  $T = 1$  auf 0,6 % für  $T = 30$  sinkt und bei längeren Anlagehorizonten gegen null konvergiert.

Bei kurzen Anlagehorizonten fordert Investor L daher eine relativ hohe zusätzliche Entschädigung dafür, dass er dem Risiko eines negativen Kurssprungs von Aktie 2 ausgesetzt

### Abbildung 11.2: Schiefeprämie

Abbildung 11.2 zeigt die resultierende Schiefeprämie  $sk^{prem}$  für Investitionsperioden  $T$  von Investor  $L$ , die von einem Jahr bis dreißig Jahren reichen. Die Schiefeprämie  $sk^{prem}$  ist die logarithmierte Preisdifferenz zwischen Aktie 1 und Aktie 2 im Gleichgewicht, wie in Gleichung (11.2) definiert. Die Werte der zugrunde gelegten Parameter sind in Tabelle 11.1 gegeben.



ist. Auch wenn die Wahrscheinlichkeit, dass ein oder mehrere Sprünge auftreten, relativ gering ist, führt bereits die Größe  $\zeta = -30\%$  eines Sprungs zu erheblichen Vermögensverlusten, von denen sich das Endvermögen über kurze Anlagehorizonte kaum erholt. Bei längeren Investitionshorizonten nimmt die Auswirkung negativer Sprünge auf das Endvermögen jedoch ab, da die Renditeverteilung von Aktie 2 für lange Investitionszeiträume  $T$  gegen die Renditeverteilung von Aktie 1 konvergiert, was durch den Grenzwert der Schiefe in Gleichung (10.11) zum Ausdruck gebracht wird. Intuitiv gesprochen wird die Portfoliorendite eines Investors über einen kürzeren Anlagezeitraum von einem überraschend auftretenden Sprung im Preis der Aktie also stärker beeinflusst als über einen längeren Anlagezeitraum.

Dementsprechend sind die Auswirkungen des Katastrophenrisikos auf das Portfolio von Investoren mit DRRA-Nutzen bei längeren Anlagehorizonten weniger stark ausgeprägt, sodass die Preise  $p_{1,t_0}^{EQ}$  und  $p_{2,t_0}^{EQ}$  für lange Anlagehorizonte  $T$  – trotz des Sprungrisikos in den Preisen von Aktie 2 – konvergieren. Die erste Implikation des Modells wird in dem folgenden Resultat zusammengefasst:

**Resultat 9 (Schiefepremie)** *Die Schiefepremie misst die zusätzliche Kompensation, die Investoren für die Aktie mit Tail-Risiken im Vergleich zur Aktie mit normalverteilten Renditen erhalten, wobei beide Aktien eine identische erwartete Rendite und Standardabweichung der Renditen aufweisen. Die Schiefepremie ist dabei positiv, nimmt mit dem Anlagehorizont  $T$  der Investoren ab und konvergiert gegen null für lange Anlagehorizonte. Dieses Resultat impliziert, dass Investoren – wenn sie über einen ausreichend langen Investitionshorizont verfügen – (annähernd) indifferent sind, ob sie die Aktie mit normalverteilten Renditen oder die Aktie mit Sprungrisiko halten.*

## 11.3 Investoren mit heterogenen Anlagehorizonten

Betrachtet wird nun eine Ökonomie mit sowohl langfristigen Investoren, die einen Investitionshorizont von zehn Jahren haben, als auch kurzfristigen Investoren, die die Ökonomie bereits nach fünf Jahren verlassen und ihre zum Zeitpunkt  $t_0$  erworbenen Aktienanteile an die Folge-Investoren verkaufen. Der residuale Anlagehorizont  $T - T_K$  der Folge-Investoren beträgt somit ebenfalls fünf Jahre. Es wird zunächst angenommen, dass in der Ökonomie gleich viele langfristige wie kurzfristige Investoren mit identischer monetärer Ausstattung existieren. Gemäß des Konzepts repräsentativer Investoren besitzen der repräsentative Investor L und der repräsentative Investor K folglich jeweils die Hälfte der gesamten Geldausstattung  $\bar{X}_{Cash}$  zum Zeitpunkt  $t_0$ :

$$\bar{X}_{Cash}^L = \bar{X}_{Cash}^K = 0,5.$$

Analog zum langfristigen Investor L im vorherigen Abschnitt können die geforderten Renditen des kurzfristigen Investors K und des Folge-Investors F wie folgt ausgedrückt werden: Im Gleichgewicht entspricht die geforderte Rendite von Investor K für Aktie  $j$  ( $j = 1, 2$ ) der logarithmierten Rendite zwischen dem erwarteten Gleichgewichtshandelspreis  $\mathbb{E}_{t_0} \left( p_{j,T_K}^{EQ} \right)$  zum Zeitpunkt  $T_K$  und dem Gleichgewichtshandelspreis  $p_{j,t_0}^{EQ}$  zum Zeitpunkt  $t_0$ . Mit  $y_k^{K,EQ}$ , definiert als die von Investor K geforderte jährliche Rendite, lässt sich diese wie folgt schreiben:

$$T_K \cdot y_k^{K,EQ} := \ln \left( \frac{\mathbb{E}_{t_0} \left( p_{j,T_K}^{EQ} \right)}{p_{j,t_0}^{EQ}} \right). \quad (11.3)$$

Entsprechend ist die geforderte Rendite des Folge-Investors F, bedingt auf die Erwartungen zum Zeitpunkt  $t_0$ , als die logarithmierte Rendite des erwarteten Fundamentalwertes  $\mathbb{E}_{t_0}(S_{j,T})$  zum Zeitpunkt  $T$  und des erwarteten Gleichgewichtshandelspreises  $\mathbb{E}_{t_0}(p_{j,T_K}^{EQ})$  zum Zeitpunkt  $T_K$  definiert:

$$(T - T_K) \cdot y_j^{F,EQ} := \ln \left( \frac{\mathbb{E}_{t_0}(S_{j,T})}{\mathbb{E}_{t_0}(p_{j,T_K}^{EQ})} \right), \quad (11.4)$$

wobei  $y_j^{F,EQ}$  die geforderte jährliche Rendite des Investors F zum Zeitpunkt  $t_0$  bezeichnet.

Da sich Investor K und Investor F den Investitionszeitraum des langfristigen Investors L aufteilen und zum Zeitpunkt  $T_K$  die Aktie 1 und Aktie 2 handeln, kann die geforderte Rendite von Investor L aus Gleichung (11.1) als die Summe der geforderten logarithmierten Renditen von Investor K und Investor F aus Gleichung (11.3) und (11.4) ausgedrückt werden. Formal kann dies wie folgt gezeigt werden: In einem ersten Schritt wird die geforderte Rendite von Investor L mithilfe bekannter Regeln der Logarithmusberechnung umgeschrieben als:

$$\ln \left( \frac{\mathbb{E}_{t_0}(S_{j,T})}{p_{j,t_0}^{EQ}} \right) = \ln(\mathbb{E}_{t_0}(S_{j,T})) - \ln(p_{j,t_0}^{EQ}).$$

Dieser Ausdruck kann nun mit den erwarteten Gleichgewichtshandelspreisen  $\mathbb{E}_{t_0}(p_{j,T_K}^{EQ}) - \mathbb{E}_{t_0}(p_{j,T_K}^{EQ})$  zum Zeitpunkt  $T_K$  wie folgt erweitert werden:

$$\ln \left( \frac{\mathbb{E}_{t_0}(S_{j,T})}{p_{j,t_0}^{EQ}} \right) = \ln(\mathbb{E}_{t_0}(S_{j,T})) - \mathbb{E}_{t_0}(p_{j,T_K}^{EQ}) + \mathbb{E}_{t_0}(p_{j,T_K}^{EQ}) - \ln(p_{j,t_0}^{EQ}).$$

Nach Umstellung resultiert der Zusammenhang

$$\ln \left( \frac{\mathbb{E}_{t_0}(S_{j,T})}{p_{j,t_0}^{EQ}} \right) = \ln \left( \frac{\mathbb{E}_{t_0}(p_{j,T_K}^{EQ})}{p_{j,t_0}^{EQ}} \right) + \ln \left( \frac{\mathbb{E}_{t_0}(S_{j,T})}{\mathbb{E}_{t_0}(p_{j,T_K}^{EQ})} \right), \quad (11.5)$$

wobei sich in dieser Gleichung die Ausdrücke für die geforderten Renditen des kurzfristigen Investors und des Folge-Investors aus Gleichung (11.3) und (11.4) wiederfinden. Setzt man die beiden Ausdrücke für die geforderten Renditen in Gleichung (11.5) ein und

dividiert durch die Länge  $T$  des gesamten Investitionszeitraums, so erhält man:

$$y_j^{L,EQ} = \frac{T_K}{T} \cdot y_j^{K,EQ} + \frac{T - T_K}{T} \cdot y_j^{F,EQ}. \quad (11.6)$$

Die Beziehung besagt, dass die geforderte jährliche Rendite von Investor L für Aktie  $j = 1, 2$  dem Durchschnitt der jeweils geforderten Renditen von Investor K und Investor F, gewichtet mit dem Anlagehorizont des jeweiligen Investors, entspricht.

Die von einem Investor geforderte Rendite wird dabei grundsätzlich von zwei Faktoren beeinflusst: zum einen von der Länge des Anlagehorizontes des Investors und zum anderen von der Anzahl der Aktien, die der Investor bei gegebener monetärer Anfangsausstattung insgesamt erwirbt.

Erstens ist aus den Erkenntnissen des vorangegangenen Abschnitts mit homogenen Anlagehorizonten bekannt, dass die geforderten Renditen (p.a.) für beide Aktien abnehmende Funktionen des Anlagehorizontes des Investors darstellen. Daraus folgt, dass für den Fall, dass der langfristige Investor L und der kurzfristige Investor K zum Zeitpunkt  $t_0$  gleich viele Anteile beider Aktien kaufen, die von Investor K geforderten Renditen für beide Aktien die entsprechenden Renditen, die Investor L fordert, übersteigen. Dies gilt entsprechend für den Folge-Investor F, das heißt, er verlangt aufgrund seiner kürzeren Anlageperiode ebenfalls höhere Renditen als Investor L für eine gegebene Anzahl an Aktien. Bei identischer Anzahl an gekauften Anteilen der beiden Aktien  $X_j^K = X_j^L = 0,25$  übersteigt die rechte Seite der Gleichung (11.6) somit die linke Seite, sodass diese Allokation kein Gleichgewicht darstellen kann:

$$y_j^L < \frac{T_K}{T} \cdot y_j^K + \frac{T - T_K}{T} \cdot y_j^F. \quad (11.7)$$

Infolgedessen können der langfristige Investor L und der kurzfristige Investor K im Gleichgewicht nicht die identische Anzahl beider Aktien kaufen.

Zweitens führt eine Reduzierung (Erhöhung) der gekauften Anteile einer Aktie, ceteris paribus, zu einer geringeren (höheren) geforderten Rendite für diese Aktie. Tabelle 11.2 zeigt die Aktienanzahl, die Investor K und Investor L im Gleichgewicht erwerben und Tabelle 11.3 die jeweils geforderten jährlichen Renditen. Im betrachteten Beispiel reduziert Investor K die Anzahl der gekauften Aktien von jeweils 0,25 auf 0,21 Anteile von Aktie 1

**Tabelle 11.2: Gleichgewichtsergebnisse mit heterogenen Investoren**

Tabelle 11.2 zeigt die wichtigsten Eigenschaften der Ökonomie mit gleichem Anteil von kurzfristigen Investoren und langfristigen Investoren mit  $T = 10$  und  $T_K = 5$ . Die Aktienquote bezeichnet den Wert des Portfolios bestehend aus Aktie 1 und Aktie 2 zum Zeitpunkt  $t_0$  als Anteil des Anfangsvermögens. Der in Aktie 2 investierte Anteil ist definiert als der in Aktie 2 investierte Wert geteilt durch den Wert des risikobehafteten Portfolios zum Zeitpunkt  $t_0$ .  $X_1^{EQ}$  und  $X_2^{EQ}$  bezeichnen die im Gleichgewicht erworbenen Einheiten von Aktie 1 und Aktie 2. Die Schiefeprämie  $sk^{prem}$  aus Gleichung (11.2) ist definiert als die logarithmische Preisdifferenz zwischen Aktie 1 und Aktie 2 im Gleichgewicht.

Investor	Gewichtung				
	Aktienquote	Aktie 2	$X_1^{EQ}$	$X_2^{EQ}$	$sk^{prem}$
L	41,8 %	51,4 %	0,29	0,33	7,2 %
K	25,3 %	43,0 %	0,21	0,17	

**Tabelle 11.3: Geforderte Renditen der Investoren**

Tabelle 11.3 zeigt die jährlichen Renditen, die in einer Ökonomie mit gleichem Anteil an kurzfristigen Investoren und langfristigen Investoren mit  $T = 10$  und  $T_K = 5$  von den Investoren gefordert werden. Die geforderten Renditen des repräsentativen Investors L, des Investors K und des Investors F sind in den Gleichungen (11.1), (11.3) und (11.4) gegeben.

Investor	$y_1^{EQ}$	$y_2^{EQ}$
L	20,6 %	21,3 %
K	15,7 %	15,4 %
F	25,4 %	27,2 %

und 0,17 Anteile von Aktie 2. Dies senkt die geforderten Renditen auf der rechten Seite von Gleichung (11.7).

Zusätzlich kann  $y_j^{F, EQ}$  als der zum Zeitpunkt  $t_0$  erwartete Diskontsatz interpretiert werden, den Investor K zum Diskontieren des erwarteten Fundamentalwertes  $\mathbb{E}_{t_0}(S_{j,T})$  anwendet. Investor K antizipiert die geforderten jährlichen Renditen des Folge-Investors F, die 25,4 % für Aktie 1 und 27,2 % für Aktie 2 betragen. Für die reduzierten Aktienkäufe im Gleichgewicht fordert Investor K lediglich eine Rendite von 15,7 % beziehungsweise 15,4 %.

Analog dazu erhöht Investor L seinen Aktienbestand und kauft 0,29 Einheiten von Aktie 1 und 0,33 Einheiten von Aktie 2 mit Sprungrisiko im Gleichgewicht, was wiederum die geforderte jährliche Rendite auf der linken Seite von Gleichung (11.7) auf 20,6 % beziehungsweise 21,3 % erhöht. Die von Investor K und Investor L im Gleichgewicht gekauften Aktienanteile gewährleisten, dass die Beziehung zwischen den geforderten Renditen in Gleichung (11.6) gilt. Tabelle 11.2 zeigt, dass Investor L 41,8 % seines Vermögens in die beiden Aktien investiert, während das Portfolio von Investor K eine Aktienquote von nur 25,3 % aufweist. Die Implikation des Modells lässt sich wie folgt zusammenfassen:

**Resultat 10 (Aktienquote)** *In einer Ökonomie mit Investoren, die sich lediglich hinsichtlich der Länge ihrer Anlagehorizonte unterscheiden, wählen langfristige Investoren eine höhere Aktienquote als kurzfristige Investoren. Bedingt durch die Nutzenfunktion mit abnehmender relativer Risikoaversion fordern Investoren mit einem längeren Investitionszeitraum eine geringere Rendite als Investoren mit einem kürzeren Investitionszeitraum. Für die sich einstellenden Handelspreise der beiden Aktien im Gleichgewicht erwerben langfristige Investoren eine größere Anzahl beider Aktien als kurzfristige Investoren, sodass das Portfolio der langfristigen Investoren durch eine höhere Aktienquote gekennzeichnet ist.*

Gleichung (11.6) kann darüber hinaus zur Herleitung der Beziehung zwischen der zusätzlichen jährlichen Rendite verwendet werden, die von den Investoren für Aktie 2 mit Tail-Risiko im Vergleich zu Aktie 1 im Gleichgewicht gefordert wird:

$$y_2^{L,EQ} - y_1^{L,EQ} = \frac{T_K}{T} \cdot (y_2^{K,EQ} - y_1^{K,EQ}) + \frac{T - T_K}{T} \cdot (y_2^{F,EQ} - y_1^{F,EQ}).$$

Die Beziehung besagt, dass die zusätzliche Rendite (p.a.), die Investor L für Aktie 2 im Gleichgewicht verlangt, dem Durchschnitt der zusätzlich geforderten Renditen von Investor K und Investor F, gewichtet mit ihren jeweiligen Anlagehorizonten, entspricht.

Das Ergebnis aus dem vorherigen Abschnitt mit homogenen Anlagehorizonten verdeutlicht, dass die zusätzlich geforderte Rendite (p.a.) für Aktie 2 im Vergleich zu Aktie 1 mit dem Anlagehorizont des Investors abnimmt. Damit Investor L und Investor K gleich viele Aktienanteile erwerben, benötigen Investor K und Investor F daher im Durchschnitt

eine höhere zusätzliche Kompensation als Investor L, sodass für  $X_j^K = X_j^L = 0,25$  gilt:

$$y_2^L - y_1^L < \frac{T_K}{T} \cdot (y_2^K - y_1^K) + \frac{T - T_K}{T} \cdot (y_2^F - y_1^F). \quad (11.8)$$

Es folgt, dass die paritätische Allokation kein Gleichgewicht darstellen kann und Investor L beziehungsweise Investor K im Gleichgewicht nicht jeweils gleich viele Einheiten von Aktie 1 beziehungsweise Aktie 2 kaufen können.

Da eine Reduktion (Erhöhung) der von einem Investor gekauften Einheiten der Aktie 2 bei sonst gleichen Bedingungen die für Aktie 2 geforderte zusätzliche Vergütung verringert (erhöht), erwirbt Investor L (Investor K) im Gleichgewicht 0,04 Einheiten mehr (weniger) von Aktie 2 als von Aktie 1. Dies erhöht die zusätzlich geforderte Rendite von Investor L auf der linken Seite von Gleichung (11.8) und reduziert die geforderte Rendite von Investor K und Investor F auf der rechten Seite der Gleichung. Die von Investor L geforderte zusätzliche Rendite beträgt im Gleichgewicht 0,7 Prozentpunkte und entspricht dem gewichteten Durchschnitt der geforderten Renditen von Investor K und F: Während Investor F im Gleichgewicht eine zusätzliche Kompensation von 1,8 Prozentpunkten (p.a.) fordert, verlangt Investor K für Aktie 1 eine höhere Rendite als für Aktie 2 von 0,3 Prozentpunkten aufgrund der geringeren Anzahl an Aktien von Aktie 2 im Vergleich zu Aktie 1, die Investor K zum Zeitpunkt  $t_0$  erwirbt.

Daraus lässt sich schließen, dass sich die Zusammensetzungen der Portfolios der Investoren im Gleichgewicht unterscheiden: Neben der höheren Aktienquote des langfristigen Investors L zeigt Tabelle 11.2, dass das Aktienportfolio von Investor L durch eine höhere Gewichtung von Aktie 2 mit 51,4 %, im Vergleich zu 43,0 % von Investor K, gekennzeichnet ist. Für die resultierende Schiefeprämie von 7,2 % im Gleichgewicht ist der langfristige Investor L demnach bereit, relativ und absolut mehr Tail-Risiko zu übernehmen als der kurzfristige Investor K.

Dieses Ergebnis stellt einen wesentlichen Unterschied zu der Schlussfolgerung des CAPM dar, wonach alle Marktteilnehmer einen Teil ihres Vermögens in ein identisches Portfolio risikobehafteter Vermögenswerte, dem Marktportfolio, investieren, das als Two-Fund-Separationstheorem bekannt ist (Copeland et al., 2005). Die Implikation des Modells lässt sich wie folgt zusammenfassen:

**Resultat 11 (Portfoliozusammensetzung)** *Mit heterogenen Anlagehorizonten, Marktteilnehmern mit einer Nutzenfunktion, die durch abnehmende relative Risikoaversion charakterisiert ist, und Vermögenswerten mit schiefer Renditeverteilung zeigt sich, dass Investoren unterschiedliche Zusammensetzungen des risikobehafteten Portfolios wählen, was dem Two-Fund-Separationstheorem – demnach alle Investoren in das identische Portfolio risikobehafteter Vermögenswerte investieren – widerspricht. Bei lediglich unterschiedlicher Länge ihrer Anlagehorizonte wählen langfristige Investoren ein höheres Portfoliogewicht in Vermögenswerten mit Tail-Risiken als kurzfristige Investoren.*

*Während Marktteilnehmer, unabhängig von der Länge ihres Investitionszeitraums, das Risiko ihres Portfolios durch eine breite Streuung auf verschiedene Aktien und Anlageklassen reduzieren können, existiert eine weitere Möglichkeit der (kostenlosen) Diversifikation, die durch den Investitionszeitraum des Investors exogen gegeben ist: Durch einen längeren Anlagehorizont sind Investoren weniger stark vom Tail-Risiko eines Vermögenswertes betroffen als Investoren mit kürzeren Anlagezeiträumen, sodass langfristige Investoren (relativ) mehr Aktien mit Katastrophenrisiko in ihr Portfolio aufnehmen als kurzfristige Investoren.*

## 11.4 Variierender Anteil von Investoren

Bei der zuvor betrachteten Ökonomie mit heterogenen Anlagehorizonten wurde davon ausgegangen, dass der Anteil kurzfristiger und langfristiger Investoren gleich groß ist, sodass der repräsentative langfristige Investor L und der kurzfristige Investor K die gleiche Geldausstattung aufweisen. Durch Variation der anfänglichen Geldausstattung  $\bar{X}_{Cash}^L$  und  $\bar{X}_{Cash}^K$  bei gegebener aggregierter monetärer Ausstattung  $\bar{X}_{Cash}$  aus Gleichung (10.2) kann nun die Zusammensetzung der Investoren in der Wirtschaft verändert werden, um so deren Auswirkung auf die Schiefeprämie abzuleiten. Je größer die Anfangsausstattung  $\bar{X}_{Cash}^K$  des kurzfristigen Investors auf Kosten der Anfangsausstattung  $\bar{X}_{Cash}^L$  des langfristigen Investors gewählt wird, desto höher ist der Anteil der kurzfristigen Investoren aller Marktteilnehmer in der Wirtschaft. Tabelle 11.4 fasst die wesentlichen Eigenschaften der Ökonomien im Gleichgewicht für verschiedene Anteile kurzfristiger Investoren zusammen. Die Länge des Investitionszeitraumes des langfristigen Investors L entspricht nach wie vor zehn Jahren und die des kurzfristigen Investors K fünf Jahren.

**Tabelle 11.4: Variierender Anteil kurz- und langfristiger Investoren**

Tabelle 11.4 zeigt die wesentlichen Merkmale von Ökonomien mit Anteilen kurzfristiger Investoren von 0 % bis 100 % durch Anpassung der Anfangsausstattung  $\bar{X}_{Cash}^L$  und  $\bar{X}_{Cash}^K$  der repräsentativen Investoren bei gegebener Gesamtgeldausstattung  $\bar{X}_{Cash}$  mit  $T = 10$  und  $T_K = 5$ . Die Aktienquote bezeichnet den Wert des Portfolios bestehend aus Aktie 1 und Aktie 2 zum Zeitpunkt  $t_0$  als Anteil des Anfangsvermögens. Der in Aktie 2 investierte Anteil ist definiert als der in Aktie 2 investierte Wert geteilt durch den Wert des risikobehafteten Portfolios zum Zeitpunkt  $t_0$ .  $X_1^{EQ}$  und  $X_2^{EQ}$  bezeichnen die im Gleichgewicht erworbenen Einheiten von Aktie 1 und Aktie 2. Die Schiefeprämie  $sk^{prem}$  aus Gleichung (11.2) ist als die logarithmische Preisdifferenz zwischen Aktie 1 und Aktie 2 im Gleichgewicht definiert.

Anteil von Investor K	Gewichtung					
	Investor	Aktienquote	Aktie 2	$X_1^{EQ}$	$X_2^{EQ}$	$sk^{prem}$
0 %	L	39,2 %	49,2 %	0,5	0,5	3,2 %
25 %	L	40,6 %	50,2 %	0,41	0,43	4,9 %
	K	22,9 %	41,0 %	0,09	0,07	
50 %	L	41,8 %	51,4 %	0,29	0,33	7,2 %
	K	25,3 %	43,0 %	0,21	0,17	
75 %	L	44,9 %	52,4 %	0,15	0,19	10,5 %
	K	28,8 %	44,8 %	0,35	0,31	
100 %	K	29,6 %	46,9 %	0,5	0,5	12,6 %

In Abwesenheit kurzfristiger Investoren erwirbt Investor L die ausstehenden 0,5 Einheiten jeder Aktie im Gleichgewicht. Dieser Fall entspricht der in Abschnitt 11.2 berücksichtigten Ökonomie mit homogenen Investitionshorizonten mit  $T = 10$ . Das Portfolio des repräsentativen Investors weist eine Aktienquote von 39,2 % auf. Das Investment in Aktie 2 mit Tail-Risiko macht dabei 49,2 % des Gesamtvolumens des risikoreichen Portfolios aus. Die Schiefeprämie beträgt 3,2 %.

Bei einem Anteil von 25 % aller Investoren, die kurzfristig orientiert sind, ist der repräsentative langfristige Investor L im Zeitpunkt  $t_0$  mit dreimal so viel Bargeld ausgestattet wie der kurzfristige Investor K. Bei identischem Kaufverhalten der beiden Investoren würde der kurzfristige Investor K demnach 0,125 Anteile und der langfristige Investor L 0,375

Anteile jeder Aktie kaufen. Da der kurzfristige Investor K und Folge-Investor F jedoch höhere jährliche Renditen für beide Aktien und eine höhere zusätzliche Kompensation für Aktie 2 im Vergleich zu Aktie 1 als der langfristige Investor L fordern, kann die paritätische Aufteilung der Aktien bezogen auf die monetäre Anfangsausstattung der Investoren kein Gleichgewicht darstellen.

Um die Äquivalenz in Gleichung (11.6) für Aktie 1 und Aktie 2 im Gleichgewicht zu erfüllen, reduziert Investor K seine Aktienposition ausgehend von der beschriebenen Allokation auf 0,09 Anteile von Aktie 1 und 0,07 Anteile von Aktie 2. Dementsprechend erhöht Investor L die gekauften Aktienanteile auf 0,41 Einheiten von Aktie 1 und 0,43 Einheiten von Aktie 2. Die Aktienquote von Investor L steigt von 39,2 % bei lediglich langfristigen Investoren in der Ökonomie auf 40,6 % im betrachteten Beispiel. In ähnlicher Weise steigt der in Aktie 2 investierte Anteil des riskanten Portfolios von Investor L von 49,2 % auf 50,2 % und die Schiefeprämie erhöht sich von 3,2 % auf 4,9 %.

Mit 75 % kurzfristigen Investoren in der Ökonomie steigt die Aktienquote von Investor L auf 44,9 % und die in Aktie 2 investierte Quote auf 52,4 %. Die Schiefeprämie steigt auf 10,5 %. Bei ausschließlich kurzfristigen Investoren in der Ökonomie kauft Investor K im Gleichgewicht alle ausstehenden Aktienanteile. Die resultierende Schiefeprämie beträgt 12,6 % und ist damit viermal so hoch wie bei ausschließlich langfristigen Investoren in der Ökonomie. Die Ergebnisse verdeutlichen die Auswirkung der Zusammensetzung der Investoren im Markt auf die Schiefeprämie und auf die optimalen Portfolioallokationen der Investoren. Die Ergebnisse des Modells können wie folgt zusammengefasst werden:

**Resultat 12 (Marktteilnehmer)** *Die sich im Rahmen des Gleichgewichtsmodells einstellende Schiefeprämie hängt von der Zusammensetzung der Investoren in der Ökonomie ab. Da kurzfristige Investoren eine höhere zusätzliche jährliche Rendite für Vermögenswerte mit Tail-Risiken fordern als langfristige Investoren, steigt die Schiefeprämie mit dem Anteil kurzfristiger Investoren aller Marktteilnehmer in der Ökonomie. Mit einem größeren Anteil kurzfristiger Investoren im Markt wählen langfristige Investoren neben einer höheren Aktienquote ein größeres Portfoliogewicht in Vermögenswerten mit Tail-Risiken. Durch die höhere Schiefeprämie – induziert durch den höheren Anteil kurzfristiger Investoren – sind die langfristigen Investoren bereit, ein höheres Katastrophenrisiko in ihr Portfolio aufzunehmen.*

# Kapitel 12

## Robustheitsanalyse

In diesem Kapitel werden die Auswirkungen von Parameteränderungen auf die wesentlichen Eigenschaften der Ökonomie im Gleichgewicht mit heterogenen Investitionshorizonten analysiert, um so weitere Faktoren, die die Höhe der Schiefeprämie beeinflussen, zu identifizieren. Zu diesem Zweck wird jeweils ein Parameter aus dem zuvor verwendeten Parametersatz, der in Tabelle 11.1 in Abschnitt 11.1 zusammengefasst ist, modifiziert. Die Gleichgewichtsergebnisse sind in Tabelle 12.1 dargestellt, wobei die erste Zeile die Ergebnisse aus Tabelle 11.2 mit heterogenen Investoren aus Abschnitt 11.3 rekapituliert und nachfolgend als Benchmark bezeichnet wird.

### 12.1 Aktienpreisprozesse

Die ersten drei Analysen befassen sich mit Änderungen der Parameter bezüglich der Spezifikation der beiden Aktienpreisprozesse. Zunächst wird eine größere negative Sprunggröße  $\zeta$  von  $-40\%$  von Aktie 2 betrachtet, wobei die Standardabweichung der Renditen  $\sigma$  konstant bei  $20\%$  gehalten wird. Die sprungadjustierte Drift  $\mu_J$  und die Standardabweichung  $\sigma_J$  werden gemäß den Gleichungen (10.7) und (10.10) angepasst. So wird sichergestellt, dass sowohl die erwartete diskrete Rendite beider Aktien als auch die Standardabweichung der Renditen beider Aktien weiterhin übereinstimmen. Aus Gleichung (10.11) folgt, dass die sich ergebende negative Schiefe der Renditen von Aktie 2 stärker ausgeprägt ist als noch im Rahmen der Benchmark-Analyse mit der Sprunggröße  $\zeta$  von  $-30\%$ . Tabelle 12.1

zeigt, dass der langfristige Investor L und der kurzfristige Investor K jeweils identisch viele Anteile der beiden Aktien im Vergleich zur Benchmark kaufen. Dementsprechend tragen sowohl Investor L als auch Investor K mehr Tail-Risiken, für die die Investoren eine höhere Kompensation verlangen: Die Schiefeprämie verdoppelt sich von 7,2 % in der Benchmark auf fast 13,6 %.<sup>13</sup>

Die beiden nächsten Robustheitsanalysen berücksichtigen sowohl eine höhere als auch eine niedrigere Standardabweichung  $\sigma$  der Aktienrenditen. Für die feste Sprunggröße  $\zeta = -30\%$  wird die Standardabweichung  $\sigma_J$  unter der Bedingung, dass kein Sprung auftritt, gemäß Gleichung (10.10) für Aktie 2 angepasst. Aus Gleichung (10.11) folgt, dass eine höhere (niedrigere) Standardabweichung  $\sigma$  die negative Schiefe der Renditen von Aktie 2 reduziert (erhöht). Eine höhere Standardabweichung der Renditen beider Aktien von 24 % verringert dementsprechend die Schiefeprämie im Gleichgewicht auf 2,3 %. Im Gegensatz dazu führt eine geringere Standardabweichung von 16 % zu einer Schiefeprämie von 24,2 %, die mehr als dreimal so hoch ist im Vergleich zur resultierenden Prämie in der Benchmark. Es kann daher geschlussfolgert werden, dass die Höhe des Tail-Risikos im Vergleich zum Gesamtrisiko von Bedeutung ist. Wenn das Tail-Risiko im Verhältnis zum Gesamtrisiko der Aktie hoch ist, resultieren ein höherer (negativer) Wert für die Schiefe und eine ebenfalls stärker ausgeprägte Schiefeprämie im Rahmen des Modells.

## 12.2 Nutzenfunktion

Die folgenden beiden Robustheitsprüfungen beziehen sich auf die Spezifikationen der Nutzenfunktion der Investoren mit abnehmender relativer Risikoaversion aus Gleichung (10.12). Konkret wird die Auswirkung einer erhöhten relativen Risikoaversion aus Gleichung (10.13) analysiert, indem zum einen der Risikoaversionsparameter  $\gamma$  und zum anderen die Höhe des mindestens erforderlichen Kapitalbedarfs  $\eta$  zum Ende des Investitionszeitraums der Investoren erhöht werden.

Erstens erwirbt Investor L (Investor K) durch die Erhöhung des Risikoaversionsparameters  $\gamma$  von 4 auf 6 mehr (weniger) Anteile von Aktie 1, während die gekauften Aktienanteile von Aktie 2 im Vergleich zur Benchmark unverändert bleiben. Die Schiefeprämie erhöht

---

<sup>13</sup>Ähnliche Effekte treten bei Erhöhung der Sprungintensität  $\lambda$  auf.

**Tabelle 12.1: Robustheitsanalyse**

Tabelle 12.1 zeigt die Gleichgewichtsergebnisse für ausgewählte Parameteränderungen des in Tabelle 11.1 angegebenen Parametersatzes mit  $T = 10$  und  $T_K = 5$ . Die Aktienquote bezeichnet den Wert des Portfolios bestehend aus Aktie 1 und Aktie 2 zum Zeitpunkt  $t_0$  als Anteil des Anfangsvermögens. Der in Aktie 2 investierte Anteil ist definiert als der in Aktie 2 investierte Wert geteilt durch den Wert des risikobehafteten Portfolios zum Zeitpunkt  $t_0$ .  $X_1^{EQ}$  und  $X_2^{EQ}$  bezeichnen die im Gleichgewicht erworbenen Einheiten von Aktie 1 und Aktie 2. Die Schiefeprämie  $sk^{prem}$  aus Gleichung (11.2) ist definiert als die logarithmische Preisdifferenz zwischen Aktie 1 und Aktie 2 im Gleichgewicht. Die Benchmark rekapituliert dabei die Ergebnisse aus Tabelle 11.2 aus Abschnitt 11.3.

	Gewichtung					
	Investor	Aktienquote	Aktie 2	$X_1^{EQ}$	$X_2^{EQ}$	$sk^{prem}$
Benchmark	L	41,8 %	51,4 %	0,29	0,33	7,2 %
	K	25,3 %	43,0 %	0,21	0,17	
$\zeta = -40$ %	L	41,8 %	49,2 %	0,29	0,33	13,6 %
	K	25,7 %	42,4 %	0,21	0,17	
$\sigma = 24$ %	L	33,8 %	51,6 %	0,31	0,33	2,3 %
	K	19,1 %	45,5 %	0,19	0,17	
$\sigma = 16$ %	L	49,2 %	44,9 %	0,28	0,29	24,2 %
	K	36,5 %	42,7 %	0,22	0,21	
$\gamma = 6$	L	33,9 %	49,9 %	0,31	0,33	7,8 %
	K	18,9 %	44,8 %	0,19	0,17	
$\eta = 0,9$	L	34,3 %	50,7 %	0,29	0,35	16,0 %
	K	19,0 %	37,5 %	0,21	0,15	
$T = 20$ & $T_K = 10$	L	42,9 %	50,3 %	0,32	0,33	1,4 %
	K	23,6 %	47,6 %	0,18	0,17	

sich dabei um 60 Basispunkte von 7,2 % auf 7,8 %. Dementsprechend führt ein höherer Risikoaversionsparameter  $\gamma$  der Investoren zu einer größeren Schiefeprämie.

Zweitens zeigt sich, dass die Erhöhung des Existenzminimums der Investoren von  $\eta = 0,8$  auf  $\eta = 0,9$  die Schiefeprämie mehr als verdoppelt. Entgegen eines Verlustes von weniger als 20 % sind die Marktteilnehmer nun lediglich bereit, weniger als 10 % ihres Vermögens zum Ende des Anlagehorizontes zu verlieren. Die Erhöhung des Existenzminimums  $\eta$  führt dazu, dass Investoren dem Tail-Risiko gegenüber besonders stark abgeneigt

sind und dementsprechend für Aktie 2 mit Tail-Risiko im Vergleich zu Aktie 1 mit normalverteilten Renditen eine höhere zusätzliche Kompensation als in der Benchmark verlangen. Dabei ist dieser Effekt für den kurzfristigen Anleger K stärker ausgeprägt: Bei der resultierenden Schiefeprämie von 16 % im Gleichgewicht erhöht (verringert) Investor L (Investor K) die Anzahl der gekauften Anteile von Aktie 2 im Vergleich zur Benchmark, während die Aktienpositionen der Aktie 1 beider Investoren im Vergleich zur Benchmark unverändert bleiben.

## 12.3 Investitionszeitraum

Während die bisher betrachtete Ökonomie mit heterogenen Investoren einen Anlagehorizont von zehn Jahren der langfristigen Investoren und von fünf Jahren der kurzfristigen Investoren berücksichtigt, werden nun abschließend längere Investitionsperioden der Investoren unterstellt. Dazu werden langfristige Investoren mit einem Investitionszeitraum von zwanzig Jahren und kurzfristige und Folge-Investoren mit jeweils zehn Jahren unterstellt.

Mit den nunmehr längeren Investitionszeiträumen aller Investoren reduziert sich die Schiefeprämie von 7,2 % in der Benchmark auf 1,4 %. Während das Portfolio der langfristige Investor weiterhin eine deutlich höhere Aktienquote mit 42,9 % im Vergleich zum kurzfristigen Investor mit 23,6 % aufweist, nähern sich die jeweiligen Portfoliogewichte in Aktie 2 mit Tail-Risiko der beiden Investoren an: Durch einen Investitionszeitraum von zehn Jahren sind Investor K und Investor F bereit, einen relativ größeren Anteil von Aktie 2 mit Tail-Risiken in ihr Portfolio aufzunehmen als in der Benchmark. Die von Investor K und Investor F zusätzlich für Aktie 2 geforderten Renditen pro Jahr reduzieren sich damit deutlicher als die von Investor L zusätzlich geforderte Kompensation durch die jeweils doppelte Länge der Anlagehorizonte. Dieses Ergebnis steht im Einklang mit den Resultaten aus Abschnitt 11.2, demzufolge die von einem Investor zusätzlich geforderte Rendite für Aktie 2 mit Tail-Risiko im Vergleich zu Aktie 1 eine abnehmende Funktion des Investitionshorizontes mit abnehmender Steigung darstellt, wie durch die Schiefeprämie in Abhängigkeit des Investitionshorizontes in Abbildung 11.2 dargestellt.

Die Robustheitsprüfungen in diesem Abschnitt zeigen zum einen, dass die zuvor abgeleiteten Resultate und Implikationen nicht nur für spezifische Parameter der DRRA-

Nutzenfunktion oder der zugrunde liegenden Prozesse der Aktien gelten, sondern vielmehr für eine breite Spanne verschiedener Parameterkonstellationen Gültigkeit beweisen. Zum anderen führen die Parametermodifikationen zu ökonomisch begründbaren Änderungen der Gleichgewichtsergebnisse aus Abschnitt 11.3. Daher erlaubt dieses Kapitel die Identifikation weiterer Faktoren, die die Höhe der Schiefeprämie im Rahmen des Modells beeinflussen. Hinsichtlich der Auswirkungen dieser Faktoren auf die Schiefeprämie lässt sich Folgendes zusammenfassend festhalten:

**Resultat 13 (Einflussfaktoren auf die Schiefeprämie)** *Zum einen steigt die Schiefeprämie mit der negativen Schiefe der Renditeverteilung eines Vermögenswertes. Wenn das Tail-Risiko im Verhältnis zum Gesamtrisiko eines Vermögenswertes hoch ist, resultiert somit eine ebenfalls stärker ausgeprägte Schiefeprämie im Rahmen des Modells. Mit der unterstellten geometrischen Brownschen Bewegung mit Poisson-verteiltern Sprüngen ist dies für eine größere negative Sprunggröße, eine höhere Sprungintensität sowie eine geringe Gesamtvolatilität, ceteris paribus, der Fall (vgl. Gleichung 10.11). Zum anderen wird die Schiefeprämie positiv von der relativen Risikoaversion der Investoren beeinflusst, die mit der DRRA-Nutzenfunktion durch den Risikoaversionsparameter  $\gamma$  und das Existenzminimum  $\eta$  zum Ende eines Anlagehorizontes spezifiziert ist. Dahingehend reduziert ein längerer Anlagehorizont der heterogenen Investoren die resultierende Schiefeprämie, analog zu Resultat 9 für homogene Investoren aus Abschnitt 11.2.*

# Kapitel 13

## Zusammenfassende Beurteilung

In diesem Teil der vorliegenden Dissertation wird ein theoretisches Framework vorgestellt, das es ermöglicht, die Auswirkungen von Tail-Risiken auf die Preise von Vermögenswerten und die optimale Portfolioallokation von Investoren zu analysieren. Zum Verständnis der Einflussfaktoren für Schiefeprämien wird ein aufschlussreiches mehrperiodiges Gleichgewichtsmodell eingeführt, das heterogene Anlagehorizonte und Investoren mit abnehmender relativer Risikoaversion berücksichtigt. So kann das empirisch beobachtete Verhalten von Marktteilnehmern aufgegriffen werden, einen größeren Teil des Vermögens in Aktien zu investieren, wenn sie über längere Investitionszeiträume verfügen. In dem vorgestellten Modell wählen mit Geld ausgestattete Investoren eine den erwarteten Nutzen maximierende Portfolioallokation aus einer risikofreien Investitionsmöglichkeit und zwei Aktien mit identischer erwarteter Rendite und Standardabweichung, die jedoch einen unterschiedlichen Grad an Schiefe aufweisen. Während eine Aktie normalverteilte Renditen aufweist, ist die andere Aktie dem Risiko negativer Sprünge im Aktienwert ausgesetzt. Die Portfoliozusammensetzung der Investoren und die (endogenen) Marktpreise im Gleichgewicht ermöglichen eine rigorose Analyse der Präferenzen der Investoren hinsichtlich der Tail-Risiken in Abhängigkeit ihrer jeweiligen Anlagehorizonte sowie die Analyse der resultierenden Schiefeprämien.

Während gemäß des CAPM nur die erwarteten Renditen und Standardabweichungen der Gesamtportfoliorenditen zur Bestimmung der optimalen Portfolioallokation von Relevanz sind, erklärt das eingeführte empirisch begründete Modell, dass Anleger die Verteilungseigenschaften der Renditen von Vermögenswerten, die über das zweite (zentrale) Moment

---

hinausgehen, in ihre Portfolioallokationsentscheidung miteinbeziehen. Da Investoren für die Aktie mit Katastrophenrisiko eine im Vergleich zu der Aktie mit normalverteilten Renditen höhere Rendite fordern, resultiert eine positive Schiefeprämie. Die Schiefeprämie bezeichnet also die zusätzliche Rendite eines Vermögenswertes über die Standardabweichung der Renditen hinaus aufgrund der Tail-Risiken dieser Aktie.

Ein wesentliches Ergebnis des Modells ist, dass diese Schiefeprämie mit der Länge des Anlagezeitraums der Investoren abnimmt, da ein (überraschender) Sprung im Preis einer Aktie das Endvermögen von Investoren mit einem kürzeren Anlagezeitraum stärker beeinflusst als von Investoren mit einer längeren Investitionsperiode. Bei heterogenen Anlagehorizonten der Investoren halten langfristige Investoren im Gleichgewicht des Modells sowohl eine höhere Aktienquote als auch ein höheres Portfoliogewicht in dem Vermögenswert mit negativer Schiefe als kurzfristige Investoren. Als wesentlicher Unterschied zum grundlegenden CAPM resultiert somit, dass die Two-Fund-Separation im Rahmen des eingeführten Modells nicht mehr gilt und Investoren aufgrund des Tail-Risikos unterschiedliche Portfolios risikobehafteter Vermögenswerte halten.

Die Ergebnisse des Modells bieten eine interessante Grundlage für eine empirische Analyse der Auswirkungen heterogener Anlagehorizonte auf die Schiefeprämie: Erstens ist die Implikation des Modells, dass zusätzliche Prämien für Vermögenswerte mit Tail-Risiken existieren, nicht auf den Aktienmarkt beschränkt, sondern gilt auch für andere Anlageklassen. Der Anleihemarkt kann hier als ein Beispiel mit stark ausgeprägter negativer Schiefe genannt werden, wie dies insbesondere bei Hochzinsanleihen der Fall ist. Ebenso sollten Vermögenswerte mit positiver Schiefe, wie Wachstumsaktien oder lotterieähnliche Risikokapitalinvestitionen (Venture Capital), bei sonst gleichen Bedingungen, niedrigere erwartete Renditen erbringen, da rationale Investoren Kapitalanlagen mit positiver Schiefe der Renditen bevorzugen. Zweitens kann es aus Anlegersicht für längerfristig orientierte Anleger, die eine Buy-and-Hold-Strategie verfolgen, optimal sein, bewusst Anlagen mit Tail-Risiko auszuwählen, um von Tail-Risikoprämien zu profitieren. Drittens sind diese Schiefeprämien höher, je

- (I) negativer die Schiefe der Renditeverteilung ist,
- (II) höher die relative Risikoaversion der Marktteilnehmer ist,

- (III) stärker die jeweiligen Märkte von kurzfristig orientierten Anlegern dominiert werden und
- (IV) kürzer die Anlagehorizonte der Investoren sind.

Folglich ist mit hohen Prämien am Aktienmarkt und bei Beteiligungskapital (Private Equity Investments) zu rechnen, die durch Investoren mit relativ kurzen Anlagezeiträumen und/oder erheblichen Tail-Risiken gekennzeichnet sind: Die durchschnittliche Haltedauer der an der New York Stock Exchange (NYSE) gehandelten US-Aktien betrug von 2010 bis 2020 weniger als 12 Monate, was darauf hindeutet, dass kurzfristig orientierte Investoren einen wesentlichen Anteil der Investoren am Aktienmarkt ausmachen (Chatterjee und Adinarayan, 2020). Ebenso könnten bei Private-Equity-Fonds mit einer durchschnittlichen Haltedauer ihrer Anlagen von etwa vier Jahren hohe Schiefeprämien auftreten (Jenkinson und Sousa, 2015).

Außerdem ist zu erwarten, dass höhere Transaktionskosten und/oder eine geringere Liquidität von Vermögenswerten Marktteilnehmer dazu veranlassen, die entsprechenden Vermögenswerte für längere Zeiträume zu halten. Da der Anteil der längerfristig orientierten Anleger an diesen Märkten beträchtlich ist, legen die Erkenntnisse des theoretischen Modells nahe, dass die Eigentümerstruktur die jeweiligen Schiefeprämien senkt. Höhere Einstiegs- und Ausstiegskosten sind zum Beispiel typisch für Investmentfonds und Immobilienanlagen oder Immobilienfonds. Immobilienanlagen und Pfandbriefe sind weitere Beispiele für (eher) illiquide Vermögenswerte, die daher für kurzfristige Anleger weniger attraktiv sind.

Die in diesem Teil der Dissertation hergeleiteten Implikationen des Modells sollen das Bewusstsein für die Existenz von Schiefeprämien schärfen, ein intuitives Verständnis für die Ursachen dieser Prämien vermitteln und die praktische Relevanz für Investoren, Tail-Risiken bei ihren Anlageentscheidungen sorgfältig zu berücksichtigen, unterstreichen. Ein und dasselbe Portfolio risikoreicher Vermögenswerte zu halten, ist für Marktteilnehmer möglicherweise nicht gleichermaßen optimal, da die Aufnahme von Tail-Risiken für Investoren je nach Länge des Anlagehorizontes mehr oder weniger attraktiv sein kann.



## **Teil III**

# **Kontextspezifische Risikomaße von Pensionsfonds**

# Kapitel 14

## Motivation

Seit der Einführung des Pensionsfonds als zusätzlichen Durchführungsweg in der betrieblichen Altersvorsorge (bAV) in Deutschland zum 1. Januar 2002 besteht für Unternehmen die Möglichkeit, Pensionsverpflichtungen aus Pensionszusagen auf Pensionsfonds auszulagern (Leiber, 2005). Die Auslagerung der Pensionsverpflichtungen auf den Pensionsfonds durch Zahlung einer Einmalprämie hat zur Folge, dass Unternehmen ihre dafür gebildeten Rückstellungen in der Bilanz auflösen können – mit zumeist positiven Effekten: Aus der Vorgabe des § 253 HGB (Handelsgesetzbuch), Pensionsverpflichtungen mit dem von der Bundesbank veröffentlichten Abzinsungzinssatz (HGB-Zinssatz) zu bewerten, resultiert eine Abhängigkeit der Höhe zu bildender Rückstellungen gegenüber dem Zinsumfeld. Der infolge der Finanzkrise gesunkene HGB-Zinssatz – als durchschnittlicher Marktzinssatz der letzten zehn Jahre mit fünfzehnjähriger Restlaufzeit – stellte für Unternehmen mit Pensionsverpflichtungen daher in den vergangenen Jahren eine Belastung dar. Durch eine Erhöhung der anzusetzenden Rückstellungen entstehen höhere Aufwendungen für Unternehmen, was unter anderem zu niedrigeren ausgewiesenen Gewinnen führt (Heinemann, 2020). Der anzuwendende Abzinsungssatz reduzierte sich im Zeitraum von Anfang 2017 bis Ende 2022 von rund 4 % auf 1,8 % (Deutsche Bundesbank, 2023). Dies führte zu einer Vielzahl von Auslagerungen von Pensionsverpflichtungen auf Pensionsfonds: Die Bilanzsumme aller in Deutschland registrierten Pensionsfonds wuchs in diesem Zeitraum von 35,6 auf 61,4 Milliarden Euro (Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht, 2022). Durch eine Ausfinanzierung konnten Trägerunternehmen – Unternehmen, die Versorgungsleistungen über einen externen Versorgungsträger zusagen – so (weitere) Mehraufwendungen für die

---

Bildung von Rückstellungen vermeiden. Die infolge einer Auslagerung der Pensionsverpflichtungen verkürzte Bilanz des Unternehmens kann sich zudem positiv auf wesentliche Geschäftskennzahlen (key performance indicators, KPIs) auswirken, wie zum Beispiel die Eigenkapitalquote oder die Gesamtkapitalrendite (Heinemann, 2020).

Mit der Novellierung des für Pensionsfonds zugrunde liegenden Versicherungsaufsichtsgesetzes (VAG) im Jahr 2005 ist neben der versicherungsförmigen auch die nicht versicherungsförmige Kalkulation des Pensionsfonds möglich, was die Attraktivität von Auslagerungen von Pensionsverpflichtungen weiter gesteigert hat: Einem nicht versicherungsförmigen Pensionsfonds werden neben Freiheiten bei der Wahl des Rechnungszinses auch Freiheiten bei der Kapitalanlage eingeräumt, was grundsätzlich eine ertragreiche Form der Kapitalanlage ermöglicht. Das Trägerunternehmen steht bei dieser Auslegung weiterhin in der Pflicht, dem Pensionsfonds Kapital zuzuführen, falls der Wert der Kapitalanlage eine kritische Schwelle, die die künftige Auszahlungsfähigkeit der Altersversorgungsleistung gewährleisten soll, unterschreitet. Dies wird als Nachschussverpflichtung bei Unterdeckung bezeichnet. (Industrie-Pensions-Verein e.V., 2020)

Mit dem grundsätzlichen Ziel von Pensionsfonds, eine Unterdeckung während der gesamten Auszahlungsphase der Versorgungsansprüche zu vermeiden, sodass Trägerunternehmen keine weiteren Zahlungen an Pensionsfonds nach Auslagerung leisten müssen, stellt sich bei der Portfolioallokation von Pensionsfonds somit die Frage nach der Ausrichtung der strategischen Asset-Allokation und hierbei insbesondere, welche Performance- und Risikokennzahlen zu diesem Zweck herangezogen werden sollten.

Zur Charakterisierung und Steuerung der Risikoeigenschaften von Kapitalanlagen steht dabei grundsätzlich eine Vielzahl etablierter Risikomaße zur Auswahl. In der modernen Portfoliotheorie nach Markowitz (1952) findet einzig die Standardabweichung der Portfoliorenditen als Risikokennzahl Berücksichtigung, wie in Teil 2 dieser Dissertation diskutiert wurde. Dagegen kommen im Bereich des Risikomanagements, in der Finanzberichterstattung und in der Bankenaufsicht sowohl dem Value-at-Risk (VaR) als auch dem damit eng verwandten Conditional Value-at-Risk (CVaR) eine große Bedeutung zu (Jorion 2002, 2007). Als Risikokennzahlen für die maximale Verlusthöhe eines Portfolios innerhalb eines Zeitraums bezüglich eines bestimmten Konfidenzniveaus (VaR) und für die durchschnittliche Höhe der Verluste, die diese maximale Verlusthöhe übersteigen (CVaR), werden neben der Standardabweichung der Portfoliorenditen mit der Schiefe und Kurto-

---

sis weitere Verteilungseigenschaften der Renditen aufgegriffen. Grundsätzlich bieten beide Risikokennzahlen mit der Betrachtung der Portfolioentwicklung in einem Extremszenario ein anschauliches Risikoverständnis und stellen aussagekräftige Risikomaße dar, deren Relevanz in der Portfolioallokation unbestritten ist.

Während es naheliegend erscheint, eine weit verbreitete und etablierte Risikokennzahl (standardmäßig) in die strategischen Asset-Allokation zu integrieren, sollte grundsätzlich kritisch hinterfragt werden, ob dieses Risikomaß auch das tatsächliche Risiko im Rahmen einer spezifischen Anwendung aufgreift. Vor dem Hintergrund der gesetzlichen Vorschriften zu Nachschussverpflichtungen spiegeln beispielsweise die Standardabweichung der Portfoliorenditen oder die jährliche durchschnittliche Verlusthöhe extremer negativer Wertentwicklungen eines Portfolios – ausgedrückt durch den CVaR – nicht das tatsächliche Risiko von Pensionsfonds in der Kapitalanlage wider, sodass auf Basis dieser Kennzahlen getroffene Anlageentscheidungen nicht optimal sein können. Vielmehr können aus den Vorschriften kontextspezifische Risikokennzahlen, die das mit einer Unterdeckung verbundene Risiko direkt aufgreifen, hergeleitet werden. In diesem Teil der Dissertation werden zum einen die Nachschusswahrscheinlichkeit, die ex ante Wahrscheinlichkeit, dass es über die gesamte Auszahlungsphase der Versorgungsansprüche zu einer Unterdeckung mit Nachschussverpflichtungen kommt, und zum anderen der Nachschuss-at-Risk, der die Höhe der Nachschusszahlung des Trägerunternehmens an den Pensionsfonds in einem (extrem) ungünstigen Szenario ausdrückt, herangezogen. Die Berücksichtigung dieser beiden Risikomaße bei der Anlageentscheidung von Pensionsfonds deckt damit die Zweidimensionalität des vorliegenden Risikos ab: die Eintrittswahrscheinlichkeit eines Nachschusses und die Höhe der Ausgleichszahlung im Fall einer Unterdeckung.

Ziel dieses Teils der Dissertation ist zu zeigen, dass die strategische Asset-Allokation von Pensionsfonds – als ein beispielhaftes Portfolioallokationsproblem in der Finanzwirtschaft – hinsichtlich kontextspezifischer Risikomaße ausgerichtet und nicht standardmäßig auf etablierte Risikomaße zurückgegriffen werden sollte. Auf Basis der gesetzlichen Vorschriften zu Pensionsfonds wird dazu die strategische Asset-Allokation von Pensionsfonds anhand einer beispielhaften Struktur und Entwicklung der Versorgungsanwärter und Versorgungsempfänger analysiert. Zunächst wird dabei eine auf einem Standard-Risikomaß basierende Portfolioallokationsstrategie eingeführt, die den einjährigen CVaR unter Berücksichtigung einer Mindestrendite, die bei jährlicher Erzielung zur Erfüllung aller künftigen Altersversorgungsleistung ohne Nachschuss ausreicht, minimiert ( $\mu$ -CVaR Strategie).

---

Die resultierende Portfolioallokation und die Portfolioeigenschaften werden dann mit hinsichtlich der Nachschusswahrscheinlichkeit und dem Nachschuss-at-Risk effizienten Portfolios verglichen. Diese Portfolios werden im Folgenden risikoeffiziente Portfolios genannt. Des Weiteren wird in diesem Teil der Frage nachgegangen, wie diese risikoeffizienten Portfolioallokationen und -eigenschaften von der ausgelagerten Struktur und Entwicklung der Versorgungsanwärter und -empfänger abhängen.

Die Ergebnisse zeigen, dass die Portfolioallokation, die auf Basis der  $\mu$ -CVaR Strategie getroffen wird, zu keiner hinsichtlich der kontextspezifischen Risikomaße wünschenswerten Allokation führt. Vielmehr existieren Portfolioallokationen, die substanziiell verbesserte Risikokennzahlen der Nachschusswahrscheinlichkeit und des Nachschuss-at-Risk aufweisen. Während mit den risikoeffizienten Portfolios aufgrund ihrer vergleichsweise hohen Aktienquote ein höheres Risiko – gemessen an Standard-Risikomaßen, wie der Standardabweichung der Renditen oder dem CVaR – einhergeht, führt die höhere erwartete Rendite dieser Portfolios zu substanziiell verbesserten kontextspezifischen Risikokennzahlen. Aufgrund des (typischerweise) langfristigen Investitionshorizontes des Pensionsfonds ist eine hohe Portfoliorendite nötig, um ausreichend Kapital zu akkumulieren, sodass die Pensionsansprüche auch langfristig ohne zusätzliche Nachschusszahlungen des Trägerunternehmens bedient werden können. Dabei zeigt sich, dass je jünger die Versorgungsanwärter und -empfänger sind und somit länger der Investitionszeitraum des Pensionsfonds ist, desto höher fällt die Aktienquote risikoeffizienter Portfolios aus. Daraus folgt, dass der Pensionsfonds ein vergleichsweise hohes Risiko gemessen an Standard-Risikomaßen eingehen muss, um das tatsächliche Risiko, einhergehend mit einer Unterdeckung, reduzieren zu können. Die Ausrichtung der Portfolioallokation nach der Minimierung von Standard-Risikomaßen bei Beachtung der Zielrendite führt damit zu einer fehlgeleiteten Investitionsentscheidung.

Dieser Teil der vorliegenden Dissertation gliedert sich wie folgt: In Kapitel 15 werden zunächst die zur Analyse der strategischen Asset-Allokation von Pensionsfonds notwendigen gesetzlichen Vorschriften erläutert und darauf aufbauend die anwendungsspezifischen Risikomaße hergeleitet. Das dem Pensionsfonds im Rahmen der Portfolioallokation zur Verfügung stehende Anlageuniversum wird zusammen mit der Methodik zur Renditesimulation, der Cornish-Fisher-Erweiterung, in Kapitel 16 erläutert. Die Portfolioallokation und -eigenschaften resultierend aus der CVaR-Strategie werden in Kapitel 17 erläutert und mit den der risikoeffizienten Portfolios verglichen. Die Ergebnisse der Robustheitsanalysen sind in Kapitel 18 aufgeführt. Kapitel 19 schließt mit einem Fazit.

# Kapitel 15

## Ausgewählte Aspekte zu Pensionsfonds

In diesem Kapitel werden zunächst die im Kontext dieses Teils der Dissertation relevanten Aspekte zu Pensionsfonds betrachtet. Dazu zählt neben den gesetzlichen Vorschriften zur Auslagerung von Pensionsverpflichtungen aus einer Pensionszusage von Trägerunternehmen auf Pensionsfonds (vgl. Abschnitt 15.1) die Nachschusspflicht von Trägerunternehmen bei Eintritt einer Unterdeckung (vgl. Abschnitt 15.2). Auf der Grundlage der Vorschriften zu Pensionsfonds werden im Rahmen dieses Kapitels zudem die (vereinfachten) Annahmen hinsichtlich der Höhe der Einmalprämie zur Auslagerung der Pensionsverpflichtungen, der Bildung von Deckungsrückstellungen des Pensionsfonds und der Höhe der Ausgleichszahlung bei Unterdeckung vorgestellt, die der Analyse der strategischen Asset-Allokation in Kapitel 17 zugrunde liegen.

Neben der Direktzusage, den Unterstützungskassen, Direktversicherungen und Pensionskassen bildet der Pensionsfonds einen von insgesamt fünf der im Betriebsrentengesetz vorgesehenen Durchführungswege der betrieblichen Altersversorgung. Dabei unterfallen Pensionsfonds der Richtlinie über die Tätigkeiten und die Beaufsichtigung von Einrichtungen der betrieblichen Altersversorgung (EbAV-Richtlinie).<sup>14</sup> (Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht, 2023b) Die Beaufsichtigung der Pensionsfonds erfolgt durch die Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht (Bafin) im Rahmen des Versicherungsaufsichtsgesetzes (VAG). Die Rechtsgrundlagen der Pensionsfonds sind in Teil 4 Kapitel

---

<sup>14</sup>EU-Richtlinie 2016/2341 vom 14.12.2016, Amtsblatt EU L 354/37.

---

2 des VAG geregelt. Sofern dieser Teil keine abweichenden Regelungen enthält, gelten gemäß § 237 Abs. 1 VAG die Vorschriften, die auch für Lebensversicherungsunternehmen und Pensionskassen gelten. (Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht, 2021)

Grundsätzlich darf der Pensionsfonds gemäß § 236 Abs. 1 VAG Leistungen der betrieblichen Altersversorgung, die auch Leistungen der Invaliditäts- oder Hinterbliebenenversorgung umfassen, erbringen. Ferner dürfen Sterbegeldzahlungen geleistet werden. Dabei ist zwischen dem versicherungsförmigen und nicht versicherungsförmigen Durchführungsweg des Pensionsfonds zu differenzieren, was sich aus § 236 VAG ergibt. § 236 Abs. 1 Satz 1 Nr. 4 VAG definiert den versicherungsförmig kalkulierten Pensionsfonds. Danach ist dieser verpflichtet, „die Altersversorgungsleistung als lebenslange Zahlung oder als Einmalkapitalzahlung zu erbringen“. § 236 Abs. 2 VAG ermöglicht die nicht versicherungsförmige Durchführung der Rentenzahlung abweichend von § 236 Abs. 1 Satz 1 Nr. 4 VAG durch Verpflichtung des Arbeitgebers zu nicht befristeten Nachschussverpflichtungen während der Rentenbezugszeit. Die Verpflichtung des Trägerunternehmens zur Erbringung von Nachschussbeiträgen muss im Pensionsplan festgehalten werden. (Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht, 2021)

Im Rahmen dieses Teils der vorliegenden Dissertation wird die Auslagerung von Pensionsverpflichtungen auf einen nicht versicherungsförmig kalkulierten Pensionsfonds betrachtet. Diese Form der Auslagerung von Pensionsverpflichtungen stellt dabei die sich in der Praxis durchgesetzte Form der Auslagerung dar. So dominiert die nicht versicherungsförmige Durchführung von Pensionsfondszusagen mit einem Wert der Rückstellungen aller Pensionsfonds in Deutschland Ende 2021 von 57,5 Milliarden Euro die versicherungsförmige Lösung mit Rückstellungen von 3,4 Milliarden Euro (Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht, 2022). Durch den größeren Freiraum bei der Wahl der Rechnungsgrundlagen des Pensionsfonds bei nicht versicherungsförmigen Lösungen, die auf Basis bester Schätzwerte getroffen werden können, stellen nicht versicherungsförmige Auslagerungen die kostengünstigere Form der Auslagerung bezüglich der vom Trägerunternehmen zu zahlenden Einmalprämie zur Auslagerung dar. (Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht, 2021). Dem gegenüber steht das Trägerunternehmen zur Leistung von Nachschüssen im Fall einer Unterdeckung in der Verpflichtung und übernimmt somit bei nicht versicherungsförmigen Lösungen das mit der Wertentwicklung des vom Pensionsfonds angelegten Kapitals verbundene Risiko.

§ 124 VAG legt die für Pensionsfonds geltenden Anlagegrundsätze fest, die dem Pensionsfonds Freiheiten bei der Ausgestaltung der strategischen Asset-Allokation (in Abstimmung mit dem Trägerunternehmen) gewähren. Gemäß § 124 Abs. 1 VAG sind Pensionsfonds verpflichtet, die Vermögenswerte „nach dem Grundsatz der unternehmerischen Vorsicht“ anzulegen. Zudem bestimmen die Anlagegrundsätze des § 124 Abs. 1 Nr. 2 VAG Vermögenswerte „so anzulegen, dass Sicherheit, Qualität, Liquidität und Rentabilität des Portfolios als Ganzes sichergestellt werden“. Ferner ist der Pensionsfonds gemäß § 124 Abs. 1 Nr. 7 VAG verpflichtet, eine angemessene Diversifikation im Rahmen der Anlagepolitik hinsichtlich der Vermögenswerte, Emittenten und geographischer Konzentration sicherzustellen. § 239 Abs. 1 VAG schreibt Pensionsfonds vor, unter Berücksichtigung der jeweiligen Pensionspläne Sicherungsvermögen zu bilden, sodass Forderungen, die Versorgungsberechtigte gegenüber Pensionsfonds haben, im Insolvenzfall geschützt sind. (Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht, 2016) Dabei sind die Bestände des Sicherungsvermögens „in einer der Art und Dauer der zu erbringenden Altersversorgung entsprechenden Weise unter Berücksichtigung der Festlegungen des jeweiligen Pensionsplans“ anzulegen (vgl. § 239 Abs. 1 VAG). Gemäß § 239 Abs. 2 VAG sind Pensionsfonds generell verpflichtet, der Aufsichtsbehörde die Grundsätze ihrer Anlagepolitik zu erklären und das „Verfahren zur Risikobewertung und zur Risikosteuerung sowie zur Strategie in Bezug auf den jeweiligen Pensionsplan“ offenzulegen.

## 15.1 Auslagerung von Pensionsverpflichtungen

Die Auslagerung etwaiger Pensionsverpflichtungen auf einen Pensionsfonds erfolgt durch Zahlung einer Einmalprämie an den Pensionsfonds. Nach der Auslagerung ist das Trägerunternehmen nicht mehr verpflichtet, entsprechende Pensionsrückstellungen in der Bilanz zu bilden. Durch die Vorgabe für Trägerunternehmen gemäß § 253 HGB Altersversorgungsverpflichtungen mit dem HGB-Zinssatz zu bewerten, reduziert das Trägerunternehmen somit bilanzielle Risiken und Belastungen, die sich unter anderem aus Zinsänderungen ergeben. § 253 Abs. 2 HGB gibt vor, dass Rückstellungen für Altersversorgungsverpflichtungen pauschal mit dem aus den vergangenen zehn Geschäftsjahren durchschnittlichen Marktzinssatz, der sich auf eine Restlaufzeit von fünfzehn Jahren bezieht, abgezinst werden können.

Dabei dürfen lediglich bereits erdiente Rentenansprüche (past services) durch Leistung der Einmalprämie über einen Pensionsfonds ausfinanziert werden. Die erst künftig zu erdienenden Ansprüche (future services) können dahingehend nicht auf einen Pensionsfonds ausgelagert werden. Es besteht die Möglichkeit, diese auf eine Unterstützungskasse gegen laufende Zahlungen zu übertragen. (Industrie-Pensions-Verein e.V., 2020)

Für eine dem Trägerunternehmen zum Zeitpunkt der Auslagerung vorliegende Struktur von Anwärtern und Rentnern werden in diesem Teil der Dissertation somit lediglich die bis zu diesem Zeitpunkt bereits erdienten Ansprüche berücksichtigt. Gemäß § 138 Abs. 1 VAG muss die vom Trägerunternehmen an den Pensionsfonds gezahlte Prämie auf Basis „angemessener versicherungsmathematischer Annahmen“ bestimmt werden und ausreichend hoch sein, sodass der Pensionsfonds „allen seinen Verpflichtungen nachkommen und insbesondere für die einzelnen Verträge ausreichende Deckungsrückstellungen bilden kann“. Um diese Vorgabe angemessen zu berücksichtigen, wird die Annahme getroffen, dass die Einmalprämie, die vom Trägerunternehmen zur Auslagerung der Pensionsverpflichtungen an den Pensionsfonds gezahlt wird, dem Wert der mit dem HGB-Zins bewerteten Pensionszusagen von Versorgungsanwärtern und -empfängern entspricht. Dazu wird der HGB-Zins von Ende März 2022 in Höhe von 1,79 % herangezogen (Deutsche Bundesbank, 2023).

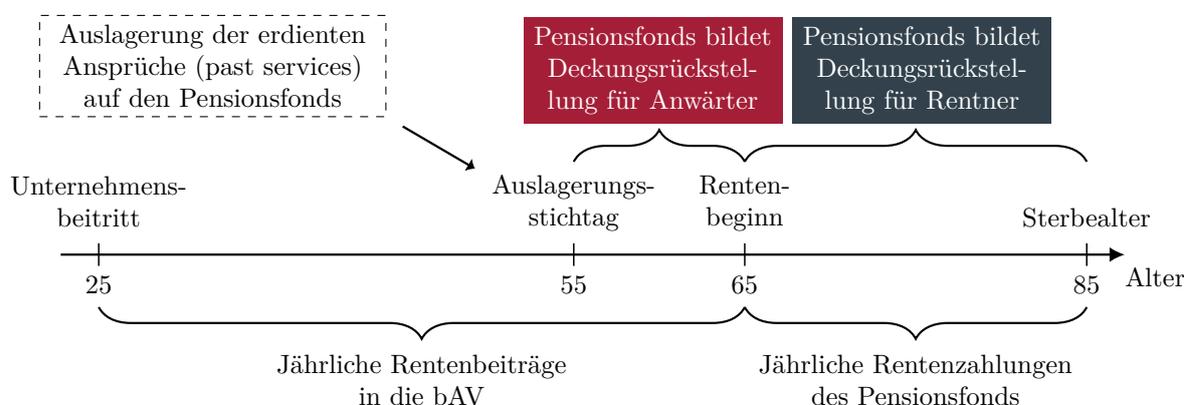
Für nicht versicherungsförmige Pensionsfonds bestehen innerhalb des gesetzlichen Rahmens Freiheiten bei der Ausgestaltung der Rechnungsgrundlagen. So sind versicherungsförmige Pensionsfonds gemäß § 2 DeckRV (Deckungsrückstellungsverordnung) verpflichtet, den Höchstrechnungszins zur Berechnung der Deckungsrückstellungen anzuwenden. (Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht, 2023a). Nicht versicherungsförmige Pensionsfonds können im Gegensatz dazu den zur Bestimmung der Deckungsrückstellung angewandten Rechnungszins aus der Kapitalanlage ableiten. Dabei gilt nach § 24 Abs. 2 PFAV (Pensionsfonds-Aufsichtsverordnung) der Grundsatz, diesen Rechnungszins vorsichtig anzusetzen und nach § 341f HGB die Deckungsrückstellungen auf Basis der prospektiven Methode als Barwert künftiger Leistungen zu bilden. (Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht, 2023a) Um der Vorgabe des § 24 PFAV Rechnung zu tragen, wird zur Analyse der strategischen Asset-Allokation der zugrunde gelegte Rechnungszins dem auf 1,80 % gerundeten HGB-Zins zuzüglich eines Aufschlags von 50 Basispunkten gleichgesetzt. Der Rechnungszins zur Bestimmung der Rückstellungen für die Anwärter und Rentner als Barwert der Ansprüche der jeweiligen Gruppe entspricht damit 2,30 %.

Nachfolgend wird eine beispielhafte Entwicklung der für die Versorgungsanwärter und -empfänger gebildeten Deckungsrückstellungen des Pensionsfonds illustriert. Dabei werden die folgenden Annahmen zur Struktur und zum Verlauf der Deckungsrückstellungen der Anwärter und Rentner getroffen:

- (I) Das Renteneintrittsalter beträgt 65 Jahre und bleibt über den gesamten Auszahlungszeitraum der Versorgungsansprüche unverändert.
- (II) Das Sterbealter liegt bei 85 Jahren. Es wird dabei vereinfacht angenommen, dass es im Fall des Ausscheidens des Versorgungsempfängers zu keinen weiteren, mit dem Versorgungsempfänger in Verbindung stehenden Auszahlungen kommt.
- (III) Zum Auslagerungstermin überträgt das Trägerunternehmen die Pensionsrückstellungen auf den nicht versicherungsförmigen Pensionsfonds. Zu diesem Stichtag umfasst die Struktur der Versorgungsanwärter und Versorgungsempfänger insgesamt 31 gleichverteilte Anwärter und Rentner im Alter von vierzig bis siebzig Jahren. Der Altersdurchschnitt der Versorgungsanwärter und -empfänger entspricht damit zum Auslagerungszeitpunkt 55 Jahre.
- (IV) Mit einem Alter von 25 Jahren sind alle Versorgungsanwärter und -empfänger dem Unternehmen beigetreten. Zur Vereinfachung werden jährliche Rentenbeiträge der Versorgungsanwärter während der Anwartschaftszeit von einem Euro angenommen.
- (V) Auf den Pensionsfonds ausgelagert werden die bis zum Stichtag der Auslagerung erdienten Anwartschaften (past services). Auf Basis der bis zur Auslagerung getätigten Renteneinzahlungen wird für alle Versorgungsanwärter und -empfänger die individuelle (nachsüssige) jährliche Rente, die bei Erreichen des Renteneintrittsalters von 65 Jahren vom Pensionsfonds ausbezahlt wird, bestimmt. Dabei wird eine jährliche Verzinsung der getätigten Renteneinzahlungen in Höhe des auf 1,80 % gerundeten HGB-Zinssatzes unterstellt.

Abbildung 15.1 illustriert die auf diesen Annahmen basierende Ansparphase und Rentenbezugszeit exemplarisch für den zum Zeitpunkt der Auslagerung 55-jährigen Versorgungsanwärter. Während der beispielhafte Anwärter beginnend mit dem Unternehmensbeitritt im Alter von 25 Jahren bis zum Rentenbeginn mit 65 Jahren jährliche Rentenbeiträge in

**Abbildung 15.1: Auslagerung der Pensionsverpflichtungen des 55-jährigen Versorgungsanwärters**



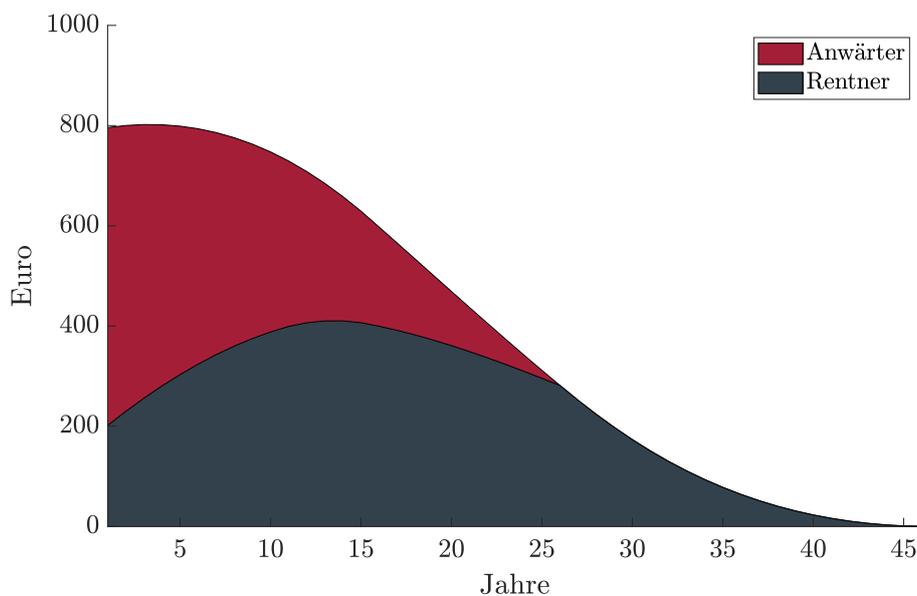
die betriebliche Altersvorsorge leistet, werden lediglich die bis zum Zeitpunkt der Auslagerung mit 55 Jahren bereits erdienten Versorgungsansprüche (past services) auf den Pensionsfonds ausgelagert. Bis der Versorgungsanwärter das Renteneintrittsalter zehn Jahre nach der Auslagerung erreicht, werden die gebildeten Rückstellungen des Pensionsfonds für diesen Versorgungsanwärter als Deckungsrückstellungen für Anwärter ausgewiesen – während der Rentenbezugszeit als Deckungsrückstellungen für Rentner.

Abbildung 15.2 zeigt die Entwicklung der vom Pensionsfonds gebildeten Deckungsrückstellungen aller Versorgungsanwärter und -bezieher. Aus Annahme III) folgt, dass die Anwärter- und Rentnerstruktur zum Zeitpunkt der Auslagerung durch 25 Anwärter und sechs Rentner charakterisiert ist. Durch die Gleichverteilung der Versorgungsanwärter und -empfänger erreicht während der ersten 25 Jahre nach Auslagerung der Pensionsverpflichtungen jedes Jahr ein zusätzlicher Anwärter das Renteneintrittsalter. Damit nehmen die Deckungsrückstellungen der Versorgungsanwärter – gekennzeichnet durch die dunkelrote Fläche in Abbildung 15.2 – stetig ab und werden 26 Jahre nach Auslagerung aufgelöst.

Mit der zunehmenden Anzahl der Versorgungsempfänger während der ersten vierzehn Jahre nach Auslagerung der Pensionsverpflichtungen steigen die Deckungsrückstellungen der Rentner – illustriert durch die anthrazite Fläche in Abbildung 15.2 – stetig an. Mit dem Erreichen des Sterbealters des zum Zeitpunkt der Auslagerung 70-jährigen Versorgungsempfängers reduzieren sich die Deckungsrückstellungen der Versorgungsempfänger und konvergieren gegen null. Nach 46 Jahren endet die Rentenbezugszeit aller Versorgungsempfänger und die Deckungsrückstellung der Rentner entspricht null.

**Abbildung 15.2: Rückstellungen des Pensionsfonds (Alters-Ø = 55 Jahre)**

Abbildung 15.2 stellt den Verlauf der Deckungsrückstellungen des Pensionsfonds über den gesamten Auszahlungszeitraum der Versorgungsansprüche der Versorgungsanwärter und -empfänger für die in diesem Abschnitt eingeführten Annahmen dar. Der Altersdurchschnitt der Versorgungsanwärter und -empfänger beträgt 55 Jahre. Der Rechnungszins zur Bestimmung der Rückstellungen für die Anwärter und Rentner als Barwert der Ansprüche der jeweiligen Gruppe entspricht 2,30 %.



## 15.2 Unterdeckung und Nachschussverpflichtung

Bei nicht versicherungsförmigen Lösungen übernimmt der Pensionsfonds keine Garantien für die Wertentwicklung der Kapitalanlage und das Trägerunternehmen ist dementsprechend zu Zahlungen von Nachschüssen bei Unterdeckung verpflichtet. Eine Unterdeckung liegt vor, wenn der Wert der Kapitalanlage des Pensionsfonds zu einem Zeitpunkt die Deckungsrückstellung der Versorgungsempfänger unterschreitet. Dies ergibt sich aus der Vorgabe des § 24 PFAV Abs. 2, die Deckungsrückstellung in der Rentenbezugszeit prospektiv als Barwert der Leistungen zu bilden. Eine Mindestanforderung hinsichtlich der Deckungsrückstellung für Versorgungsanwärter ist dahingehend nicht gegeben. Gemäß § 138 VAG ist eine Unterdeckung nicht zulässig, sodass hieraus eine Forderung des Pensionsfonds gegenüber dem Trägerunternehmen in Höhe der Differenz zwischen dem Wert der Kapitalanlage und der Deckungsrückstellung der Rentner resultiert. Daraus folgt, dass ein Ausgleich seitens des Trägerunternehmens erforderlich ist oder ein Bedeckungsplan der Aufsichtsbehörde vorgelegt werden muss. (Bundesanstalt für Finanzdienstleistungs-

aufsicht, 2021) § 239 Abs. 1 und Abs. 2 VAG legen dabei die Vorgaben zu den Plänen zur Wiederherstellung des vorgeschriebenen Vermögens fest.

Im Rahmen der Analyse der strategischen Asset-Allokation in Kapitel 17 wird von der Möglichkeit eines Bedeckungsplans abgesehen und unterstellt, dass eine Unterdeckung durch eine sofortige Zahlung des Trägerunternehmens ausgeglichen wird. Dabei wird angenommen, dass das Trägerunternehmen eine Zahlung leistet, die die gesetzlich vorgeschriebene Nachschussverpflichtung übersteigt, sodass ein Puffer zwischen dem Wert der Kapitalanlage und den Deckungsrückstellungen der Rentner resultiert. Damit wird die Wahrscheinlichkeit einer erneuten Unterdeckung mit Nachschussverpflichtung in den Folgejahren reduziert. Per Annahme soll der Wert der Kapitalanlage des Pensionsfonds nach der Nachschusszahlung dem Barwert der Versorgungsansprüche der Rentner, bewertet mit dem im Vergleich zum Rechnungszins geringeren HGB-Zins, betragen. Damit entspricht die Höhe der Ausgleichszahlung der Differenz zwischen dem Barwert der Rentenansprüche der Rentner bewertet mit dem HGB-Zins und dem Wert der Kapitalanlage des Pensionsfonds zum Zeitpunkt der Unterdeckung.

### 15.3 Anwendungsspezifische Risikokennzahlen

Aus den in den vorherigen Abschnitten dargelegten gesetzlichen Vorschriften zu Nachschussverpflichtungen nicht versicherungsförmiger Pensionsfonds lassen sich kontextspezifische Risikomaße ableiten, die die tatsächlichen Risiken von Trägerunternehmen und Pensionsfonds aufgreifen und dementsprechend bei der strategischen Asset-Allokation von Pensionsfonds Berücksichtigung finden könnten. Die Besonderheit, dass das Trägerunternehmen nach Auslagerung der Pensionsverpflichtungen aus Pensionszusagen weitere Zahlungen an den Pensionsfonds lediglich bei Eintritt einer Unterdeckung tätigen muss, impliziert, dass gängige Risikokennzahlen, die typischerweise zur Charakterisierung und Steuerung von Kapitalanlagen herangezogen werden, das tatsächliche mit einer Unterdeckung verbundene Risiko nicht aufgreifen. Während etablierte Risikomaße wie die Standardabweichung der Renditen oder der Value-at-Risk (VaR) auch für Pensionsfonds aussagekräftige Risikomaße zur Charakterisierung der Kapitalanlage darstellen, greifen sie das spezifische Risiko von Pensionsfonds nicht explizit auf und stellen somit keine passgenauen Risikokennzahlen dar.

Zwei Risikomaße, die dieser Anforderung gerecht werden, sind die Nachschusswahrscheinlichkeit und der Nachschuss-at-Risk.

**Nachschusswahrscheinlichkeit (NW):**

Die Nachschusswahrscheinlichkeit ist als die ex ante Wahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt der Auslagerung der Pensionsverpflichtungen, dass es über die gesamte Auszahlungsperiode des Pensionsfonds zu einer oder auch mehreren Unterdeckungen kommt, definiert. Um einen damit verbundenen Nachschuss zu vermeiden, ist es im Interesse des Trägerunternehmens und des Pensionsfonds, im Rahmen der Portfolioallokation die Nachschusswahrscheinlichkeit in den Fokus zu nehmen. Die (isolierte) Ausrichtung der Portfolioallokation nach der Nachschusswahrscheinlichkeit wird der ganzheitlichen Betrachtung des Risikos in diesem Kontext allerdings nicht vollumfänglich gerecht, da auch die Höhe der anfallenden Ausgleichszahlungen bei Unterdeckung für das Trägerunternehmen eine weitere Risikoquelle darstellt. So könnte die gewählte Portfolioallokation dazu führen, dass die Wahrscheinlichkeit einer eintretenden Unterdeckung zwar (vergleichsweise) niedrig ist, die Höhe der Ausgleichszahlungen im Fall einer Unterdeckung jedoch (vergleichsweise) hoch. Dies könnte eine für das Trägerunternehmen nicht wünschenswerte Allokation darstellen und untermauert die Notwendigkeit der Einbeziehung eines weiteren Risikomaßes, welches die Höhe der Ausgleichszahlung bei Eintritt einer Unterdeckung berücksichtigt.

**Nachschuss-at-Risk (NaR):**

Das konstruierte Risikomaß des Nachschuss-at-Risk basiert auf dem Konzept des Value-at-Risk, das ein etabliertes Standard-Risikomaß darstellt (Jorion 2002, 2007). Der VaR bezüglich des Konfidenzniveaus  $(1 - \alpha)$  ist als die Verlusthöhe definiert, ausgedrückt in Prozent oder in der Einheit des Portfoliowertes, die mit Wahrscheinlichkeit  $1 - \alpha$  für einen definierten Zeitraum nicht überschritten wird (Rockafellar und Uryasev, 2000). Typischerweise werden für das Konfidenzniveau  $(1 - \alpha)$  Werte von 90 %, 95 % oder 99 % gewählt (Rockafellar und Uryasev, 2000, S. 2). Mit dem Nachschuss-at-Risk wird der Grundgedanke des VaR nun auf den spezifischen Kontext von Pensionsfonds übertragen: Mit dem  $(1 - \alpha)$ -NaR wird die (barwertige) Nachschusshöhe ausgedrückt, die mit der Wahrscheinlichkeit  $(1 - \alpha)$  über die gesamte Auszahlungsphase des Pensionsfonds nicht überschritten wird. Für  $(1 - \alpha) = 99 \%$  wird demnach die barwertige Nachschusshöhe berücksichtigt, die im schlechtesten Ein-Prozent-Fall zu erwarten ist. Die barwertige Nachschusshöhe ist dabei als der Barwert der Summe aller über die gesamte Auszahlungsphase des Pensionsfonds anfallenden Ausgleichszahlungen unter Berücksichtigung des Rechnungszinssatzes

definiert und wird in Prozent der Einmalprämie zur Ausfinanzierung der Pensionsverpflichtungen, die im vorliegenden Beispiel rund 867 Euro entspricht, ausgedrückt.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass klassische, nicht kontextspezifische Risiko- maße als Anlagekriterium für die Portfolioallokation von Pensionsfonds nicht zwingend geeignet sind: Grundsätzlich kann die vom Pensionsfonds gewählte Allokation durchaus eine hohe – beispielsweise einjährige – Standardabweichung oder auch einen hohen Value-at-Risk aufweisen, solange die Allokation die beiden eingeführten maßgeschneiderten Risikokennzahlen, die das tatsächliche Risiko einer Unterdeckung über die gesamte Auszahlungsphase des Pensionsfonds erfassen, minimiert. Daraus folgt eine inhaltliche Analogie zum zweiten Teil der vorliegenden Dissertation: Im Rahmen des dort beschriebenen Modells ist für langfristig orientierte Investoren, die Investitionsentscheidungen anhand ihres erwarteten Nutzens in Abhängigkeit des Portfoliowertes zum Ende ihres Anlagehorizontes treffen, die einjährige Verteilung der Portfoliorenditen, die durchaus durch eine hohe negative Schiefe gekennzeichnet sein kann – einhergehend mit zwischenzeitlichen, substantiellen Wertverlusten des Portfolios – nicht von Bedeutung. Vielmehr ist die Renditeverteilung zum Ende des Investitionshorizontes relevant, die bei langen Anlagehorizonten (annähernd) der einer Normalverteilung entspricht.

Bevor die hinsichtlich der Nachschusswahrscheinlichkeit und des Nachschuss-at-Risk effizienten Portfolios betrachtet werden, wird in Kapitel 17 zunächst die Portfolioallokationsstrategie, die sich auf die Minimierung des einjährigen Conditional Value-at-Risk unter Beachtung einer Mindestzielrendite, die dem zugrunde liegenden Rechnungszins entspricht, stützt, analysiert ( $\mu$ -CVaR Strategie). Der CVaR stellt ein aussagekräftiges Maß über die zu erwartende Verlusthöhe bezüglich eines definierten Konfidenzniveaus über einen bestimmten Zeitraum dar – jedoch kein passgenaues Risikomaß in diesem Kontext. Auch bekannt als expected shortfall, ist der CVaR eng mit dem Konzept des Value-at-Risk verknüpft. In Anlehnung an die Definition des  $(1 - \alpha)$ -VaR gibt der  $(1 - \alpha)$ -CVaR den bedingten Erwartungswert der Verluste wieder, der die Verlusthöhe des  $(1 - \alpha)$ -VaR übersteigt (Rockafellar und Uryasev, 2000).

# Kapitel 16

## Anlageuniversum und Renditesimulation

Das dem Pensionsfonds im Rahmen der Portfolioallokation zur Verfügung stehende Anlageuniversum – bestehend aus Aktien- und Anleiheindizes – wird in Abschnitt 16.1 eingeführt und charakterisiert. Die Verteilungseigenschaften der Indizes dienen als Grundlage des simulationsbasierten Ansatzes, auf die sich die Analyse der strategischen Asset-Allokation in Kapitel 17 stützt. Abschnitt 16.2 erläutert, wie die Cornish-Fisher-Methode zur Abschätzung von Quantilen nicht normaler Renditeverteilungen zur Renditesimulation verwendet werden kann. Mithilfe dieses Ansatzes können Verteilungen erzeugt werden, die den empirischen Verteilungseigenschaften und der erwarteten Renditen der Vermögen entsprechen, sodass mit der Schiefe und Kurtosis der Indizes weitere Verteilungseigenschaften berücksichtigt werden.

### 16.1 Anlageuniversum

Das für die Portfolioallokation des Pensionsfonds zur Verfügung stehende Anlageuniversum umfasst vier Indizes. Mit dem Ziel, ein breites und kostengünstiges Spektrum an Investitionsmöglichkeiten zugrunde zu legen, stehen dem Pensionsfonds neben einem diversifizierten Aktienportfolio drei Anleiheindizes zur Auswahl. Das Aktienportfolio besteht dabei zu je 50 % aus dem europäischen Aktienindex *STOXX Europe 600 Performance-*

*index* und dem *S&P500 Performanceindex*, sodass das Aktienportfolio die größten börsennotierten 600 europäischen und 500 US-amerikanischen Unternehmen umfasst. Zudem werden drei Anleiheindizes mit europäischen Staatsanleihen mit höchstem Rating, europäischen Pfandbriefen und US-amerikanischen Staatsanleihen berücksichtigt. Konkret werden die folgenden Indizes herangezogen:<sup>15</sup>

- (I) 1 – 3 Year Euro AAA-AA Government Bond Index
- (II) 5 – 7 Year Euro Covered Bond Index
- (III) 5 – 10 Year US Treasury Index

Der *AAA-AA Government Bond Index* beinhaltet europäische Staatsanleihen mit hoher Kreditwürdigkeit und Restlaufzeiten von einem bis drei Jahren. Durch die kurze Restlaufzeit der beinhalteten Anleihen unterliegt der Index einem geringen Zinsänderungsrisiko. Der *Covered Bond Index* umfasst europäische Pfandbriefe – besicherte, vorrangige Schuldtitel, die von Banken ausgegeben werden – mit einer Restlaufzeit zwischen fünf und sieben Jahren (Anand, 2016). Durch die gesetzlich vorgeschriebene Art der Besicherung gelten sie als ebenfalls sichere Anlageform für Investoren (Anand, 2016, S. 1). Aufgrund einer geringeren Liquidität bei ähnlicher Sicherheit im Vergleich zu Bundesanleihen bieten Pfandbriefe in der Regel einen kleinen Renditeaufschlag (Börse Online, 2019). Der *US Treasury Index* umfasst US-amerikanische Staatsanleihen mit Laufzeiten zwischen fünf und zehn Jahren. Durch die Notierung in US Dollar beinhaltet die Investition in diesen Index – wie auch in den S&P500 Index als Teil des Aktienportfolios – durch die eingenommene Euro-Perspektive des Pensionsfonds das Wechselkursrisiko zwischen US Dollar und Euro. Im Folgenden werden die empirischen Renditeverteilungen der Anlagen charakterisiert und die Korrelation zwischen den Indizes betrachtet.

### 16.1.1 Charakterisierung der Renditezeitreihen

Tabelle 16.1 zeigt die Verteilungseigenschaften der Renditen des Aktienportfolios und der Anleiheindizes. Dabei werden neben der jährlichen Durchschnittsrendite und der annualisierten Standardabweichung auch die Schiefe und Überkurtosis<sup>16</sup> der Renditeverteilungen

<sup>15</sup>Der Herausgeber der Indizes ist ICE Data Indices, LLC.

<sup>16</sup>Die Überkurtosis, oder auch Exzess Kurtosis, drückt die Differenz zwischen der Wölbung der Verteilung und der Wölbung der Normalverteilung in Höhe von 3 aus.

angegeben. Die Werte beziehen sich auf einen Zeitraum von knapp dreizehn Jahren von Juli 2009 bis März 2022 und werden auf Basis wöchentlicher – für die in USD notierenden Indizes in Euro konvertierte – Renditen bestimmt.<sup>17</sup> Die Zeitreihen entstammen der Datenbank Thomson Reuters Datastream. Während zur Renditesimulation nicht auf die diskrete Durchschnittsrendite als Proxy für die erwartete diskrete Rendite des Aktienportfolios und der Anleiheportfolios zurückgegriffen wird, wird diese in Tabelle 16.1 zur vollständigen Charakterisierung der Zeitreihen dennoch berücksichtigt. Die Bestimmung der erwarteten Rendite wird in Abschnitt 16.1.2 erläutert.

Das Aktienportfolio, bestehend aus europäischen und US-amerikanischen Unternehmen, weist eine diskrete jährliche Durchschnittsrendite von 12,47 % und eine Standardabweichung der Renditen von 15,46 % auf. Zudem ist die Renditeverteilung durch eine negative Schiefe geprägt, die zugleich den höchsten negativen Wert aller berücksichtigten Anlageklassen mit  $-0,147$  aufweist. Die Überkurtosis beträgt 0,109. Durch den im Aktienportfolio beinhalteten S&P500 Index unterliegen die historischen Renditen des Aktienportfolios auch der Wechselkursentwicklung des US-Dollar bezüglich des Euro, die

### Tabelle 16.1: Historische Verteilungseigenschaften

*Tabelle 16.1 zeigt die Eigenschaften der Renditeverteilungen von Juli 2009 bis März 2022 des Aktienportfolios und der drei Anleiheindizes. Das Aktienportfolio beinhaltet den STOXX Europe 600 (total return) Index und S&P500 (total return) Index, gewichtet zu je 50 %. Europäische Staatsanleihen bezeichnen den 1 – 3 Year Euro AAA-AA Government Bond Index, europäische Pfandbriefe den 5 – 7 Year Euro Covered Bond Index und US-Staatsanleihen den 5 – 10 Year US Treasury Index. Die angegebenen Verteilungseigenschaften beziehen sich auf annualisierte Werte und sind auf Basis wöchentlicher Renditen berechnet. Die Durchschnittsrendite ist als das annualisierte arithmetische Mittel diskreter Renditen definiert.*

	Aktienportfolio	Europäische Staatsanleihen	Europäische Pfandbriefe	US-Staatsanleihen
Durchschnittsrendite	12,47 %	0,32 %	2,96 %	4,65 %
Standardabweichung	15,46 %	0,92 %	2,87 %	9,68 %
Schiefe	$-0,147$	0,311	$-0,056$	0,045
Überkurtosis	0,109	0,485	0,065	0,029

<sup>17</sup>Da der *Covered Bond Index* erst im Juli 2009 aufgelegt wurde, wird der Beobachtungszeitraum zur Bestimmung der Verteilungseigenschaften der Renditen aus Konsistenzgründen für alle Anlagen entsprechend gewählt.

durch die Abwertung des Euro im betrachteten Zeitraum positiv zur Durchschnittsrendite US-amerikanischer Investitionen beitrug.

Dies gilt entsprechend für den Index mit US-amerikanischen Staatsanleihen, der mit einer Durchschnittsrendite von 4,65 % die höchste Durchschnittsrendite aller Anleiheindizes aufweist und mit einer Standardabweichung der Renditen von 9,68 % zugleich die risikoreichste Anleiheklasse – gemessen an der Volatilität – darstellt, gefolgt von den Indizes mit europäischen Pfandbriefen und Staatsanleihen mit deutlich geringeren Volatilitäten von nur 2,87 % beziehungsweise 0,92 %. Die historischen Durchschnittsrenditen der beiden Indizes betragen 1,13 % und  $-0,04$  %. Die Renditeverteilung des Index mit europäischen Staatsanleihen weist dabei mit einer Schiefe von 0,311 und einer Überkurtosis von 0,485 die größte Abweichung von der Normalverteilung auf.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass das Aktienportfolio sowohl die höchste Standardabweichung der Renditen als auch die größte negative Schiefe aufweist. Der Index mit fünf- bis zehnjährigen US-amerikanischen Staatsanleihen stellt nicht zuletzt durch das zusätzliche Wechselkursrisiko den Anleiheindex mit der höchsten Standardabweichung der Renditen dar, gefolgt von europäischen Pfandbriefen mit fünf- bis siebenjähriger Restlaufzeit. Unter anderem durch die vergleichsweise kurze Laufzeit der europäischen Anleihen mit höchster Kreditwürdigkeit liegt die Volatilität bei unter einem Prozent pro Jahr und der Index stellt damit den risikoärmsten Anleiheindex dar.

### Tabelle 16.2: Korrelationsmatrix

*Tabelle 16.2 zeigt die Korrelationsmatrix von Juli 2009 bis März 2022 auf Basis wöchentlicher Renditen des Aktienportfolios und der drei Anleiheindizes. Das Aktienportfolio beinhaltet den STOXX Europe 600 (total return) Index und S&P500 (total return) Index, gewichtet zu je 50 %. Europäische Staatsanleihen bezeichnen den 1 – 3 Year Euro AAA-AA Government Bond Index, europäische Pfandbriefe den 5–7 Year Euro Covered Bond Index und US-Staatsanleihen den 5–10 Year US Treasury Index.*

	Aktienportfolio	Europäische Staatsanleihen	Europäische Pfandbriefe	US-Staatsanleihen
Aktienportfolio	1	0,02	−0,07	−0,08
Europ. Staatsanleihen	0,02	1	0,63	0,26
Europ. Pfandbriefe	−0,07	0,63	1	0,44
US-Staatsanleihen	−0,08	0,26	0,44	1

Tabelle 16.2 stellt darüber hinaus die Korrelationsmatrix der Anlagemöglichkeiten dar. Es zeigt sich, dass die Renditen des Aktienportfolios mit den Renditen der Anleiheportfolios mit Korrelationskoeffizienten von betragsmäßig kleiner als 0,1 nahezu unkorreliert sind. Während die Korrelation zwischen dem Index mit europäischen Pfandbriefen und dem der europäischen Staatsanleihen einen Wert von 0,63 aufweist, ist der Zusammenhang zwischen der Wertentwicklung US-amerikanischer Staatsanleihen und europäischen Pfandbriefen beziehungsweise Staatsanleihen mit Werten von 0,44 beziehungsweise 0,26 weniger stark ausgeprägt. Dies ist neben makroökonomischen Aspekten auch auf die Wechselkursentwicklung zurückzuführen, die die Renditezeitreihe der US-Staatsanleihen durch Konversion in Euro beeinflusst.

### 16.1.2 Definition der erwarteten Rendite

Während auf die empirisch beobachtete Standardabweichung, Schiefe und Kurtosis der Indizes aus Tabelle 16.1 zur Renditesimulation zurückgegriffen wird, basiert die Bestimmung der erwarteten Rendite nicht auf dem arithmetischen Mittel diskreter Renditen wie noch im ersten Teil der vorliegenden Dissertation. Da die historische Durchschnittsrendite der Anleiheindizes nicht die Höhe des aktuellen Zinsumfeldes aufgreift, wird in Anlehnung an Fritsch et al. (2020) die aktuelle Effektivverzinsung (yield to maturity) als zukunftsorientiertes Maß zur Schätzung der erwarteten Rendite der Anleiheindizes herangezogen.<sup>18</sup> Tabelle 16.3 zeigt die resultierenden erwarteten Renditen zum 31. März 2022. Die erwartete Rendite der US-amerikanischen Staatsanleihen beträgt 2,53 % und die der Pfandbriefe 1,13 %. Infolge der kürzeren Restlaufzeit der europäischen Anleihen ist die erwartete Rendite negativ und beträgt  $-0,04\%$ .

Der von Fritsch et al. (2020) vorgeschlagenen Methodik folgend wird in diesem Teil der Dissertation außerdem die erwartete Rendite des Aktienportfolios bestimmt. Anstelle der historischen diskreten Durchschnittsrendite ziehen die Autoren als Proxy für die erwartete Rendite von Aktienindizes die Summe aus der aktuellen Effektivverzinsung hochverzinslicher Unternehmensanleihen und einer empirischen Risikoprämie, die mit 2 % angegeben wird, heran (Fritsch et al., 2020, S. 34).

---

<sup>18</sup>Die Effektivverzinsung entstammt ebenfalls der Datenbank Thomson Reuters Datastream.

**Tabelle 16.3: Erwartete Rendite des Aktienportfolios und der Anleiheindizes**

Tabelle 16.3 zeigt die erwarteten Renditen des Aktienportfolios und der drei Anleiheindizes. Das Aktienportfolio beinhaltet den STOXX Europe 600 (total return) Index und S&P500 (total return) Index, gewichtet zu je 50 %. Europäische Staatsanleihen bezeichnen den 1 – 3 Year Euro AAA-AA Government Bond Index, Pfandbriefe den 5 – 7 Year Euro Covered Bond Index und US-Staatsanleihen den 5 – 10 Year US Treasury Index. Die erwarteten Renditen der Anleiheindizes entsprechen der Effektivverzinsung (yield to maturity) am 31. März 2022. Die erwartete Rendite des Aktienportfolios wird als Summe der Effektivverzinsung hochverzinslicher Unternehmensanleihen und einer empirisch geschätzten Risikoprämie bestimmt (vgl. Tabelle 16.4).

	Aktienportfolio	Europäische Staatsanleihen	Europäische Pfandbriefe	US-Staatsanleihen
Erwartete Rendite	7,84 %	–0,04 %	1,13 %	2,53 %

Die Herleitung der erwarteten Rendite des Aktienportfolios mit europäischen und US-amerikanischen Aktien erfordert die Bestimmung der historischen Risikoprämie beider Indizes. Dazu werden die Indizes *BB-B US High Yield* für den US-amerikanischen und *BB-B Euro High Yield* für den europäischen Markt herangezogen. Auf der Grundlage von rund 25 Jahren von Januar 1997 bis März 2022 wird die historische Risikoprämie des STOXX Europe 600 Index (S&P500 Index) als Differenz zwischen dem annualisierten arithmetischen Mittel diskreter Renditen des STOXX Europe 600 Index (S&P500 Index) und des jeweiligen hochverzinslichen Anleiheindex bestimmt. Mit einer jährlichen diskreten Durchschnittsrendite von 7,92 % des europäischen Aktien- und 5,40 % des hochverzinslichen europäischen Anleiheindex beträgt die historische Risikoprämie 2,52 %. Analog resultiert eine Risikoprämie von 3,73 % für den US-amerikanischen Index aus der Differenz der Durchschnittsrendite von 10,53 % des S&P Index und von 6,80 % des hochverzinslichen US-amerikanischen Anleiheindex. (vgl. Tabelle 16.4)

Die erwartete Rendite des europäischen und des US-amerikanischen Index kann nun als die aktuelle Effektivverzinsung der jeweiligen hochverzinslichen Anleihe zuzüglich der zuvor abgeleiteten Risikoprämie bestimmt werden. Die Effektivverzinsung der hochverzinslichen Euro-Anleihen entspricht dabei 3,95 % und die der US-amerikanischen 5,49 %. Daraus resultiert eine erwartete Rendite des STOXX Europe 600 von 6,47 % und des S&P500 von 9,22 %. Durch die Gleichgewichtung beider Indizes innerhalb des Aktienportfolios entspricht die erwartete Rendite des Aktienportfolios 7,84 % (vgl. Tabelle 16.3).

**Tabelle 16.4: Bestimmung der historischen Risikoprämie**

Tabelle 16.4 zeigt die Herleitung der historischen Risikoprämie für den STOXX Europe 600 und den S&P500 Index, die als die Differenz zwischen der Durchschnittsrendite von Januar 1997 bis März 2022 des Aktienindex und eines hochverzinslichen Anleiheindex bestimmt wird. Für den europäischen und US-amerikanischen Markt werden der BB-B Euro High Yield und der BB-B US High Yield Index als hochverzinsliche Anleiheindizes herangezogen. Die Durchschnittsrendite ist als das annualisierte arithmetische Mittel diskreter Renditen und die historische Risikoprämie als die Differenz der Durchschnittsrendite des jeweiligen Aktienindex und des Anleiheindex definiert.

	STOXX Europe 600	BB-B Euro High Yield	S&P500	BB-B US High Yield
Durchschnittsrendite	7,92 %	5,40 %	10,53 %	6,80 %
Historische Risikoprämie		2,52 %		3,73 %

## 16.2 Renditesimulation mittels der Cornish-Fisher-Erweiterung

In diesem Abschnitt wird dargelegt, wie die Cornish-Fisher-Approximation – als Verfahren zur Schätzung von Quantilen – zur Renditesimulation verwendet werden kann. Dabei sollen die Verteilungseigenschaften der simulierten Renditen den empirischen Verteilungseigenschaften der Anlagemöglichkeiten aus Tabelle 16.1 und den erwarteten Renditen aus Tabelle 16.2 entsprechen. Generell ermöglicht die Cornish-Fisher-Methode, neben der erwarteten Rendite und Standardabweichung der Renditen auch das dritte und vierte Moment – ausgedrückt durch die Schiefe und Wölbung – der zugrunde gelegten Verteilung im Rahmen der Quantilsbestimmung zu berücksichtigen (vgl. Abschnitt 16.2.1). Als Methode zur Simulation von Renditen erlaubt die Cornish-Fisher-Methode somit, nicht normalverteilte Renditen mit gewünschter Schiefe und Kurtosis zu simulieren (vgl. Abschnitt 16.2.2). Damit findet unter anderem das Katastrophenrisiko bei der Bestimmung der optimalen Portfolioallokation und deskriptiver Risikokennzahlen Berücksichtigung.

Während in diesem Teil der Dissertation die Cornish-Fisher-Methode zur Renditesimulation eingeführt und angewandt wird, existieren weitere Verfahren zur Simulation von Renditen. Ein verbreiteter, nicht parametrischer Ansatz stellt die (bootstrapped) historische Simulation dar (Dowd, 2007, S. 85 f.). Hierbei werden aus der empirischen Renditezeitreihe einzelne Beobachtungen per Zufall gezogen und wieder ersetzt, sodass

eine oder eine Vielzahl von Zeitreihen erzeugt werden können. Dieses Verfahren findet unter anderem zur Bestimmung der Performanceszenarien von Produkten der dritten Kategorie im Rahmen der Basisinformationsblätter Anwendung.<sup>19</sup> Alternativ kann die in Teil 2 der vorliegenden Dissertation beschriebene geometrische Brownsche Bewegung mit Poisson-verteilten Sprüngen zur Renditesimulation verwendet werden (vgl. Abschnitt 10.2). Diese Methode erfordert jedoch zunächst die Schätzung der Sprungintensität und -größe des Poisson-Prozesses sowie der Standardabweichung des Diffusionsterms. Diese Parameter können mittels einer Maximum-Likelihood-Schätzung bestimmt werden (Ait-Sahalia, 2004 und Ramezani und Zeng, 2007).

### 16.2.1 Hintergrund

Der als Cornish-Fisher-Erweiterung bekannte Ansatz zur Bestimmung von Quantilen basiert auf der Arbeit von Cornish und Fisher (1938). Generell dient die Erweiterung der Approximation von Quantilen nicht normaler Verteilungen durch Einbeziehung höherer Momente – typischerweise des dritten und vierten Moments. So können Abweichungen hinsichtlich der Symmetrie und Wölbung der vorliegenden Verteilung von einer Normalverteilung bei der Bestimmung von Quantilen berücksichtigt werden (Amédée-Manesme et al., 2019). Dementsprechend stellt die Erweiterung einen gängigen Ansatz zur Bestimmung des VaR und CVaR dar. Wie in Kapitel 7 dieser Dissertation erläutert, findet die Erweiterung unter anderem bei der Bestimmung der Performanceszenarien von Produkten der Kategorie 2 im Rahmen der Basisinformationsblätter<sup>20</sup> Anwendung sowie im Rahmen des Risikomanagements von Portfolios (Cao et al., 2010 und Fabozzi et al., 2013).

Die Cornish-Fisher-Approximation wird im Folgenden zunächst allgemein beschrieben, bevor dargelegt wird, wie die Erweiterung zur Renditesimulation verwendet werden kann. Das standardisierte Cornish-Fisher-Quantil  $x_{CF,\alpha}$  baut auf dem  $\alpha$ -Quantil der Standardnormalverteilung  $x_\alpha$  auf und lässt sich wie folgt ausdrücken (Maillard, 2018, S. 4):

$$x_{CF,\alpha} = x_\alpha + \frac{1}{6}(x_\alpha^2 - 1) \cdot sk_{CF} + \frac{1}{24}(x_\alpha^3 - 3x_\alpha) \cdot k_{CF} - \frac{1}{36}(2x_\alpha^3 - 5x_\alpha) \cdot sk_{CF}^2, \quad (16.1)$$

wobei  $sk_{CF}$  den Cornish-Fisher-Schiefe-Parameter und  $k_{CF}$  den Cornish-Fisher-Überkurtosis-Parameter bezeichnet. Unter Berücksichtigung der erwarteten logarithmier-

<sup>19</sup>EU-Verordnung Nr. 1286/2014 vom 26.11.2014, Amtsblatt EU L 352.

<sup>20</sup>Delegierte Verordnung (EU) 2017/653 vom 08.03.2017, Amtsblatt EU L 100.

ten Rendite  $\mu_{log}$  und der Standardabweichung der Renditen ist das Cornish-Fisher-Quantil  $q_{CF,\alpha}$  durch

$$q_{CF,\alpha} = \mu_{log} + \sigma_{CF} \cdot x_{CF,\alpha} \quad (16.2)$$

gegeben, wobei  $\sigma_{CF}$  die Cornish-Fisher-Standardabweichung darstellt. Der VaR – wie auch der CVaR – wird als positiver Wert ausgedrückt, sodass der  $(1 - \alpha)$ -VaR dem negativen Cornish-Fisher-Quantil  $q_{CF,\alpha}$  entspricht:

$$(1 - \alpha)\text{-VaR} := -q_{CF,\alpha}.$$

Für nicht normale Verteilungen weichen die Cornish-Fisher-Parameter von den Verteilungseigenschaften der zugrunde gelegten tatsächlichen Verteilung ab, da die Cornish-Fisher-Erweiterung eine Expansion dritter Ordnung darstellt, sodass eine Transformation der beobachteten Momente nötig ist (Amédée-Manesme et al., 2019, S. 429). Somit stellen die Cornish-Fisher-Parameter adjustierte Input-Parameter zur Bestimmung von Quantilen der zugrunde gelegten tatsächlichen Verteilung dar. Lediglich im Fall einer Normalverteilung der ursprünglichen Verteilung entsprechen die empirischen Verteilungseigenschaften den Cornish-Fisher-Parametern. Für Werte der Schiefe und Überkurtosis von null entspricht das standardisierte Cornish-Fisher-Quantil  $x_{CF,\alpha}$  aus Formel (16.1) dem  $\alpha$ -Quantil der Standardnormalverteilung  $x_\alpha$ .

Maillard (2018) zeigt, wie sich die Schiefe  $sk$  und Überkurtosis  $k$  der wahren Verteilung als Funktionen der Cornish-Fisher-Parameter  $sk_{CF}$  und  $k_{CF}$  ausdrücken lassen (Maillard, 2018, S. 6 f.). Da zur Bestimmung des Cornish-Fisher-Quantils in Gleichung (16.2) allerdings von der Schiefe und Kurtosis der tatsächlichen Verteilung auf die Cornish-Fisher-Parameter geschlossen werden muss, ist eine Inversion der beiden Gleichungen notwendig. Für die invertierten Zusammenhänge existieren jedoch keine geschlossenen Formen und können so lediglich durch nicht lineare Funktionen, repräsentiert durch  $\varphi$  und  $\psi$ , ausgedrückt werden (Maillard, 2018, S. 8):

$$sk_{CF} = \varphi(sk, k) \quad (16.3)$$

$$k_{CF} = \psi(sk, k). \quad (16.4)$$

Zur Lösung des Gleichungssystems sind numerische Methoden erforderlich. Mit den daraus resultierenden Cornish-Fisher-Parametern  $sk_{CF}$  und  $k_{CF}$  kann die Cornish-Fisher-Standardabweichung  $\sigma_{CF}$  wie folgt bestimmt werden (Maillard, 2018, S. 6):

$$\sigma_{CF} = \frac{\sigma}{\sqrt{1 + \frac{1}{96}k_{CF}^2 + \frac{25}{1296}sk_{CF}^4 - \frac{1}{36}sk_{CF}^2 \cdot k_{CF}}}, \quad (16.5)$$

wobei  $\sigma$  der Standardabweichung der Renditen der tatsächlichen Verteilung entspricht.

Während die Cornish-Fisher-Erweiterung zur Bestimmung von Quantilen den Vorteil bietet, keine Annahme über die zugrunde liegende Verteilung der beobachteten Renditen treffen zu müssen, gilt für die Validität der Erweiterung ein eingeschränkter Geltungsbereich. Wird dieser Geltungsbereich, der sowohl bezüglich der beobachteten als auch der Cornish-Fisher-Parameter definiert werden kann, verletzt, führt dies zu verzerrten Ergebnissen bei der Bestimmung von Quantilen und stellt eine (mögliche) Fehlerquelle bei der Verwendung der Cornish-Fisher-Approximation dar. Bei substantiellen Abweichungen der tatsächlichen Verteilung beobachteter Renditen von der Normalverteilung wird der Geltungsbereich typischerweise verletzt. Dies kann insbesondere bei Renditebeobachtungen auf höherer Frequenz, beispielsweise bei täglichen Renditen mit hoher (absoluter) Ausprägung der Schiefe und Kurtosis, vorliegen (Maillard, 2018). Die Verteilungseigenschaften der wöchentlichen Renditen der vier eingeführten Anlagemöglichkeiten (vgl. Tabelle 16.1) liegen innerhalb des Geltungsbereichs, sodass eine Verletzung ausgeschlossen werden kann.

Die Verwendung der Schiefe- und Kurtosis-Parameter der tatsächlichen Verteilung in Gleichung (16.1) – ohne notwendige Transformation – stellt eine weitere Fehlerquelle in der Verwendung der Cornish-Fisher-Erweiterung dar, die zu substantiellen Fehlern bei der Bestimmung von Quantilen führen kann. Tabelle 16.5 zeigt zum einen die resultierenden Cornish-Fisher-Parameter für eine Standardabweichung der tatsächlichen Verteilung von 20 % und für beispielhafte Werte der Schiefe von  $-1,5$  bis  $1,5$  und Überkurtosis von 0 bis 10. Während die Cornish-Fisher-Parameter den tatsächlichen Verteilungseigenschaften einer Normalverteilung mit einer Schiefe  $sk$  und Überwölbung  $k$  von null und die Cornish-Fisher-Standardabweichung der empirischen Standardabweichung entsprechen, steigen die Abweichungen zwischen den empirischen Verteilungsparametern und den Cornish-Fisher-Parametern mit stärker ausgeprägten höheren Momenten an (Maillard, 2018 und Amédée-Manesme et al., 2019). Für eine Schiefe und Überkurtosis von  $-1,5$  ( $1,5$ ) und 10 resultieren Cornish-Fisher-Parameter von  $sk_{CF} = -0,867$  ( $0,867$ ) und  $k_{CF} = 3,919$ .

**Tabelle 16.5: Cornish-Fisher-Parameter**

Tabelle 16.5 zeigt die Cornish-Fisher-Parameter in Abhängigkeit verschiedener empirischer Verteilungsparameter. Die Cornish-Fisher-Standardabweichung lässt sich gemäß Gleichung (16.5) bestimmen und die Cornish-Fisher-Schiefe und -Kurtosis ergeben sich aus dem Gleichungssystem aus den Gleichungen (16.3) und (16.4).  $q'_{CF,\alpha}$  ist das inkorrekte Quantil, das aus der Cornish-Fisher-Approximation bei Verwendung der tatsächlichen Verteilungsparameter resultiert. Das korrekt geschätzte Quantil  $q_{CF,\alpha}$  basiert auf den transformierten Cornish-Fisher-Parametern.

Verteilungsparameter			Cornish-Fisher-Parameter			1%-Quantil	
$\sigma$	$sk$	$k$	$\sigma_{CF}$	$sk_{CF}$	$k_{CF}$	$q'_{CF,\alpha}$	$q_{CF,\alpha}$
20 %	-1,5	10	19,16 %	-0,867	3,919	-98,41 %	-68,94 %
20 %	-0,5	3	19,76 %	-0,356	1,715	-66,03 %	-58,11 %
20 %	-0,25	1	19,95 %	-0,212	0,767	-54,41 %	-52,73 %
20 %	0	0	20 %	0	0	-46,53 %	-46,53 %
20 %	0,25	1	19,95 %	0,212	0,767	-47,06 %	-46,55 %
20 %	0,5	3	19,76 %	0,356	1,715	-51,32 %	-47,77 %
20 %	1,5	10	19,16 %	0,867	3,919	-54,29 %	-44,50 %

Tabelle 16.5 gibt zum anderen einen Eindruck über die Höhe des Fehlers der Quantilschätzung, der auftritt, wenn die Transformation nicht berücksichtigt wird.  $q'_{CF,\alpha}$  ist als das inkorrekte Quantil definiert, das resultiert, wenn die Verteilungsparameter der tatsächlichen Verteilung zur Bestimmung des Quantils mithilfe der Cornish-Fisher-Approximation genutzt werden. Das korrekt geschätzte Quantil  $q_{CF,\alpha}$  basiert auf den transformierten Cornish-Fisher-Parametern. Betrachtet wird das 1%-Quantil. Es zeigt sich, dass bereits Abweichungen in der Quantilsbestimmung von bis zu 1,68 Prozentpunkten für Verteilungen mit einer Schiefe von  $\pm 0,25$  und Überkurtosis von 1 resultieren. Eine Abweichung von 30 Prozentpunkten entsteht bei einer Verteilung mit einer Schiefe der Renditeverteilung von  $-1,5$  und einer Überkurtosis von 10. Die Resultate unterstreichen die notwendige Transformation der empirisch beobachteten Momente bei Verwendung der Cornish-Fisher-Erweiterung auch bei Verteilungen die der Normalverteilung approximativ entsprechen.

## 16.2.2 Renditesimulation

Die Cornish-Fisher-Expansion zur Bestimmung eines Quantils einer Verteilung und des VaR kann, wie im Folgenden beschrieben, zur Simulation von Renditen verwendet werden. Die (jährliche) logarithmierte Rendite  $r_{log}$  kann durch Einsetzen der Cornish-Fisher-Erweiterung aus Gleichung (16.1) in Gleichung (16.2) als

$$r_{log} = \mu_{log} + \sigma_{CF} \cdot \left( x_\alpha + \frac{1}{6}(x_\alpha^2 - 1) \cdot sk_{CF} + \frac{1}{24}(x_\alpha^3 - 3x_\alpha) \cdot sk_{CF} - \frac{1}{36}(2x_\alpha^3 - 5x_\alpha) \cdot k_{CF}^2 \right) \quad (16.6)$$

geschrieben werden. Das Signifikanzniveau  $\alpha$  zur Bestimmung des  $\alpha$ -Quantils der Standardnormalverteilung  $x_\alpha$  in Formel (16.2) entspricht nun keinem vorgegebenen Wert zur Berechnung eines gewünschten Quantils. Zur Simulation von Renditen stellt  $\alpha$  in Gleichung (16.6) die Realisation einer gleichverteilten Zufallsvariablen aus dem Bereich  $[0; 1]$  dar, sodass  $x_\alpha$  einer Realisation, gezogen aus einer Standardnormalverteilung, entspricht.

Die Renditesimulation mit Gleichung (16.6) zur Erzeugung einer Renditeverteilung, die den Eigenschaften der tatsächlichen Verteilung einer Anlagemöglichkeit – oder eines Portfolios aus zwei oder mehreren der vorliegenden Indizes – entspricht, erfordert neben der Bestimmung der (annualisierten) Cornish-Fisher-Parameter  $\sigma_{CF}$ ,  $sk_{CF}$  und  $k_{CF}$  aus den empirischen Verteilungseigenschaften der tatsächlichen Verteilung der historischen Portfoliorenditen, wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, die Bestimmung der erwarteten logarithmierten Rendite  $\mu_{log}$ . Mit der erwarteten diskreten Rendite der Assets aus Tabelle 16.3 kann die erwartete logarithmierte Rendite  $\mu_{log}$  eines Vermögenswertes unter Berücksichtigung höherer Momente anhand der Beziehung

$$\mu_{log} = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 - \frac{1}{6}\sigma^3 - \frac{1}{24}\sigma^4 \quad (16.7)$$

bestimmt werden. Formel (16.7) baut dabei auf der Varianzkorrektur aus Gleichung (3.11) aus Teil 1 auf und berücksichtigt zusätzlich das dritte und vierte zentrierte Moment der Renditeverteilung, die durch  $\sigma^3$  und  $\sigma^4$  gegeben sind.<sup>21</sup>

<sup>21</sup>Analog zur Herleitung der Varianzkorrektur mit normalverteilten Renditen und der geometrischen Brownschen Bewegung als zugrunde liegendem Prozess (vgl. Teil 1), kann für nicht normalverteilte Renditen, die einer geometrischen Brownschen Bewegung mit Poisson-verteilten Sprüngen folgen (vgl. Teil 2), gezeigt werden, dass der Zusammenhang  $e^{\mu \cdot \Delta t} = \mathbb{E}(e^{\tilde{r}_{n,log}})$  gilt. Mithilfe einer Taylor-Approximation kann darauf aufbauend die Beziehung zwischen der erwarteten diskreten und der erwarteten logarithmierten Rendite aus Formel 16.7 hergeleitet werden.

# Kapitel 17

## Strategische Asset-Allokation

Die Implikationen der in Kapitel 15 dargelegten gesetzlichen Vorschriften zur Auslagerung von Pensionsverpflichtungen aus einer Pensionszusage von Trägerunternehmen auf Pensionsfonds und die daraus abgeleiteten kontextspezifischen Risikokennzahlen der Nachschusswahrscheinlichkeit und des Nachschuss-at-Risk auf die strategische Asset-Allokation von Pensionsfonds werden in diesem Kapitel analysiert. In Abschnitt 17.1 wird zunächst das  $\mu$ -CVaR Portfolio als eine mögliche Portfolioallokationsstrategie des Pensionsfonds vorgestellt. Die Verwendung dieser Strategie – die Minimierung des CVaR unter Beachtung einer mindestens zu erzielenden Rendite – ist durch die große Bedeutung des Conditional Value-at-Risk in der Regulatorik und im Portfolio- und Risikomanagement motiviert. Wie bereits in Abschnitt 15.3 diskutiert, stellt diese Strategie jedoch keine passgenaue Strategie dar, da sie die Risiken einer Unterdeckung nicht explizit aufgreift. Die aus dieser Strategie resultierende Portfolioallokation wird auf Basis der in Abschnitt 15.1 vorgestellten beispielhaften Anwärter- und Rentnerstruktur bezüglich der Nachschusswahrscheinlichkeit und des Nachschuss-at-Risk evaluiert.

Dazu werden in Abschnitt 17.2 die hinsichtlich beider kontextspezifischen Risikomaße effizienten Portfolioallokationen charakterisiert. Durch die simultane Betrachtung von zwei Risikomaßen werden die risikoeffizienten Portfolios durch Vorgabe eines Niveaus für den Nachschuss-at-Risk und Minimierung der Nachschusswahrscheinlichkeit hergeleitet. Als beispielhafte risikoeffiziente Portfolioallokation wird das NW-NaR Portfolio herangezogen. Dieses illustrative Portfolio zeichnet sich durch die minimale Nachschusswahrscheinlich-

keit unter der Voraussetzung, dass der erzielte Nachschuss-at-Risk den Nachschuss-at-Risk des  $\mu$ -CVaR Portfolios nicht übersteigt, aus.

## 17.1 $\mu$ -CVaR Strategie

Die  $\mu$ -CVaR Strategie umfasst die Minimierung des einjährigen 99%-CVaR unter Beachtung einer mindestens zu erzielenden Rendite, die im Folgenden als Zielrendite bezeichnet wird und dem Rechnungszins in Höhe von 2,30 % entspricht (vgl. Abschnitt 15.1). Eine jährlich erzielte Portfoliorendite in Höhe des Rechnungszinssatzes gewährleistet, dass der Pensionsfonds alle zukünftigen Rentenzahlungen ohne zwischenzeitliche Unterdeckung mit Nachschussverpflichtung des Trägerunternehmens leisten kann. Die Allokationsentscheidung wird dabei zum Zeitpunkt der Auslagerung der Pensionsverpflichtungen getroffen und es erfolgt eine jährliche Wiederherstellung der hergeleiteten Portfoliogewichte der Kapitalanlage (rebalancing). Das Optimierungsproblem schreibt sich als:

$$\min_x 99\text{-}CVaR \quad \text{u.d.Nb.} \quad \mu_{PF} \geq 2,30 \%, \quad (17.1)$$

wobei  $x$  die Portfoliogewichte der vier Assets darstellt. Leerverkäufe sind ausgeschlossen und es gilt, dass das gesamte zur Verfügung stehende Kapital zum Zeitpunkt der Auslagerung in die vier zur Auswahl stehenden Assets investiert wird, sodass die folgenden beiden Bedingungen bei der Portfoliooptimierung zusätzlich berücksichtigt werden:

$$x_i \geq 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^4 x_i = 1. \quad (17.2)$$

Zur Bestimmung des einjährigen 99%-CVaR wird ebenfalls auf die Cornish-Fisher-Erweiterung zurückgegriffen. Für eine gegebene empirische Verteilung der Renditen kann der – als positiver Wert definierte – einjährige  $(1 - \alpha)$ -CVaR unter Berücksichtigung der ersten vier Momente der Verteilung wie folgt bestimmt werden (Maillard, 2018, S. 12):

$$(1 - \alpha)\text{-}CVaR = - \left( \mu_{log} + \sigma_{CF} \cdot \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_\alpha^2}{2}} \cdot \left( 1 - \frac{1}{6} x_\alpha sk_{CF} + \frac{1}{24} (x_\alpha^2 - 1) k_{CF} + \frac{1}{36} (1 - 2x_\alpha^2) \cdot sk_{CF}^2 \right) \right), \quad (17.3)$$

**Tabelle 17.1: Eigenschaften des  $\mu$ -CVaR Portfolios (Alters- $\emptyset$  = 55 Jahre)**

Tabelle 17.1 zeigt die Portfolioallokation der  $\mu$ -CVaR Strategie in Panel A und die Charakteristika des Portfolios in Panel B. Die  $\mu$ -CVaR Strategie umfasst die Minimierung des einjährigen 99%-CVaR unter Beachtung der Zielrendite in Höhe des Rechnungszinssatzes von 2,30 % (vgl. Formel (17.1)). Die erwartete diskrete Portfoliorendite und Standardabweichung der Portfoliorenditen werden als  $\mu_{PF}$  und  $\sigma_{PF}$  bezeichnet und  $NW$  ist die Nachschusswahrscheinlichkeit. Der 1-Jahres 99%-CVaR gibt den bedingten Erwartungswert der 1 % größten Verluste an und der 99%-NaR die (barwertige) Nachschusshöhe, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % nicht überschritten wird. Der Altersdurchschnitt der Versorgungsanwärter und -empfänger beträgt 55 Jahre (vgl. Abschnitt 15.1).

**Panel A: Portfolioallokation**

	Aktienportfolio	Europäische Staatsanleihen	Europäische Pfandbriefe	US-Staatsanleihen
$\mu$ -CVaR Portfolio	17,7 %	8,3 %	63,2 %	10,8 %

**Panel B: Portfoliocharakteristika**

	$\mu_{PF}$	$\sigma_{PF}$	1-Jahres 99%-CVaR	NW	99%-NaR
$\mu$ -CVaR Portfolio	2,30 %	3,53 %	7,51 %	25,61 %	16,62 %

wobei erneut die (transformierten) Cornish-Fisher-Parameter anstelle der empirischen Verteilungsparameter Anwendung finden.

Tabelle 17.1 zeigt die resultierende Portfolioallokation der  $\mu$ -CVaR Strategie in Panel A sowie die Eigenschaften des Portfolios in Panel B. Mit einer Aktienquote von 17,7 % entspricht die erwartete Rendite  $\mu_{PF}$  des Portfolios dabei der Zielrendite von 2,30 %. Zudem werden alle zur Auswahl stehenden Anleihen in das Portfolio aufgenommen, wobei 8,3 % in europäische Staatsanleihen, 63,2 % in Pfandbriefe und 10,8 % in US-Staatsanleihen investiert wird. Durch die hohe Gewichtung der beiden – gemessen an der Standardabweichung der Renditen – risikoärmsten Anleiheindizes (Pfandbriefe und europäische Staatsanleihen) mit einem kumulierten Anteil am Portfolio von über 70 % beträgt die Standardabweichung  $\sigma_{PF}$  des Portfolios, das zur Minimierung des einjährigen 99%-CVaR führt, lediglich 3,53 %. Der resultierende CVaR weist einen Wert von 7,51 % auf. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Trägerunternehmen dem Pensionsfonds während der gesamten Rentenbezugszeit nochmals Kapital zuführen muss, beträgt dabei 25,61 %. Der 99%-NaR impliziert, dass

die Höhe des Nachschusses mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % nicht 16,62 % des initial ausgelagerten Kapitals übersteigt.

Wie in Abschnitt 15.3 diskutiert, stellt die  $\mu$ -CVaR Strategie, die unter Berücksichtigung einer mindestens zu erzielenden Rendite die zu erwartende jährliche durchschnittliche Verlusthöhe der 1 % schlechtesten Wertentwicklungen minimiert, keine kontextspezifische Strategie dar, die die tatsächlichen Risiken eines Nachschusses berücksichtigt. Mit der Nachschusswahrscheinlichkeit und dem Nachschuss-at-Risk als passgenaue Risikomaße werden im folgenden Abschnitt hinsichtlich dieser Kriterien risikoeffiziente Portfolioallokationen identifiziert und mit der Portfolioallokation und den Portfolioeigenschaften der  $\mu$ -CVaR Strategie verglichen.

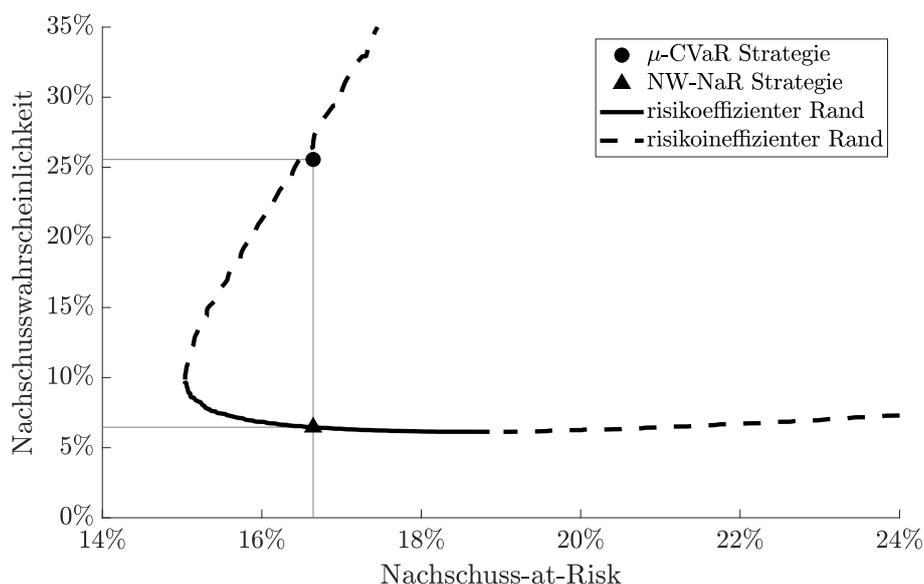
## 17.2 Risikoeffiziente Portfolios

Hinsichtlich der Nachschusswahrscheinlichkeit und des Nachschuss-at-Risk effiziente Portfolioallokationen sind dadurch gekennzeichnet, dass die Verbesserung eines Risikomaßes – die Reduktion der Nachschusswahrscheinlichkeit oder des Nachschuss-at-Risk – lediglich durch Verschlechterung des jeweils anderen Risikomaßes zu erzielen ist. Eine risikoineffiziente Portfolioallokation impliziert dahingehend, dass durch eine Reallokation der Portfoliogewichte die Verbesserung einer Risikokennzahl möglich ist, während die zweite Risikokennzahl unverändert bleibt oder ebenfalls verbessert wird.

Abbildung 17.1 illustriert die mithilfe der vier Assets zu bildenden Portfolios in Abhängigkeit der kontextspezifischen Risikomaße der Nachschusswahrscheinlichkeit und des Nachschuss-at-Risk. Analog zum  $\mu$ -CVaR Portfolio sind Leerverkäufe ausgeschlossen und das zur Verfügung stehende Kapital bei Auslagerung wird in die vier Anlagemöglichkeiten investiert (vgl. Gleichung (17.2)). Dabei weisen alle Portfolios Werte für die beiden Risikomaße auf, die auf dem – durch die gestrichelte und durchgezogene Linie dargestellten – Rand oder in dem durch den Rand aufgespannten Bereich liegen. Portfolios, die in diesem Bereich liegen, stellen keine NW-NaR effizienten Portfolios dar, da eine Verbesserung beider Risikokennzahlen durch Reallokation der jeweiligen Portfoliogewichte stets möglich ist. Dies gilt ebenso für Portfolios die den risikoineffizienten Rand, der durch die gestrichelte Linie gekennzeichnet ist, bilden.

### Abbildung 17.1: NW-NaR Diagramm (Alters-Ø = 55 Jahre)

Abbildung 17.1 stellt die kontextspezifischen Risikomaße der Nachschusswahrscheinlichkeit und des Nachschuss-at-Risk aller mithilfe der vier zur Auswahl stehenden Assets aller Portfolios dar. Dabei weisen die Portfolios Werte für die beiden Risikomaße auf, die auf dem Rand, oder innerhalb des durch den Rand aufgespannten Bereichs liegen. Der risikoeffiziente (risikoineffiziente) Rand ist durch die durchgezogene (gestrichelte) Linie gekennzeichnet. Die  $\mu$ -CVaR Strategie umfasst die Minimierung des einjährigen 99%-CVaR unter Beachtung der Zielrendite in Höhe des Rechnungszinssatzes von 2,30 % (vgl. Formel (17.1)). Die NW-NaR Strategie umfasst die Minimierung der Nachschusswahrscheinlichkeit unter der Nebenbedingung, dass der 99%-NaR den 99%-NaR der  $\mu$ -CVaR Strategie nicht übersteigt (vgl. Gleichung (17.4)). Der Altersdurchschnitt der Versorgungsanwärter und -empfänger beträgt 55 Jahre (vgl. Abschnitt 15.1).



Das im vorherigen Abschnitt betrachtete  $\mu$ -CVaR Portfolio ist in Abbildung 17.1 im NW-NaR Raum eingetragen. Das Portfolio liegt mit einer Nachschusswahrscheinlichkeit von 25,61 % und einem Nachschuss-at-Risk von 16,62 % nahe des linken ineffizienten Randes der möglichen Portfolioallokationen und stellt somit keine NW-NaR effiziente Portfolioallokation dar.

Die durchgezogene Linie in Abbildung 17.1 repräsentiert den risikoeffizienten Rand. Alle Portfolios, die diesen Rand charakterisieren, stellen NW-NaR effiziente Portfolios dar, da die Verbesserung eines Risikomaßes nur durch Verschlechterung des jeweils anderen zu gewährleisten ist. Es zeigt sich, dass ein Trade-off zwischen einer minimalen Nachschusswahrscheinlichkeit und eines minimalen Nachschuss-at-Risk bei der Wahl des risikoeffizienten Portfolios besteht und somit nicht nur ein hinsichtlich beider Risikokennzahlen effizientes Portfolio existiert. Das Portfolio am linken Ende des risikoeffizienten Randes stellt dabei

das Nachschuss-at-Risk minimierende Portfolio dar, welches einen Nachschuss-at-Risk von 15,03 % und eine Nachschusswahrscheinlichkeit von 9,75 % aufweist. Einhergehend mit einer Erhöhung des Nachschuss-at-Risk verringert sich die Nachschusswahrscheinlichkeit entlang des risikoeffizienten Randes und mündet in dem Portfolio, das die geringste Nachschusswahrscheinlichkeit aller Portfolios mit 6,13 % bei einem NaR von 18,86 % aufweist.

Zusätzlich ist in Abbildung 17.1 das Portfolio der NW-NaR Strategie gekennzeichnet. Aufbauend auf dem resultierenden Nachschuss-at-Risk der  $\mu$ -CVaR Strategie umfasst die NW-NaR Strategie die Minimierung der Nachschusswahrscheinlichkeit NW unter der Nebenbedingung, dass der 99%-NaR den resultierenden 99%-NaR der  $\mu$ -CVaR Strategie nicht übersteigt:

$$\min_x NW \quad \text{u.d.Nb.} \quad NaR_{NW-NaR} \leq NaR_{\mu-CVaR}. \quad (17.4)$$

Während eine Vielzahl risikoeffizienter Portfolioallokationen existiert, dient die Betrachtung dieses beispielhaften Portfolios der Einordnung der  $\mu$ -CVaR Strategie. Demnach zeigt die NW-NaR Strategie, in welchem Umfang die Nachschusswahrscheinlichkeit bei identischem (oder verbessertem) Nachschuss-at-Risk reduziert werden kann und verdeutlicht somit die Vorteilhaftigkeit der Integration kontextspezifischer Risikokennzahlen in die strategische Asset-Allokation. Abbildung 17.1 zeigt, dass bei einem identischen Nachschuss-at-Risk beider Strategien in Höhe von 16,62 % die Nachschusswahrscheinlichkeit des NW-NaR Portfolios mit 6,45 % im Vergleich zu 25,61 % des  $\mu$ -CVaR Portfolios mit mehr als 19 Prozentpunkten substantiell geringer ausfällt. Für die  $\mu$ -CVaR Strategie kann zusammengefasst werden:

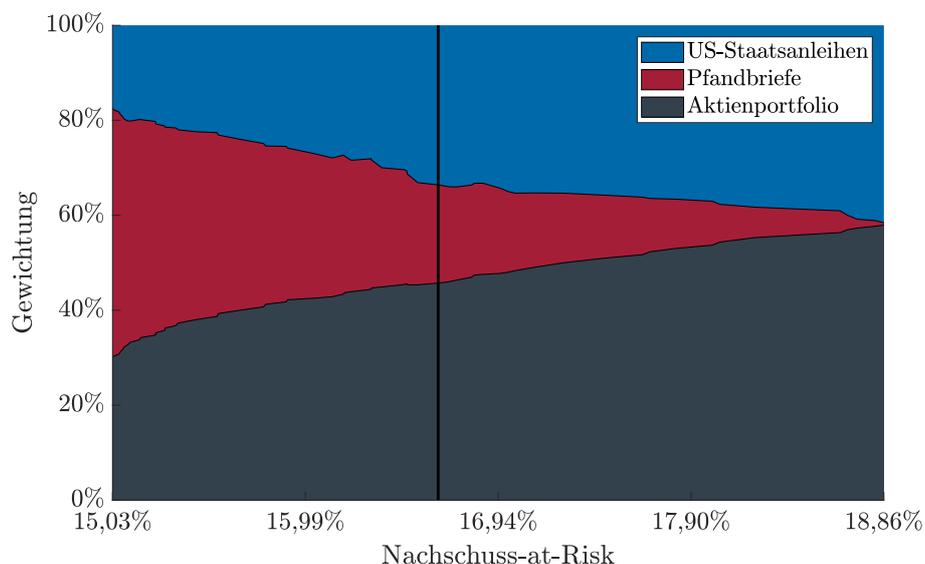
**Resultat 14 ( $\mu$ -CVaR Strategie)** *Die  $\mu$ -CVaR Strategie stellt hinsichtlich der beiden Risikokennzahlen der Nachschusswahrscheinlichkeit und des Nachschuss-at-Risk keine risikoeffiziente Portfolioallokationsstrategie dar. Vielmehr existieren Portfolioallokationen mit substantiell verbesserten kontextspezifischen Risikokennzahlen. Die  $\mu$ -CVaR Strategie als nicht passgenaue Strategie berücksichtigt die tatsächlichen Risiken bezüglich einer Unterdeckung mit Nachschussverpflichtung nicht und stellt dementsprechend für die Portfolioallokation von Pensionsfonds keine perfekt geeignete Strategie dar.*

Die Betrachtung der Gewichtungen in Abbildung 17.2 der Portfolios, die den risikoeffizienten Rand der Portfolios in Abbildung 17.1 bilden, ermöglicht es, die Unterschiede

hinsichtlich der Portfolioallokation im Vergleich zum risikoineffizienten  $\mu$ -CVaR Portfolio abzuleiten. Die Portfoliogewichte der risikoeffizienten Portfolios sind dabei nach aufsteigendem Nachschuss-at-Risk sortiert und die senkrechte Linie zeigt das NW-NaR Portfolio. Es wird deutlich, dass die risikoeffizienten Portfolios durch höhere Gewichtungen der Investitionsalternativen gekennzeichnet sind, die sowohl ein vergleichsweise hohes Risiko – ausgedrückt durch die Standardabweichung der Renditen – als auch eine höhere erwartete Rendite aufweisen. Dementsprechend werden in keinem der risikoeffizienten Portfolios europäische Staatsanleihen mit einer erwarteten Rendite nahe null aufgenommen und alle risikoeffizienten Portfolios weisen eine substanziell höhere Aktienquote als das  $\mu$ -CVaR Portfolio auf. So steigt die Aktienquote entlang des risikoeffizienten Randes mit zunehmendem Nachschuss-at-Risk und abnehmender Nachschusswahrscheinlichkeit von 30 % des NaR minimierenden Portfolios auf 57 % des Nachschusswahrscheinlichkeit minimierenden Portfolios an. Zugleich steigt analog zur Aktienquote die Gewichtung in den Anleiheindex mit der höchsten erwarteten Rendite und Volatilität – den US-Staatsanleihen

### Abbildung 17.2: Portfolioallokation risikoeffizienter Portfolios (Alters-Ø = 55 Jahre)

Abbildung 17.2 illustriert die Portfoliozusammensetzung der Portfolios, die den risikoeffizienten Rand der Portfolios in Abbildung (17.1) bilden in Abhängigkeit des 99%-Nachschuss-at-Risk. Europäische Staatsanleihen werden nicht berücksichtigt, da der Anleiheindex in keinem der risikoeffizienten Portfolios aufgenommen wird. Die senkrechte Linie markiert die Portfolioallokation des NW-NaR Portfolios mit einem Nachschuss-at-Risk in Höhe von 16,62 %. Die NW-NaR Strategie umfasst die Minimierung der Nachschusswahrscheinlichkeit unter der Nebenbedingung, dass der 99%-NaR den 99%-NaR der  $\mu$ -CVaR Strategie nicht übersteigt (vgl. Gleichung (17.4)). Der Altersdurchschnitt der Versorgungsanwärter und -empfänger beträgt 55 Jahre (vgl. Abschnitt 15.1).



– von 18 % auf 42 % an, die beim  $\mu$ -CVaR Portfolio bei rund 11 % liegt. Entsprechend reduziert sich die Gewichtung in Pfandbriefe bei steigendem Nachschuss-at-Risk der risikoeffizienten Portfolios ausgehend von 52 % und läuft gegen null.

Das beispielhafte risikoeffiziente NW-NaR Portfolio – gekennzeichnet durch die senkrechte Linie in Abbildung 17.2 – weist eine Aktienquote von 46,3 % auf und die Gewichtung in US-Staatsanleihen und Pfandbriefen beträgt 31,6 % und 22,1 %. Damit übersteigt die Aktienquote des NW-NaR Portfolios die Aktienquote des  $\mu$ -CVaR Portfolios von 17,7% um etwa 30 Prozentpunkte.

### Abbildung 17.3: Eigenschaften risikoeffizienter Portfolios (Alters-Ø = 55 Jahre)

Abbildung 17.3 veranschaulicht die Nachschusswahrscheinlichkeit, die erwartete Rendite, die Volatilität und den CVaR der Portfolios, die den risikoeffizienten Rand der Portfolios in Abbildung (17.1) bilden in Abhängigkeit des Nachschuss-at-Risk. Die NW-NaR Strategie umfasst die Minimierung der Nachschusswahrscheinlichkeit unter der Nebenbedingung, dass der 99%-NaR den 99%-NaR der  $\mu$ -CVaR Strategie nicht übersteigt (vgl. Gleichung (17.4)). Der Altersdurchschnitt der Versorgungsanwärter und -empfänger beträgt 55 Jahre (vgl. Abschnitt 15.1).

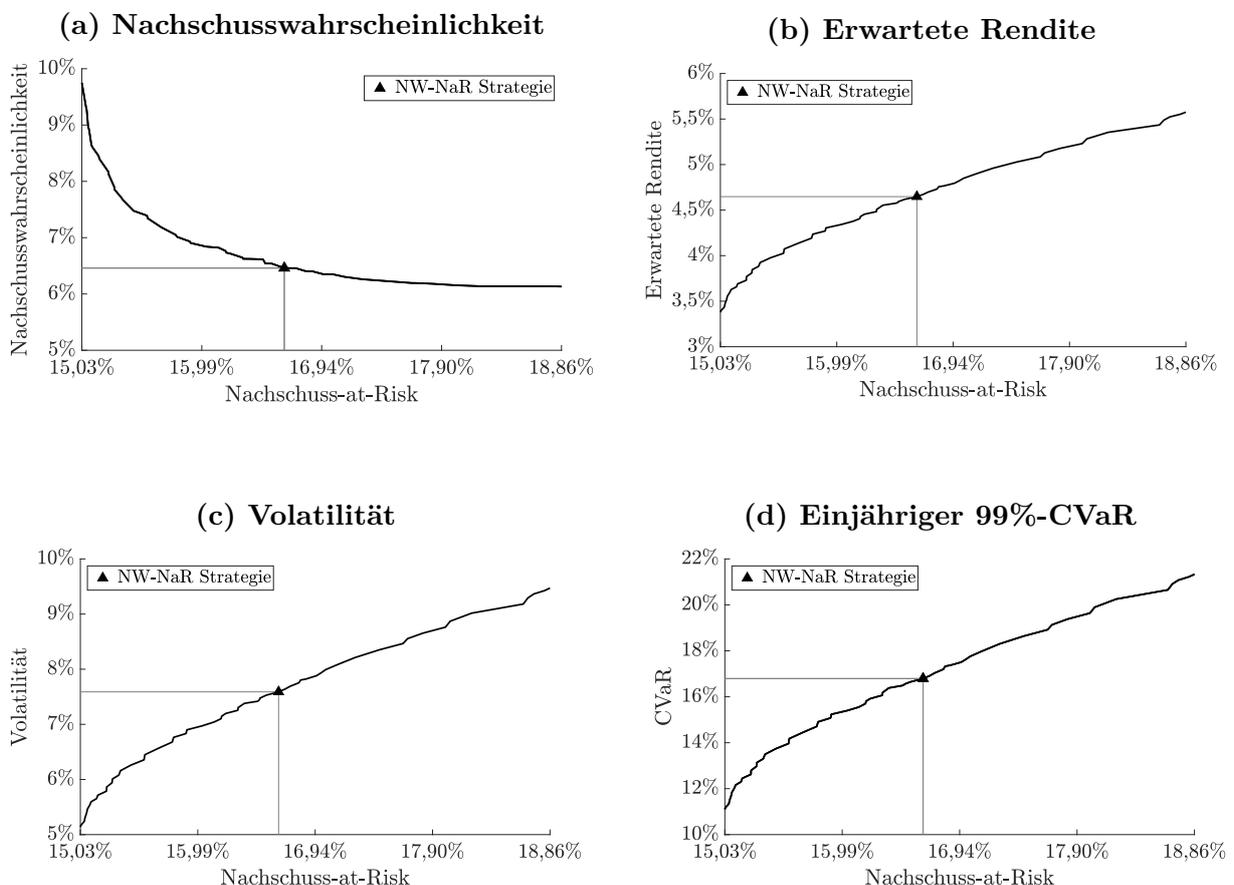


Abbildung 17.3 zeigt neben der Nachschusswahrscheinlichkeit mit der erwarteten Rendite, der Volatilität und dem einjährigen 99%-CVaR weitere Eigenschaften der risikoeffizienten Portfolios in Abhängigkeit des Nachschuss-at-Risk und bestätigt, dass durch die i) höhere Aktienquote sowie ii) größere Gewichtung höher verzinsten Anleihen der risikoeffizienten Portfolios im Vergleich zum  $\mu$ -CVaR Portfolio die risikoeffizienten Portfolios die vergleichsweise offensiven Portfolios darstellen. Die erwartete Rendite der risikoeffizienten Portfolios liegt dabei zwischen 3,4 % und 5,6 % und fällt damit bei allen Portfolios höher als der zugrunde liegende Rechnungszins und die erwartete Rendite des  $\mu$ -CVaR Portfolios aus (vgl. Abbildung 17.3 (b)). Damit einhergehend weisen die risikoeffizienten Portfolios zugleich höhere Ausprägungen der Risikokennzahlen als das  $\mu$ -CVaR Portfolio auf: Während die Standardabweichung der Renditen der risikoeffizienten Portfolios zwischen 5 % und knapp 10 % und der CVaR zwischen 11 % und 21,4 % liegen (vgl. Abbildung 17.3 (c) und (d)), weist das  $\mu$ -CVaR Portfolio Werte von 3,53 % und 7,51 % auf (vgl. Tabelle 17.1). Die Standard-Risikoeigenschaften der risikoeffizienten Portfolios übersteigen die jeweiligen Eigenschaften des  $\mu$ -CVaR Portfolios somit um das bis zu Dreifache.

Die Ergebnisse implizieren, dass eine größere Risikoaufnahme – messbar an der Standardabweichung der Renditen oder dem CVaR – im Vergleich zum  $\mu$ -CVaR Portfolio zur Reduktion pensionsfondsspezifischer Risikokennzahlen nötig ist. Ein Portfolio mit erhöhter Aktienquote und höherer erwarteter Rendite erweist sich damit als vorteilhaft, da die positiven Effekte der Zeitdiversifikation aufgrund des langfristigen Anlagehorizontes des Pensionsfonds zum Tragen kommen. Während kurzfristig eintretende höhere Wertverluste dieser Portfolios durch den langfristigen Investitionszeitraum in den Folgejahren ausgeglichen werden können, wirkt sich die höhere erwartete Rendite der Portfolios langfristig vorteilhaft auf die kontextspezifischen Risikomaße aus. Bezüglich der Portfoliogewichtung und den Eigenschaften risikoeffizienter Portfolios kann festgehalten werden:

**Resultat 15 (Risikoeffiziente Portfolios)** *Hinsichtlich der Nachschusswahrscheinlichkeit und des Nachschuss-at-Risk effiziente Portfolios weisen zum einen eine deutlich höhere Aktienquote als das  $\mu$ -CVaR auf. Zum anderen ist die Gewichtung in vergleichsweise renditestarke US-Staatsanleihen höher und es werden keine europäischen Staatsanleihen mit einer erwarteten Rendite nahe null in die risikoeffizienten Portfolios aufgenommen. Es folgt, dass alle risikoeffizienten Portfolios eine höhere erwartete Rendite als das*

*$\mu$ -CVaR Portfolio aufweisen – bei zugleich damit einhergehenden größeren Ausprägungen der Standard-Risikomaße.*

*Das Ergebnis verdeutlicht, dass ein gemessen an Standard-Risikomaßen risikoarmes Portfolio – mit einer zur Erfüllung aller Versorgungsansprüche ausreichend hohen jährlichen erwarteten Rendite –, wie das  $\mu$ -CVaR Portfolio, nicht zugleich ein hinsichtlich der kontextspezifischen Risikomaße der Nachschusswahrscheinlichkeit und des Nachschuss-at-Risk risikoarmes Portfolio darstellt. Das beispielhafte risikoeffiziente NW-NaR Portfolio stellt mit einer Standardabweichung der Renditen von 7,61 % und einem CVaR von 16,83 % im Vergleich zum  $\mu$ -CVaR Portfolio zwar das an Standard-Risikomaßen gemessene risikoreichere Portfolio dar, führt jedoch mit der höheren erwarteten Rendite von 4,66 % zu einer Reduktion der Nachschusswahrscheinlichkeit von rund 75 % bei identischem Nachschuss-at-Risk.*

Mit der Aktienquote als Hauptunterscheidungsmerkmal zwischen dem  $\mu$ -CVaR Portfolio und den risikoeffizienten Portfolios werden im Folgenden zunächst allgemein die Auswirkungen einer niedrigen beziehungsweise hohen Aktienquote auf die kurz- und langfristige Kapitalentwicklung von Portfolios betrachtet. Abbildung 17.4 zeigt dazu neben dem Median das 90%-Konfidenzintervall der Kapitalentwicklung eines Portfolios mit einer niedrigen Aktienquote von 10 % und einer hohen Aktienquote von 90 % ohne Berücksichtigung von Rentenzahlungen.<sup>22</sup> Das Portfolio mit der geringen (hohen) Aktienquote weist dabei eine erwartete Rendite von 2,42 % (7,20 %) und eine Standardabweichung der Renditen von 3,68 % (13,87 %) auf.

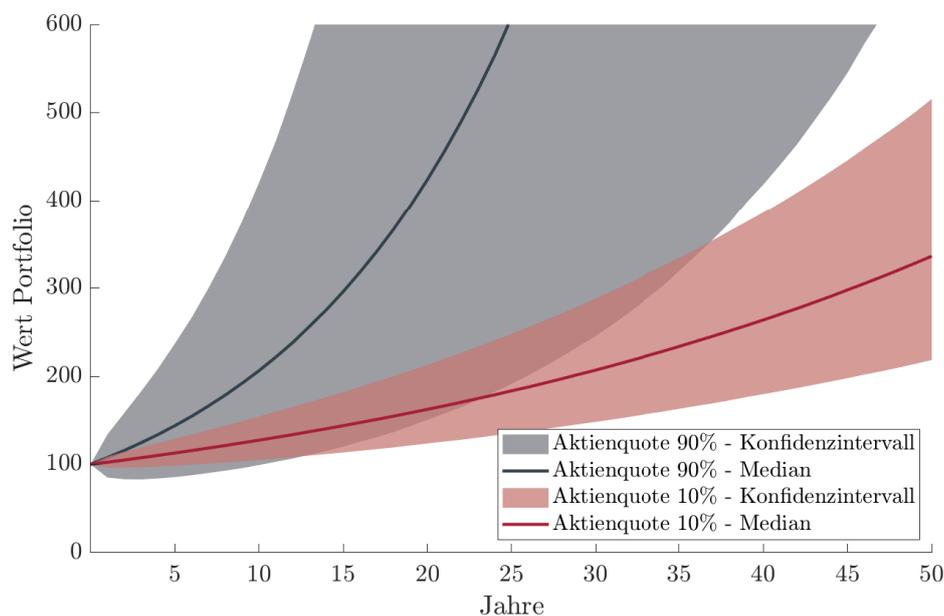
Die Abbildung verdeutlicht die Vorteilhaftigkeit einer hohen Aktienquote bei ausreichend langen Investitionshorizonten und greift den bereits in Teil 2 dieser Dissertation beschriebenen Aspekt der Zeitdiversifikation auf: Durch die hohe Standardabweichung der Renditen des Portfolios mit hoher Aktienquote im Vergleich zum Portfolio mit niedriger Aktienquote resultieren zwar vergleichsweise breite Konfidenzintervalle der Kapitalentwicklung, was dazu führt, dass das 5%-Quantil der Kapitalanlage mit niedriger Aktienquote das 5%-Quantil der Kapitalanlage mit hoher Aktienquote während der ersten zwölf Jahre nach initialer Investition übersteigt. Der Vergleich der 5%-Quantile beider Kapitalent-

---

<sup>22</sup>Das Anleiheportfolio, das mit der residualen Gewichtung von 90 % (10 %) in das Portfolio mit der niedrigen (hohen) Aktienquote aufgenommen wird, besteht dabei aus den drei Anleiheindizes, die gleichgewichtet in das Anleiheportfolio aufgenommen werden.

### Abbildung 17.4: Entwicklung des Medians und des 90%-Konfidenzintervalls von Portfolios mit unterschiedlichen Aktienquoten

Abbildung 17.4 illustriert den Median und das 90%-Konfidenzintervall der Kapitalentwicklung eines Portfolios mit hoher (90 %) und niedriger (10 %) Aktienquote. Das Aktienportfolio beinhaltet zu je 50 % den STOXX Europe 600 Performance Index und den S&P500 Performance Index. Das Anleiheportfolio, bestehend aus den drei in Kapitel 16.1 eingeführten Anleiheindizes, wird mit der residualen Gewichtung von 10 % und 90 % in das jeweilige Portfolio aufgenommen. Das Portfolio mit der hohen (geringen) Aktienquote weist eine erwartete Rendite von 7,20 % (2,42 %) und eine Standardabweichung der Renditen von 13,87 % (3,68 %) auf (vgl. Abschnitt 16.1).

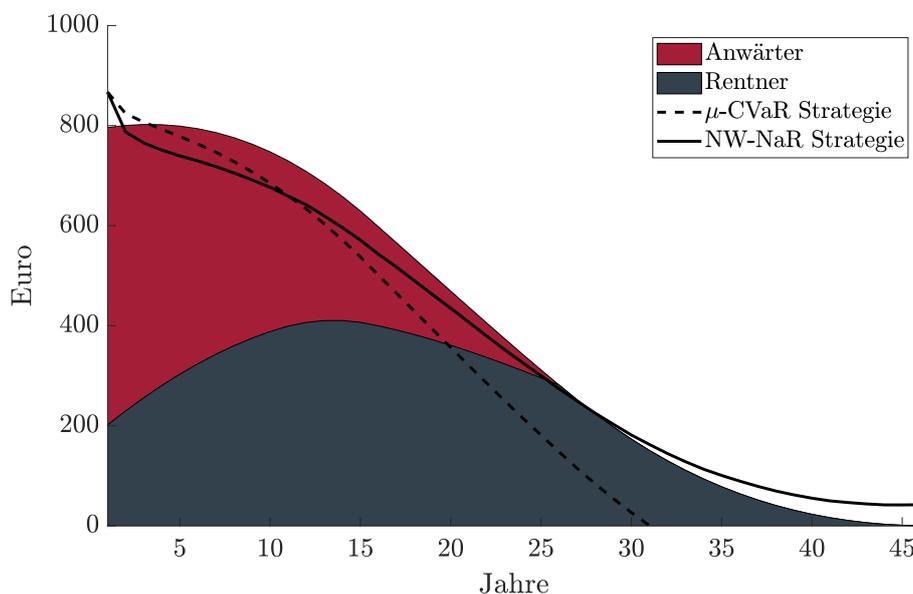


wicklungen impliziert damit das kurzfristig höhere Verlustrisiko des Portfolios mit hoher Aktienquote. Nach zwölf Jahren übersteigt die 5 % schlechteste Wertentwicklung des Portfolios mit hoher Aktienquote jedoch die entsprechende Entwicklung des Portfolios mit geringer Aktienquote. Bereits nach 22 Jahren weist das 5%-Quantil der Kapitalentwicklung des Portfolios mit hoher Aktienquote einen größeren Wert auf als die mittlere (Median-)Entwicklung des Portfolios mit niedriger Aktienquote und nach 36 Jahren übersteigt das 5%-Quantil der Kapitalentwicklung des Portfolios mit hoher Aktienquote das 95%-Quantil mit niedriger Aktienquote.

Es folgt, dass während eine vergleichsweise hohe Aktienquote durch das damit einhergehende größere Risiko (u.a. der Standardabweichung der Renditen) zu größeren kurzfristigen Verlusten führen kann, die höhere erwartete Rendite des Portfolios mit einem längeren Investitionszeitraum zunehmend zum Tragen kommt, sodass das Portfolio mit der hohen

### Abbildung 17.5: Entwicklung des 5%-Quantils der Kapitalanlage mit Rentenzahlungen (Alters-Ø = 55 Jahre)

Abbildung 17.5 illustriert die Entwicklung des 5%-Quantils der Kapitalanlage der  $\mu$ -CVaR Strategie und der NW-NaR Strategie unter Beachtung der (jährlichen) Rentenzahlungen vor dem Hintergrund des Verlaufs der Deckungsrückstellungen des Pensionsfonds der Versorgungsanwärter und -empfänger (vgl. Abschnitt 15.1). Die  $\mu$ -CVaR Strategie umfasst die Minimierung des einjährigen 99%-CVaR unter Beachtung der Zielrendite in Höhe des Rechnungszinssatzes von 2,30 % (vgl. Formel (17.1)). Die NW-NaR Strategie umfasst die Minimierung der Nachschusswahrscheinlichkeit unter der Nebenbedingung, dass der 99%-NaR den 99%-NaR der  $\mu$ -CVaR Strategie nicht übersteigt (vgl. Gleichung (17.4)). Der Altersdurchschnitt der Anwärter und Rentner beträgt 55 Jahre. Die gesetzlich vorgeschriebene Nachschussverpflichtung bei Unterdeckung wird bei der Entwicklung der Kapitalanlage nicht berücksichtigt.



Aktienquote langfristig substanziell mehr Kapital akkumuliert und damit – gemessen am 5%-Quantil der Kapitalentwicklung beider Portfolios – das langfristig risikoärmere Portfolio darstellt.

Abbildung 17.5 stellt nun die Entwicklung des 5%-Quantils der Kapitalanlage der  $\mu$ -CVaR Strategie und der NW-NaR Strategie unter Berücksichtigung der jährlichen Rentenzahlungen über den gesamten Auszahlungszeitraum der Versorgungsansprüche dar. Aus der Abbildung lässt sich ableiten, weshalb das vergleichsweise risikoarme  $\mu$ -CVaR Portfolio zu einer deutlich höheren Nachschusswahrscheinlichkeit im Vergleich zum NW-NaR Portfolio führt. Verpflichtende Nachschusszahlungen des Trägerunternehmens an den Pensionsfonds bei Unterdeckung sind in der Kapitalentwicklung nicht berücksichtigt.

Die stärker ausgeprägten Risikoeigenschaften des NW-NaR Portfolios im Vergleich zum  $\mu$ -CVaR Portfolio führen durch die vergleichsweise hohe Aktienquote zunächst zu den

höheren kurzfristigen potenziellen Verlusten: Das auf der  $\mu$ -CVaR Strategie basierende 5%-Quantil der Kapitalanlage übersteigt das 5%-Quantil der Kapitalentwicklung der NW-NaR Strategie während der ersten elf Jahre nach Auslagerung der Pensionsverpflichtungen. Aufgrund des Puffers zwischen dem Wert des ausgelagerten Kapitals und den Deckungsrückstellungen für Rentner zum Zeitpunkt der Auslagerung, der die Höhe der Deckungsrückstellung der Anwärter übersteigt, liegt die Wahrscheinlichkeit einer Unterdeckung – auch im Fall der vergleichsweise risikoreichen NW-NaR Strategie – innerhalb der ersten Jahre nach Auslagerung bei (nahe) null. Die erhöhte Risikoaufnahme impliziert damit kein höheres kurzfristiges Risiko einer Unterdeckung. Trotz des größeren Verlustrisikos wirkt sich die höhere Aktienquote somit nicht negativ auf die kontextspezifischen Risikoeigenschaften während der ersten Jahre nach Auslagerung aus. Nach elf Jahren entsprechen sich beide 5%-Quantile und das Quantil der Kapitalentwicklung der NW-NaR Strategie übersteigt das Quantil der  $\mu$ -CVaR Strategie über die restliche Rentenbezugszeit. Die höhere erwartete Rendite des NW-NaR Portfolios kommt somit langfristig zum Tragen, sodass die NW-NaR Strategie lediglich kurzfristig das höhere Verlustpotenzial – gemessen am 5%-Quantil – analog zu den Erkenntnissen aus Abbildung 17.4 birgt.

Es wird deutlich, weshalb die resultierende Nachschusswahrscheinlichkeit der  $\mu$ -CVaR Strategie um ein Vielfaches höher als die Nachschusswahrscheinlichkeit der NW-NaR Strategie ist: Bereits nach 21 Jahren führt die Kapitalentwicklung des 5%-Quantils der  $\mu$ -CVaR Strategie unter Beachtung der Rentenzahlungen zu einer Unterdeckung. Durch die vergleichsweise geringe Aktienquote des  $\mu$ -CVaR Portfolios ist die erzielte Rendite des Portfolios daher – im Gegensatz zur Rendite des NW-NaR Portfolios – nicht ausreichend hoch, um einer Unterdeckung langfristig vorzubeugen, sodass der einjährige CVaR als Zielkriterium für die Anlageentscheidung unter Berücksichtigung einer dem Rechnungszins entsprechenden Mindestrendite zu einer fehlgeleiteten Portfolioallokation führt. Zusammenfassend lässt sich festhalten:

**Resultat 16 (Strategische Asset-Allokation)** *Die vergleichsweise hohe Nachschusswahrscheinlichkeit der  $\mu$ -CVaR Strategie ist auf die im Vergleich zur NW-NaR Strategie geringe Portfoliorendite in Höhe des Rechnungszinssatzes zurückzuführen. Während die durch die höhere Aktienquote stärker ausgeprägten (Standard-)Risikomaße des NW-NaR Portfolios kurzfristig höhere potenzielle Verluste implizieren, haben diese aufgrund des Puffers zwischen dem Wert der Kapitalanlage und den Deckungsrückstel-*

lungen der Rentner kurzfristig kein erhöhtes Risiko einer Unterdeckung zur Folge, die zu Nachschussverpflichtungen des Trägerunternehmens führen. Es zeigt sich vielmehr, dass die erhöhte Risikoaufnahme der risikoeffizienten Portfolios und die damit einhergehende höhere Portfoliorendite, die den Rechnungszins deutlich übersteigt, nötig ist, um mittel- und langfristig ausreichend Kapital zu akkumulieren, sodass die Rentenzahlungen auch über diese Zeiträume mit geringer Nachschusswahrscheinlichkeit bedient werden können.

Die Ergebnisse betonen i) die notwendige Differenzierung zwischen kontextspezifischen und Standard-Risikomaßen sowie ii) die Vorteilhaftigkeit einer hohen Aktienquote im Rahmen der strategischen Asset-Allokation von Pensionsfonds. Diese impliziert zwar kurzfristig höhere potenzielle Verluste, durch den langfristigen Anlagehorizont des Pensionsfonds verbessert sie jedoch die Risikokennzahlen im Zusammenhang mit einer Nachschussverpflichtung des Trägerunternehmens – die Nachschusswahrscheinlichkeit und den Nachschuss-at-Risk. Das gemessen an den Standard-Risikomaßen risikoreichere Portfolio gemäß der NW-NaR Strategie stellt somit das kontextspezifisch risikoärmere Portfolio dar.

# Kapitel 18

## Robustheitsanalyse

Im Rahmen der Robustheitsanalyse werden in diesem Kapitel die Auswirkungen modifizierter Annahmen und Parameterspezifikationen auf die Portfolioallokation und auf die kontextspezifischen Risikomaße der  $\mu$ -CVaR Strategie und der risikoeffizienten Portfolios analysiert. Dazu werden in Abschnitt 18.1 zunächst die Implikationen unterschiedlicher Anwärter- und Rentnerstrukturen und in Abschnitt 18.2 die Implikationen modifizierter Ausprägungen der höheren Momente der Renditeverteilung – der Schiefe und Kurtosis – des Aktienportfolios auf die strategische Asset-Allokation von Pensionsfonds abgeleitet. Der Einfluss der Höhe des dem Pensionsfonds initial zur Verfügung stehenden Kapitals wird abschließend in Abschnitt 18.3 betrachtet.

### 18.1 Anwärter- und Rentnerstruktur

Die von Trägerunternehmen ausgelagerten Pensionsverpflichtungen können sich hinsichtlich der Anwärter- und Rentnerstruktur wesentlich voneinander unterscheiden. Im Rahmen dieses Abschnitts wird geprüft, wie die Portfolioallokation der risikoeffizienten Portfolios von den zugrunde liegenden Anwärtern und Rentnern abhängt. Dazu wird zunächst eine im Vergleich zum vorherigen Kapitel zehn Jahre jüngere Anwärter- und Rentnerstruktur mit einem Altersdurchschnitt von 45 Jahren berücksichtigt. Während die Annahmen aus Abschnitt 15.1 weiter Anwendung finden, werden Pensionsverpflichtungen von Anwärtern im Alter von dreißig bis sechzig Jahren auf den Pensionsfonds übertragen.

Abbildung 18.1 zeigt die Entwicklung der Deckungsrückstellungen über die gesamte Laufzeit des Pensionsfonds. Zum Zeitpunkt der Auslagerung liegen dem Pensionsfonds keine Versorgungsempfänger vor, sodass keine Deckungsrückstellungen für Rentner gebildet werden. Mit der ersten Rentenzahlung fünf Jahre nach Auslagerung der Pensionsverpflichtungen weist der Barwert der Ansprüche der Rentner einen positiven Wert auf und steigt in den folgenden fünfzehn Jahren durch die jährlichen Renteneintritte an, bevor die gebildeten Deckungsrückstellungen kontinuierlich sinken und 55 Jahre nach Auslagerung der Pensionsrückstellungen null entsprechen. Somit verschiebt sich die Fläche der Deckungsrückstellung der Rentner mit einem Altersdurchschnitt von 45 Jahren in Abbildung 18.1 im Vergleich zu den Deckungsrückstellungen mit einem Altersdurchschnitt von 55 Jahren in Abbildung 15.2 nach rechts. Das Maximum der gebildeten Deckungsrückstellungen für Rentner wird demnach zu einem späteren Zeitpunkt erreicht. Der Planungshorizont des Pensionsfonds verlängert sich darüber hinaus um zehn Jahre, wobei die letzte Rentenzahlung 55 Jahre nach Auslagerung der Pensionsverpflichtungen erfolgt.

### Abbildung 18.1: Rückstellungen des Pensionsfonds (Alters- $\bar{O}$ = 45 Jahre)

Abbildung 18.1 illustriert den Verlauf der Deckungsrückstellungen über den gesamten Auszahlungszeitraum der Versorgungsansprüche des Pensionsfonds der Versorgungsanwärter und -empfänger für die in Abschnitt 15.1 eingeführten Annahmen mit einem Altersdurchschnitt der Anwärter und Rentner zum Auslagerungszeitpunkt von 45 Jahren. Der Rechnungszins zur Bestimmung der Rückstellungen für die Anwärter und Rentner als Barwert der Ansprüche der jeweiligen Gruppe entspricht 2,30 %.

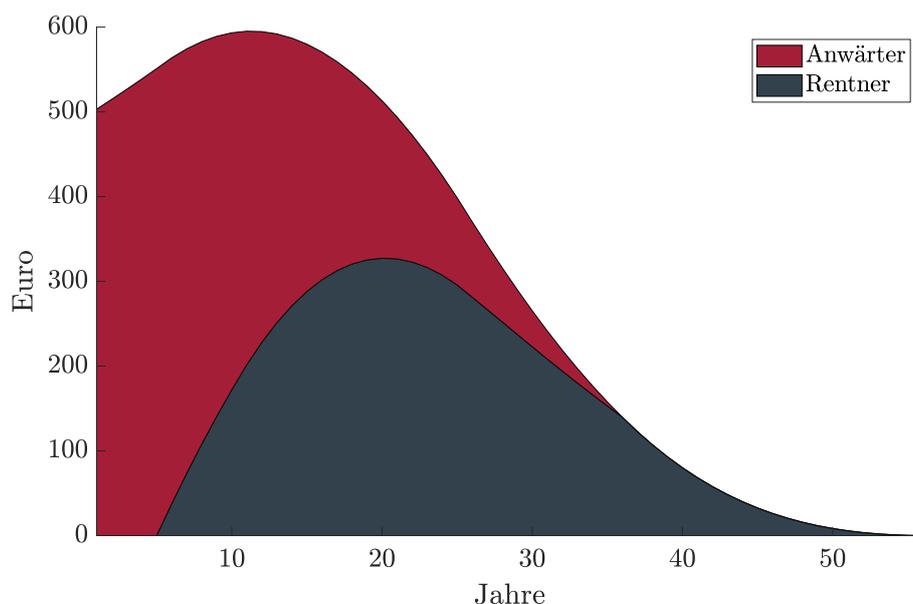


Abbildung 18.2: NW-NaR-Diagramm (Alters-Ø = 45 Jahre)

Abbildung 18.2 stellt die kontextspezifischen Risikomaße der Nachschusswahrscheinlichkeit und des Nachschuss-at-Risk aller mithilfe der vier zur Auswahl stehenden Assets aller Portfolios dar. Dabei weisen die Portfolios Werte für die beiden Risikomaße auf, die auf dem Rand oder innerhalb des durch den Rand aufgespannten Bereichs liegen. Der risikoeffiziente (risikoineffiziente) Rand ist durch die durchgezogene (gestrichelte) Linie gekennzeichnet. Die  $\mu$ -CVaR Strategie umfasst die Minimierung des einjährigen 99%-CVaR unter Beachtung der Zielrendite in Höhe des Rechnungszinssatzes von 2,30 % (vgl. Formel (17.1)). Die NW-NaR Strategie umfasst die Minimierung der Nachschusswahrscheinlichkeit unter der Nebenbedingung, dass der 99%-NaR den 99%-NaR der  $\mu$ -CVaR Strategie nicht übersteigt (vgl. Gleichung (17.4)). Der Altersdurchschnitt der Versorgungsanwärter und -empfänger beträgt 45 Jahre.

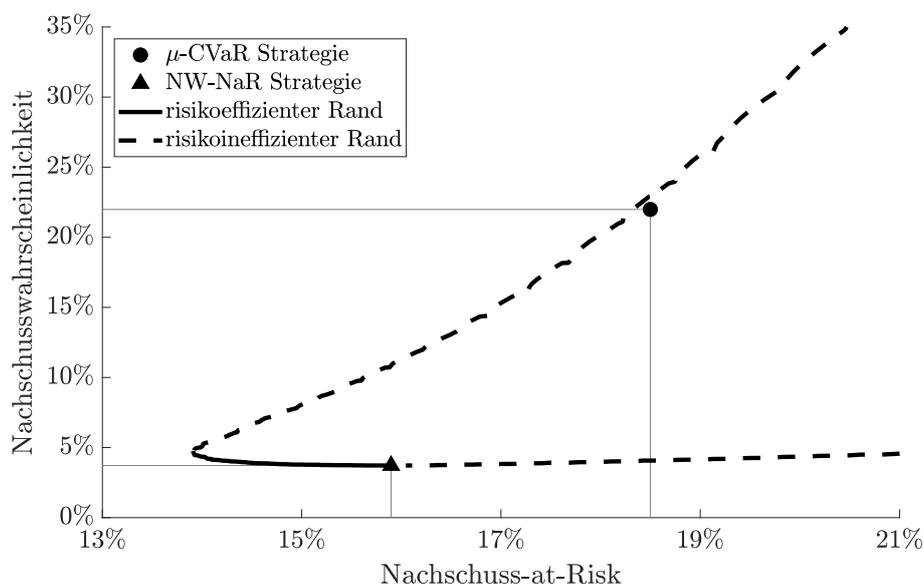


Abbildung 18.2 illustriert neben dem risikoeffizienten und risikoineffizienten Rand der möglichen Portfolioallokationen die Risikoeigenschaften des  $\mu$ -CVaR und des NW-NaR Portfolios hinsichtlich der Nachschusswahrscheinlichkeit und des Nachschuss-at-Risk unter Berücksichtigung der jüngeren Anwärter- und Rentnerstruktur. Während das  $\mu$ -CVaR Portfolio mit einem Nachschuss-at-Risk von 18,52 % und einer Nachschusswahrscheinlichkeit von 22,03 % erneut nahe des oberen risikoineffizienten Randes liegt, zeigt Abbildung 18.2, dass das NW-NaR Portfolio neben einer substantiell geringeren Nachschusswahrscheinlichkeit von 3,72 % zudem einen geringeren Nachschuss-at-Risk von 15,88 % aufweist. Das NW-NaR Portfolio entspricht in diesem Beispiel somit dem Portfolio mit minimaler Nachschusswahrscheinlichkeit.

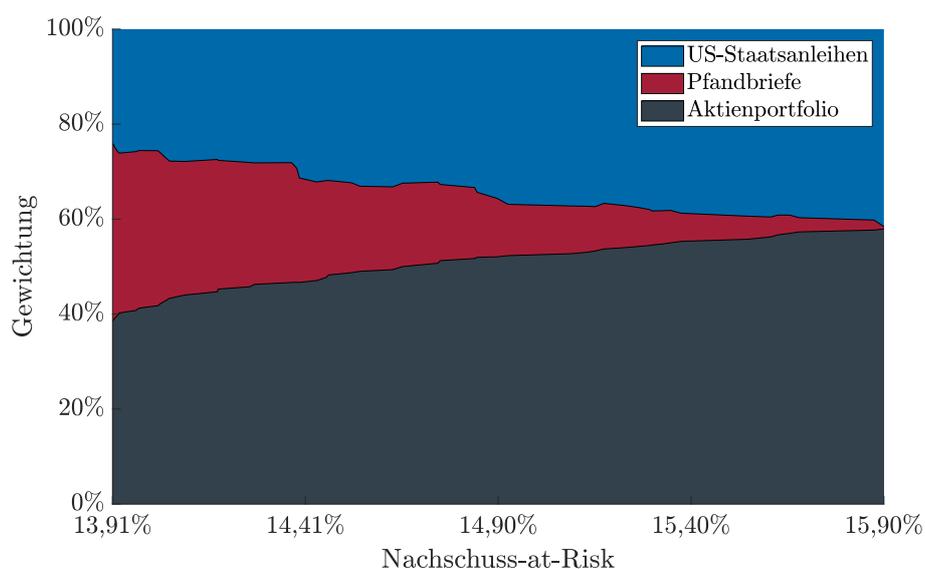
Während die Portfolioallokation des  $\mu$ -CVaR Portfolios und damit die resultierenden (Standard-)Risikomaße unabhängig von der Anwärter- und Rentnerstruktur sind und den Werten aus Tabelle 17.1 entsprechen, zeigt Abbildung 18.3, dass die Portfolios, die den

risikoeffizienten Rand in Abbildung 18.2 bilden, neben einer höheren Gewichtung in US-Staatsanleihen vor allem durch eine höhere Aktienquote gekennzeichnet sind im Vergleich zu den risikoeffizienten Portfolios unter Annahme einer älteren Anwärter- und Rentnerstruktur. So steigt die Aktienquote der risikoeffizienten Portfolios für die in diesem Kapitel berücksichtigte Anwärter- und Rentnerstruktur von 39 % auf rund 58 % an.

Als Folge dieser Portfolioallokationen weisen die risikoeffizienten Portfolios vergleichsweise hohe erwartete Renditen und Ausprägungen der (Standard-)Risikomaße auf. Für ein beispielhaftes risikoeffizientes Portfolio stellt Tabelle 18.1 neben der Portfolioallokation (Panel A) auch die Portfolioeigenschaften (Panel B) des NW-NaR Portfolios denen des  $\mu$ -CVaR Portfolios gegenüber. Durch die im Vergleich zur älteren Anwärter- und Rentnerstruktur höheren Aktienquote von 57,7 % (46,3 %) resultiert eine höhere erwartete Portfoliorendite von 5,57 % (4,62 %) als auch eine Standardabweichung der Renditen und ein 99%-CVaR von 9,45 % (7,51 %) und 21,21 % (16,83 %).

### Abbildung 18.3: Portfolioallokation risikoeffizienter Portfolios (Alters-Ø = 45 Jahre)

Abbildung 18.3 illustriert die Portfoliozusammensetzung der Portfolios in Abhängigkeit des 99%-Nachschuss-at-Risk, die den risikoeffizienten Rand der Portfolios in Abbildung (18.2) bilden. Europäische Staatsanleihen werden in der Abbildung nicht berücksichtigt, da der Anleiheindex in keinem der risikoeffizienten Portfolios aufgenommen wird. Die NW-NaR Strategie umfasst die Minimierung der Nachschusswahrscheinlichkeit unter der Nebenbedingung, dass der 99%-NaR den 99%-NaR der  $\mu$ -CVaR Strategie nicht übersteigt (vgl. Gleichung (17.4)). Der Altersdurchschnitt der Versorgungsanwärter und -empfänger beträgt 45 Jahre.



**Tabelle 18.1: Eigenschaften des  $\mu$ -CVaR und des NW-NaR Portfolios (Alters- $\emptyset = 45$  Jahre)**

Tabelle 18.1 zeigt die Portfolioallokation der  $\mu$ -CVaR Strategie in Panel A und ihre Charakteristika in Panel B. Die  $\mu$ -CVaR Strategie umfasst die Minimierung des einjährigen 99%-CVaR unter Beachtung der Zielrendite in Höhe des Rechnungszinssatzes von 2,30 % (vgl. Formel (17.1)). Die NW-NaR Strategie umfasst die Minimierung der Nachschusswahrscheinlichkeit unter der Nebenbedingung, dass der 99%-NaR den 99%-NaR der  $\mu$ -CVaR Strategie nicht übersteigt (vgl. Gleichung (17.4)). Die erwartete diskrete Portfoliorendite und Standardabweichung der Portfoliorenditen werden als  $\mu_{PF}$  und  $\sigma_{PF}$  bezeichnet und NW ist die Nachschusswahrscheinlichkeit. Der 1-Jahres 99%-CVaR gibt den bedingten Erwartungswert der 1 % größten Verluste an und der 99%-NaR die (barwertige) Nachschusshöhe, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % nicht überschritten wird. Der Altersdurchschnitt der Versorgungsanwärter und -empfänger beträgt 45 Jahre.

**Panel A: Portfolioallokation**

	Aktienportfolio	Europäische Staatsanleihen	Europäische Pfandbriefe	US-Staatsanleihen
$\mu$ -CVaR Portfolio	17,7 %	8,3 %	63,2 %	10,8 %
NW-NaR Portfolio	57,7 %	0 %	0,6 %	41,7 %

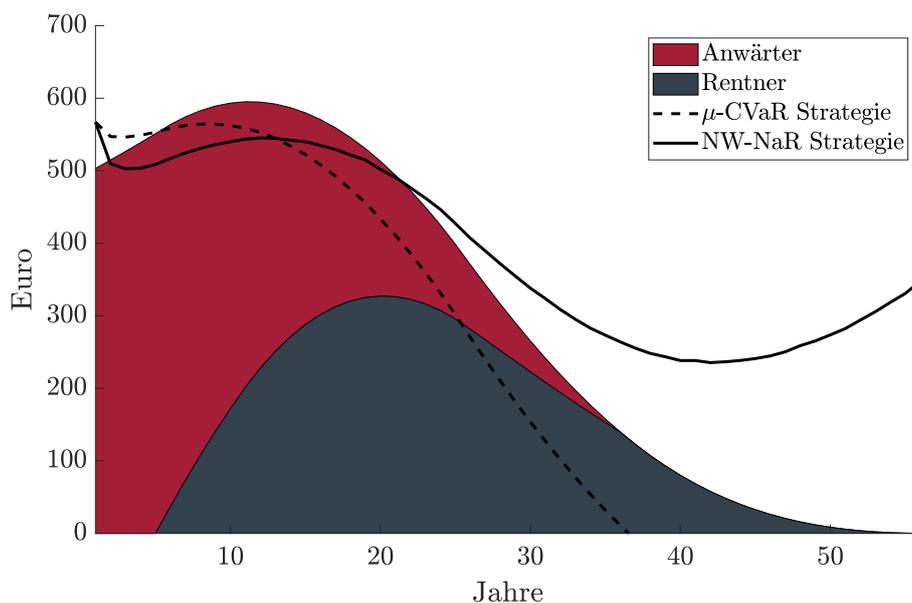
**Panel B: Portfoliocharakteristika**

	$\mu_{PF}$	$\sigma_{PF}$	1-Jahres 99%-CVaR	NW	99%-NaR
$\mu$ -CVaR Portfolio	2,30 %	3,53 %	7,51 %	22,03 %	18,52 %
NW-NaR Portfolio	5,57 %	9,45 %	21,21 %	3,72 %	15,88 %

Abbildung 18.4 illustriert die 5%-Quantile der Kapitalentwicklungen beider Strategien, sodass erneut die Implikationen der Portfolioallokationen hinsichtlich des kontextspezifischen Risikos abgeleitet werden können. Wie bereits im vorherigen Kapitel zeigt sich, dass das 5%-Quantil der Kapitalentwicklung des Portfolios der  $\mu$ -CVaR Strategie durch die (vergleichsweise) geringe Aktienquote zwar ein (vergleichsweise) geringes kurzfristiges Verlustrisiko birgt, nach 26 Jahren jedoch die Deckungsrückstellungen der Rentner unterschreitet und somit zu einer Nachschussverpflichtung führt. Das 5%-Quantil der Kapitalentwicklung des risikoeffizienten NW-NaR Portfolios impliziert mögliche substantielle kurzfristige Verluste, die die Verluste des NW-NaR Portfolios aus dem vorherigen Kapitel aufgrund der höheren Aktienquote nochmals übersteigen. Diese potenziellen Portfoliover-

### Abbildung 18.4: Entwicklung des 5%-Quantils der Kapitalanlage mit Rentenzahlungen (Alters-Ø = 45 Jahre)

Abbildung 18.4 illustriert die Entwicklung des 5%-Quantils der Kapitalanlage der  $\mu$ -CVaR Strategie und der NW-NaR Strategie unter Beachtung der (jährlichen) Rentenzahlungen vor dem Hintergrund des Verlaufs der Deckungsrückstellungen des Pensionsfonds der Versorgungsanwärter und -empfänger. Die  $\mu$ -CVaR Strategie umfasst die Minimierung des einjährigen 99%-CVaR unter Beachtung der Zielrendite in Höhe des Rechnungszinssatzes von 2,30 % (vgl. Formel (17.1)). Die NW-NaR Strategie umfasst die Minimierung der Nachschusswahrscheinlichkeit unter der Nebenbedingung, dass der 99%-NaR den 99%-NaR der  $\mu$ -CVaR Strategie nicht übersteigt (vgl. Gleichung (17.4)). Der Altersdurchschnitt der Versorgungsanwärter und -empfänger beträgt 45 Jahre. Die gesetzlich vorgeschriebene Nachschussverpflichtung bei Unterdeckung wird bei der Entwicklung der Kapitalanlage nicht berücksichtigt.



luste führen aufgrund der zeitlich nach hinten verlagerten Deckungsrückstellungen der Rentner in Folge der im Durchschnitt jüngeren Anwärter und Rentner jedoch zu keinem erhöhten Unterdeckungsrisiko. Nach knapp fünfzehn Jahren übersteigt das 5%-Quantil der Kapitalentwicklung der NW-NaR Strategie zudem das entsprechende Quantil der  $\mu$ -CVaR Strategie mittel- und langfristig und führt über die gesamte Laufzeit des Pensionsfonds zu keiner Unterdeckung. Auch wegen des insgesamt längeren Planungshorizontes des Pensionsfonds ist eine im Vergleich zur älteren Anwärter- und Rentnerstruktur höhere Aktienquote mit resultierender höherer erwarteter Rendite optimal, um das Risiko einer Unterdeckung so langfristig reduzieren zu können.

Tabelle 18.2 zeigt mit der Aktienquote, der erwarteten Rendite, dem 99%-CVaR und den beiden kontextspezifischen Risikomaßen der Nachschusswahrscheinlichkeit und des Nachschuss-at-Risk wesentliche Eigenschaften des  $\mu$ -CVaR und des NW-NaR Portfolios

für weitere Strukturen der Versorgungsanwärter und -empfänger. Unter gleichen Annahmen wie zuvor werden Anwärter und Rentner mit Altersdurchschnitten zum Zeitpunkt der Auslagerung der Pensionsverpflichtungen zwischen 40 und 65 Jahren berücksichtigt. Tabelle 18.2 bestätigt die im Rahmen dieses Kapitels bereits aufgezeigte Abhängigkeit der risikoeffizienten Portfolioallokation von der Anwärter- und Rentnerstruktur: Die Aktienquote des risikoeffizienten NW-NaR Portfolios steigt mit sinkendem Altersdurchschnitt der Versorgungsanwärter und -empfänger und damit auch die erwartete Rendite des Portfolios. Die Aktienquote des NW-NaR Portfolios steigt dabei von 26,4 % (Altersdurchschnitt von 65 Jahren) auf 58,2 % (Altersdurchschnitt von 40 Jahren) an.

Während der mit der steigenden Aktienquote der risikoeffizienten Portfolios zunehmende 99%-CVaR – als nicht kontextspezifisches Risikomaß – das damit einhergehende größere Risiko der Portfolios widerspiegelt, wird für alle Anwärter- und Rentnerstrukturen die Vorteilhaftigkeit der Berücksichtigung kontextspezifischer Risikokennzahlen in der Portfolioallokation deutlich: Bei einem maximalen Nachschuss-at-Risk in Höhe des resultierenden NaR der  $\mu$ -CVaR Strategie führt die NW-NaR Strategie zu einer Reduktion der resultierenden Nachschusswahrscheinlichkeit der  $\mu$ -CVaR Strategie von 42 % (65 Jahre) bis zu 85 % (40 Jahre). Zusammenfassend kann festgehalten werden:

**Resultat 17 (Anwärter- und Rentnerstruktur)** *Die Portfolioallokation hinsichtlich der Nachschusswahrscheinlichkeit und des Nachschuss-at-Risk effizienter Portfolios hängt von der Anwärter- und Rentnerstruktur zum Zeitpunkt der Auslagerung der Pensionsverpflichtungen ab. Es existiert somit keine Portfolioallokation, die für unterschiedliche Anwärter- und Rentnerstrukturen ein risikoeffizientes Portfolio darstellt. Daraus ergibt sich für die strategische Asset-Allokation von Pensionsfonds die Notwendigkeit, die ausgelagerte Anwärter- und Rentnerstruktur bei der Wahl eines hinsichtlich der beiden kontextspezifischen Risikomaße effizienten Portfolios zu berücksichtigen.*

*Die Ergebnisse dieses Kapitels zeigen, dass – induziert durch eine jüngere Anwärter- und Rentnerstruktur – je (i) länger der Planungshorizont des Trägerunternehmens und (ii) später der Höhepunkt der Deckungsrückstellung für Rentner, desto höher fällt die Aktienquote risikoeffizienter Portfolios aus. Neben einer höheren erwarteten Rendite der Portfolios führt die höhere Aktienquote zu stärker ausgeprägten (Standard-)Risikokennzahlen der Portfolios. Das dadurch vergrößerte Verlustrisiko der Kapitalanlage führt aufgrund*

**Tabelle 18.2: Portfolioeigenschaften für unterschiedliche Strukturen der Versorgungsanwärter und -empfänger**

Tabelle 18.2 zeigt mit der Aktienquote, der erwarteten Rendite, der Nachschusswahrscheinlichkeit, dem 99%-NaR und dem 99%-CVaR wesentliche Eigenschaften des  $\mu$ -CVaR und des NW-NaR Portfolios. Die  $\mu$ -CVaR Strategie umfasst die Minimierung des einjährigen 99%-CVaR unter Beachtung der Zielrendite in Höhe des Rechnungszinssatzes von 2,30 % (vgl. Formel (17.1)). Die NW-NaR Strategie umfasst die Minimierung der Nachschusswahrscheinlichkeit unter der Nebenbedingung, dass der 99%-NaR den 99%-NaR der  $\mu$ -CVaR Strategie nicht übersteigt (vgl. Gleichung (17.4)). Der 1-Jahres 99%-CVaR gibt den bedingten Erwartungswert der 1 % größten Verluste an und der 99%-NaR die (barwertige) Nachschusshöhe, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % nicht überschritten wird. Der Altersdurchschnitt der zugrunde gelegten Strukturen der Versorgungsanwärter und -empfänger reicht von 40 bis 65 Jahren.

Alters-Ø	Aktienquote		Erwartete Rendite		Nachschusswahrsch.		99%-Nachschuss-at-Risk		1-Jahres 99%-CVaR	
	$\mu$ -CVaR	NW-NaR	$\mu$ -CVaR	NW-NaR	$\mu$ -CVaR	NW-NaR	$\mu$ -CVaR	NW-NaR	$\mu$ -CVaR	NW-NaR
40	17,7 %	58,2 %	2,30 %	5,70 %	20,76 %	3,10 %	19,50 %	14,53 %	7,51 %	21,54 %
45	17,7 %	57,7 %	2,30 %	5,57 %	22,03 %	3,72 %	18,52 %	15,88 %	7,51 %	21,21 %
50	17,7 %	56,4 %	2,30 %	5,42 %	23,63 %	4,73 %	17,33 %	16,85 %	7,51 %	20,87 %
55	17,7 %	46,3 %	2,30 %	4,66 %	25,61 %	6,45 %	16,62 %	16,62 %	7,51 %	16,83 %
60	17,7 %	35,1 %	2,30 %	3,74 %	27,94 %	10,37 %	16,08 %	16,08 %	7,51 %	12,65 %
65	17,7 %	26,4 %	2,30 %	3,07 %	30,99 %	17,97 %	15,77 %	15,77 %	7,51 %	9,83 %

*des Puffers zwischen der erhaltenen Einmalprämie und den Deckungsrückstellungen der Rentner im Fall (ausreichend) junger Anwärter- und Rentnerstrukturen dabei allerdings zu keinem gestiegenen Risiko einer Unterdeckung. Vielmehr ist die hohe Aktienquote aufgrund des längeren Investitionszeitraums und den später anfallenden Rentenzahlungen bei einer jungen Anwärter- und Rentnerstruktur zum Auslagerungstichtag zur langfristigen Vermeidung von Nachschüssen erforderlich.*

## 18.2 Schiefe und Kurtosis des Aktienportfolios

In Anlehnung an den zweiten Teil der vorliegenden Dissertation, in dem der Einfluss des Katastrophenrisikos auf Anlageentscheidungen von Investoren analysiert wird, werden in diesem Abschnitt die Auswirkungen höherer Momente der Renditeverteilung des Aktienportfolios auf die Portfolioallokationen und -eigenschaften der  $\mu$ -CVaR und NW-NaR Strategie untersucht. Dazu wird für ein größeres mit dem Aktienportfolio einhergehendes Tail-Risiko eine negative Schiefe von  $-1,1$  sowie eine Überkurtosis von  $2,5$  bei ansonsten identischen Verteilungseigenschaften angenommen (vgl. Tabelle 16.1).

Tabelle 18.3 zeigt die resultierenden Portfolioallokationen und -eigenschaften beider Strategien unter Berücksichtigung der modifizierten Verteilungseigenschaften des Aktienportfolios für die Anwärter- und Rentnerstruktur mit einem Altersdurchschnitt von 55 Jahren. Zu Vergleichszwecken sind die Resultate aus Kapitel 17 in Klammern angegeben. Die höhere negative Schiefe und Kurtosis des Aktienportfolios führen beim  $\mu$ -CVaR Portfolio zu einer Reduktion der Aktienquote von einem Prozentpunkt auf  $16,7\%$  ( $17,7\%$ ). Zur Erfüllung der Zielrendite wird die Gewichtung in Pfandbriefe und europäische Staatsanleihen reduziert und mit  $15,1\%$  ein höherer Anteil in US-Staatsanleihen mit der höchsten erwarteten Verzinsung investiert. Der resultierende CVaR erhöht sich von  $7,51\%$  auf  $9,52\%$ . Während die Nachschusswahrscheinlichkeit mit  $25,27\%$  nahezu unverändert bleibt, resultiert ein mit  $17,51\%$  höherer Nachschuss-at-Risk ( $16,62\%$ ).

Die Portfolioallokation des risikoeffizienten NW-NaR Portfolios weist trotz der stärkeren Ausprägung höherer Momente des Aktienportfolios eine nach wie vor hohe Aktienquote von  $41,0\%$  ( $46,3\%$ ) auf. Die Gewichtung in Pfandbriefe erhöht sich von  $22,1\%$  auf  $30,5\%$  und die Gewichtung in US-Staatsanleihen beträgt  $28,5\%$  ( $31,6\%$ ). Das mit dem

**Tabelle 18.3: Portfolioeigenschaften mit höherer (negativer) Schiefe und Kurtosis des Aktienportfolios (Alters-Ø = 55 Jahre)**

Tabelle 18.3 zeigt die Portfolioallokation der  $\mu$ -CVaR Strategie und der NW-NaR Strategie in Panel A und ihre Charakteristika in Panel B. Für das Aktienportfolio wird eine Schiefe von  $-1,1$  und eine Überkurtosis von  $2,5$  bei ansonsten identischen Verteilungseigenschaften angenommen. In Klammern sind die Ergebnisse aus Kapitel 17 gegeben. Die  $\mu$ -CVaR Strategie umfasst die Minimierung des einjährigen 99%-CVaR unter Beachtung der Zielrendite in Höhe des Rechnungszinssatzes von  $2,30\%$  (vgl. Formel (17.1)). Die NW-NaR Strategie umfasst die Minimierung der Nachschusswahrscheinlichkeit unter der Nebenbedingung, dass der 99%-NaR den 99%-NaR der  $\mu$ -CVaR Strategie nicht übersteigt (vgl. Gleichung (17.4)). Die erwartete diskrete Portfoliorendite und Standardabweichung der Portfoliorenditen werden als  $\mu_{PF}$  und  $\sigma_{PF}$  bezeichnet und NW ist die Nachschusswahrscheinlichkeit. Der 1-Jahres 99%-CVaR gibt den bedingten Erwartungswert der 1 % größten Verluste an und der 99%-NaR die (barwertige) Nachschusshöhe, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % nicht überschritten wird. Der Altersdurchschnitt der Anwärter und Rentner beträgt 55 Jahre.

**Panel A: Portfolioallokation**

	Aktienportfolio	Europäische Staatsanleihen	Europäische Pfandbriefe	US-Staatsanleihen
$\mu$ -CVaR Portfolio	16,7 % (17,7 %)	7,6 % (8,3 %)	60,6 % (63,2 %)	15,1 % (10,8 %)
NW-NaR Portfolio	41,0 % (46,3 %)	0 % (0 %)	30,5 % (22,1 %)	28,5 % (31,6 %)

**Panel B: Portfoliocharakteristika**

	$\mu_{PF}$	$\sigma_{PF}$	1-Jahres 99%-CVaR	NW	99%-NaR
$\mu$ -CVaR Portfolio	2,30 % (2,30 %)	3,59 % (3,53 %)	9,52 % (7,51 %)	25,72 % (25,61 %)	17,51 % (16,62 %)
NW-NaR Portfolio	4,27 % (4,66 %)	6,82 % (7,61 %)	20,50 % (16,83 %)	7,24 % (6,45 %)	17,51 % (16,62 %)

Aktienportfolio einhergehende größere Tail-Risiko führt zu einer Erhöhung des CVaR des NW-NaR Portfolios von  $16,83\%$  auf  $20,50\%$ .

Mit der zusätzlich um rund 40 Basispunkten geringeren erwarteten Rendite des risikoeffizienten Portfolios von  $4,27\%$  ( $4,66\%$ ) resultiert eine von  $6,45\%$  auf  $7,24\%$  gestiegene Nachschusswahrscheinlichkeit. Die vergleichsweise hohe Aktienquote des risikoeffizienten

Portfolios führt damit zu einer größeren Abhängigkeit der resultierenden Nachschusswahrscheinlichkeit von den Verteilungseigenschaften der Renditen des Aktienportfolios im Vergleich zum  $\mu$ -CVaR Portfolio. So steigt die Nachschusswahrscheinlichkeit des NW-NaR Portfolios um 79 Basispunkte und die des  $\mu$ -CVaR Portfolios um lediglich 11 Basispunkte. Die bei einem identischen Nachschuss-at-Risk im Vergleich zum  $\mu$ -CVaR Portfolio weiterhin um mehr als 18 Prozentpunkte geringere Nachschusswahrscheinlichkeit des NW-NaR Portfolio verdeutlicht jedoch weiterhin die Vorteilhaftigkeit einer hohen Aktienquote trotz der stärkeren Ausprägung der (negativen) Schiefe und Kurtosis aufgrund des langfristigen Anlagehorizontes des Pensionsfonds. Zusammenfassend kann festgehalten werden:

**Resultat 18 (Schiefe und Kurtosis des Aktienportfolios)** *Aufgrund des langfristigen Anlagehorizontes des Pensionsfonds haben die stärker ausgeprägte (negative) Schiefe und Kurtosis der Renditeverteilung des Aktienportfolios nur einen geringen Einfluss auf die Portfolioallokation des beispielhaften risikoeffizienten NW-NaR Portfolios. Das risikoeffiziente Portfolio weist eine nur geringfügig niedrigere Aktienquote im Vergleich zur Aktienquote des risikoeffizienten Portfolios unter Berücksichtigung der empirisch beobachteten Eigenschaften des Aktienportfolios auf. Nach wie vor übersteigt die Aktienquote die Aktienquote des  $\mu$ -CVaR Portfolios substanziell. Trotz des höheren Katastrophenrisikos und des damit verbundenen gestiegenen kurzfristigen Verlustpotenzials des Aktienportfolios wird eine hohe Gewichtung von Aktien zur Erzielung einer ausreichend hohen Rendite benötigt, um langfristig die Risiken verbunden mit einer Unterdeckung zu reduzieren.*

## 18.3 Einmalprämie zur Auslagerung der Pensionsverpflichtungen

Die Einmalprämie, die vom Trägerunternehmen zur Auslagerung der Pensionsverpflichtungen an den Pensionsfonds gezahlt wird, entspricht für die bisherigen Analysen per Annahme dem Barwert der mit dem HGB-Zins bewerteten Pensionszusagen der Anwärter und Rentner. Im Folgenden wird der Einfluss eines um 50 Basispunkte geringeren Zinssatzes von 1,30 % (1,80 %) zur Bestimmung der Einmalprämie bei identischem Rechnungszins von 2,30 % auf die Portfolioallokation analysiert. Während durch den unverän-

derden Rechnungszins die Deckungsrückstellungen vom Pensionsfonds für Anwärter und Rentner mit einem Altersdurchschnitt von 55 Jahren unverändert gebildet werden, erhöht sich das vom Pensionsfonds zum Zeitpunkt der Auslagerung zur Verfügung stehende Kapital. Als Folge dieser Modifikation vergrößert sich der Puffer zwischen dem Wert der Kapitalanlage und den Deckungsrückstellungen der Rentner zum Auslagerungsstichtag.

**Tabelle 18.4: Portfolioeigenschaften mit höherer Einmalprämie zur Auslagerung der Pensionsverpflichtungen (Alters-Ø = 55 Jahre)**

Tabelle 18.4 zeigt die Portfolioallokation der  $\mu$ -CVaR Strategie und der NW-NaR Strategie in Panel A und ihre Charakteristika in Panel B. Der Zinssatz zur Bestimmung der Einmalprämie als Barwert der Pensionszusagen der Versorgungsanwärter und -empfänger entspricht 1,30 %. In Klammern sind die Ergebnisse aus Kapitel 17 für einen Zinssatz von 1,80 % gegeben. Die  $\mu$ -CVaR Strategie umfasst die Minimierung des einjährigen 99%-CVaR unter Beachtung der Zielrendite in Höhe des Rechnungszinssatzes von 2,30 % (vgl. Formel (17.1)). Die NW-NaR Strategie umfasst die Minimierung der Nachschusswahrscheinlichkeit unter der Nebenbedingung, dass der 99%-NaR den 99%-NaR der  $\mu$ -CVaR Strategie nicht übersteigt (vgl. Gleichung (17.4)). Die erwartete diskrete Portfoliorendite und Standardabweichung der Portfoliorenditen werden als  $\mu_{PF}$  und  $\sigma_{PF}$  bezeichnet und NW ist die Nachschusswahrscheinlichkeit. Der 1-Jahres 99%-CVaR gibt den bedingten Erwartungswert der 1 % größten Verluste an und der 99%-NaR die (barwertige) Nachschusshöhe, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % nicht überschritten wird. Der Altersdurchschnitt der Anwärter und Rentner beträgt 55 Jahre.

**Panel A: Portfolioallokation**

	Aktienportfolio	Europäische Staatsanleihen	Europäische Pfandbriefe	US-Staatsanleihen
$\mu$ -CVaR Portfolio	17,7 % (17,7 %)	8,3 % (8,3 %)	63,2 % (63,2 %)	10,8 % (10,8 %)
NW-NaR Portfolio	43,6 % (46,3 %)	0 % (0 %)	27,2 % (22,1 %)	29,2 % (31,6 %)

**Panel B: Portfoliocharakteristika**

	$\mu_{PF}$	$\sigma_{PF}$	1-Jahres 99%-CVaR	NW	99%-NaR
$\mu$ -CVaR Portfolio	2,30 % (2,30 %)	3,53 % (3,53 %)	7,51 % (7,51 %)	8,61 % (25,61 %)	9,45 % (16,62 %)
NW-NaR Portfolio	4,45 % (4,66 %)	7,18 % (7,61 %)	15,82 % (16,83 %)	3,20 % (6,45 %)	9,45 % (16,62 %)

Tabelle 18.4 zeigt die resultierenden Portfolioallokationen und -eigenschaften. Da die Portfolioallokation der  $\mu$ -CVaR Strategie unabhängig von der Höhe des ausgelagerten Kapitals ist, weist das  $\mu$ -CVaR Portfolio eine identische Portfolioallokation sowie Standard-Risikoeigenschaften im Vergleich zu Kapitel 17 auf (vgl. Tabelle 18.4). Aufgrund des größeren Puffers zwischen dem initialen Anlagebetrag des Pensionsfonds und den Deckungsrückstellungen der Rentner resultieren mit einer Nachschusswahrscheinlichkeit von 8,61 % (25,61 %) und einem Nachschuss-at-Risk von 9,45 % (16,62 %) hingegen substantiell geringere Werte der kontextspezifischen Risikomaße. Da der Nachschuss-at-Risk als Prozent des ausgelagerten Kapitals definiert ist, wird die Reduktion des NaR durch die höhere Einmalprämie teilweise kompensiert. Es ergibt sich eine (effektive) Reduktion von 38 %.

Das risikoeffiziente NW-NaR Portfolio weist bei einem im Vergleich zur  $\mu$ -CVaR Strategie identischen Nachschuss-at-Risk eine weiterhin deutlich höhere Aktienquote von 43,6 % und Gewichtung der US-Staatsanleihen von 27,2 % auf. Die resultierende Nachschusswahrscheinlichkeit beträgt 3,2 % (6,45 %) und halbiert sich infolge des höheren Anlagebetrags des Pensionsfonds zum Zeitpunkt der Auslagerung. Zusammenfassend kann festgehalten werden:

**Resultat 19 (Einmalprämie)** *Die Höhe des dem Pensionsfonds zur Verfügung stehenden Kapitals, ceteris paribus, beeinflusst wesentlich die Ausprägungen der kontextspezifischen Risikomaße. Dabei führt ein größerer initialer Kapitalbetrag aufgrund des größeren Puffers zu den Deckungsrückstellungen der Rentner zu einem geringeren kontextspezifischen Risiko: Die Nachschusswahrscheinlichkeit und der Nachschuss-at-Risk weisen infolge des höheren Anlagebetrags geringere Ausprägungen auf. Die resultierende Portfolioallokation des NW-NaR Portfolios verdeutlicht weiterhin die Notwendigkeit einer vergleichsweise hohen Aktienquote und damit hohen erwarteten Rendite zur Reduzierung der mit einer Unterdeckung verbundenen Risiken.*

# Kapitel 19

## Zusammenfassende Beurteilung

Dieser Teil der Dissertation beschäftigt sich mit der strategischen Asset-Allokation von Pensionsfonds mit dem Ziel, das Bewusstsein für die (notwendige) Differenzierung zwischen Standard-Risikomaßen und kontextspezifischen Risikomaßen bei der Portfolioallokation von Pensionsfonds im Besonderen – aber auch im Rahmen weiterer Anlageentscheidungen im Allgemeinen – zu schärfen. Die Ergebnisse zeigen, dass die Ausrichtung der strategischen Asset-Allokation von Pensionsfonds nach einem etablierten (und aussagekräftigen) Risikomaß – beispielhaft wird eine Strategie berücksichtigt, die den einjährigen 99%-CVaR unter Beachtung einer jährlichen Mindestrendite, die bei Erzielung zur Erfüllung aller Versorgungsansprüche über den gesamten Auszahlungszeitraum des Pensionsfonds ohne zusätzlichen Nachschuss ausreicht, minimiert – zu einer fehlgeleiteten Portfolioallokation führt und nicht als Kriterium für Anlageentscheidungen herangezogen werden sollte.

Gemäß den gesetzlichen Vorschriften zu nicht versicherungsförmigen Pensionsfonds muss ein Trägerunternehmen nach Auslagerung seiner Pensionsverpflichtungen aus Pensionszusagen weitere Zahlungen an den Pensionsfonds lediglich bei Eintritt einer Unterdeckung leisten. Da gängige Risikokennzahlen, die typischerweise zur Charakterisierung und Steuerung von Kapitalanlagen herangezogen werden, das tatsächliche Risiko einer Unterdeckung mit Nachschussverpflichtung nicht aufgreifen, stellen sie keine passgenauen Risikomaße und damit keine geeigneten Kennzahlen für die Anlageentscheidung dar.

---

Im Gegensatz dazu werden in diesem Teil als konstruierte Kennzahlen, die das tatsächliche Risiko einer Unterdeckung explizit berücksichtigen, die Nachschusswahrscheinlichkeit und der Nachschuss-at-Risk, eingeführt. Die Analyse zeigt, dass die  $\mu$ -CVaR Strategie aufgrund der geringen Aktienquote im Vergleich zu den hinsichtlich beider Risikomaßen effizienten Portfolios zu einer substanziell höheren Nachschusswahrscheinlichkeit führt. Während die stärker ausgeprägten (Standard-)Risikomaße der risikoeffizienten Portfolios zwar kurzfristig höhere potenzielle Verluste implizieren, erhöhen diese aufgrund des (typischerweise) großen Puffers zwischen dem Wert der Kapitalanlage und den Deckungsrückstellungen der Rentner zum Zeitpunkt der Auslagerung jedoch das kurzfristige Risiko einer Unterdeckung nicht. Die größere Risikoaufnahme der risikoeffizienten Portfolios ist durch die damit einhergehende höhere (erwartete) Portfoliorendite vielmehr notwendig, um langfristig ausreichend Kapital akkumulieren zu können und um so die Wahrscheinlichkeit zu erhöhen, dass der Pensionsfonds seine Pensionsverpflichtungen über die gesamte Auszahlungsperiode ohne zusätzliche Nachschussszahlungen bedienen kann.

Das in diesem Teil der Dissertation aufgezeigte illustrative Beispiel der strategischen Asset-Allokation von Pensionsfonds mit der Schlussfolgerung, die Wahl eines Risikomaßes als Kriterium zur Portfoliosteuerung kritisch zu hinterfragen, soll Marktteilnehmer dafür sensibilisieren – wenn erforderlich – auf kontextspezifische Risikomaße zurückzugreifen. Dieses Ergebnis von hoher praktischer Relevanz kann auf eine Vielzahl von Applikationen in der Finanzwirtschaft übertragen werden: Dazu zählen beispielsweise Portfolioallokationsprobleme, bei denen i) ein vordefinierter Portfoliowert zu einem zukünftigen Zeitpunkt (mindestens) zu erzielen ist, oder ii) regelmäßige Auszahlungen über einen gewissen Zeitraum aus einer Kapitalanlage gewährleistet werden sollen, was im Rahmen der privaten Altersvorsorge im Anschluss an die Ansparphase häufig das gewünschte Ziel von Privatanelegern ist. Die Resultate dieses Teils der Dissertation unterstreichen die Notwendigkeit, anwendungsspezifische Ziel- und Risikoparameter herzuleiten, um darauf aufbauend eine passgenaue Strategie ableiten und eine optimale Portfolioallokation treffen zu können.



## **Teil IV**

### **Schlussbetrachtung**

---

Diese Dissertation wirft einen frischen Blick auf die Rendite-Risikobeziehung und setzt sich zum einen mit der methodisch korrekten Bestimmung der durchschnittlichen Rendite in bedeutenden Anwendungen in der Finanzwirtschaft und zum anderen mit der Auswahl aussagekräftiger Risikomaße in der Portfolioallokation kritisch auseinander. Zusammengefasst zeigen die Ergebnisse der drei Teile dieser Dissertation die Notwendigkeit auf, die Wahl der Rendite- und Risikokennzahlen vor dem Hintergrund einer spezifischen Anwendung sorgfältig zu prüfen. Die in dieser Arbeit dargelegten gravierenden Fehlbepreisungen, die aus einer fehlerhaft bestimmten erwarteten Rendite resultieren können, sowie fehlgeleiteten Portfolioallokationen, zu denen die Berücksichtigung von Risikomaßen als Grundlage für Anlageentscheidungen führen, die das tatsächliche Risiko von Marktteilnehmern nicht aufgreifen, sollen das Bewusstsein für die Relevanz dieses Themas stärken.

Teil 1 dieser Arbeit rekapituliert fundamentale Konzepte zur Bestimmung der durchschnittlichen Rendite eines Vermögenswertes auf Basis historischer Daten und vergleicht das arithmetische Mittel diskreter Renditen mit dem geometrischen Mittel, was eng verknüpft ist mit dem Vergleich zwischen der durchschnittlichen diskreten und der durchschnittlichen logarithmierten Rendite. Aus einer rigorosen Aufarbeitung ergibt sich die Rechtfertigung für die Verwendung des arithmetischen Mittels diskreter Renditen als geeignetes Performancemaß für den erwarteten Vermögenszuwachs eines Vermögenswertes. Dabei wird festgestellt, dass der Unterschied zwischen der erwarteten diskreten Rendite (arithmetisches Mittel diskreter Renditen) und der erwarteten logarithmierten Rendite (arithmetisches Mittel logarithmierter Renditen, das eng mit dem geometrischen Mittel diskreter Renditen verwandt ist) eines Vermögenswertes unter der Annahme normalverteilter Renditen der halben Varianz der Renditen entspricht. Damit steigt die Differenz zwischen den beiden Definitionen erwarteter Renditen mit der Volatilität des zugrunde liegenden Vermögenswertes an: Für eine für Aktienindizes typische Volatilität von etwa 20 % übersteigt die erwartete diskrete Rendite die erwartete logarithmierte Rendite bereits um 2 Prozentpunkte, was die ökonomische Relevanz der korrekten Wahl des Konzepts zur Bestimmung von Durchschnittsrenditen unterstreicht. Zudem ist es erforderlich, das arithmetische Mittel der diskreten Renditen zur Bestimmung eines angemessenen Diskontsatzes auszuwählen, anstatt sich auf die durchschnittliche logarithmierte Rendite oder das geometrische Mittel zu stützen. Im Hinblick auf das CAPM gilt die bekannte Beziehung zwischen der erwarteten Vermögensrendite und der erwarteten Marktrendite ebenfalls nur für erwartete diskrete Renditen (arithmetisches Mittel diskreter Renditen). Die inkorrekte

---

Verwendung der erwarteten logarithmierten Rendite anstelle der korrekten erwarteten diskreten Rendite zur Berechnung der Performanceszenarien im Rahmen der am 01.01.2018 in Kraft getretenen PRIIP-Verordnung<sup>23</sup> kann darüber hinaus zu substanziell nach unten verzerrten Werten der Performanceszenarien führen.

Die rigorose Aufarbeitung dieser grundlegenden Konzepte mit fundierten Erklärungen und Herleitungen hat weitreichende Implikationen für eine Vielzahl von Anwendungen in der Finanzwirtschaft und soll dazu beitragen, Fehler zu verhindern, die mit der Wahl des (korrekten) Konzepts zur Bestimmung erwarteter Renditen im Zusammenhang stehen – ob in der Unternehmensbewertung oder im Rahmen der Basisinformationsblätter. Die Ausführungen bieten einen Ansatzpunkt für weiterführende Forschung, beispielsweise durch die Berücksichtigung höherer Momente der Renditeverteilung mithilfe eines alternativen Renditeprozesses. Zudem können die korrekten Renditekonzepte zur Bestimmung der erwarteten Rendite für weitere Applikationen in der Finanzwirtschaft hergeleitet werden.

Motiviert durch die empirische Kapitalmarktforschung, die Belege dafür liefert, dass Risikocharakteristika der Renditeverteilung für Marktteilnehmer von Bedeutung sind, die von der Standardabweichung der Renditen nicht vollständig erfasst werden (Harvey und Siddique, 2000, Ang et al., 2006 und Boyer et al., 2010), wie beispielsweise das Katastrophenrisiko, wird im zweiten Teil dieser Arbeit ein mehrperiodiges Gleichgewichtsmodell präsentiert, das die Analyse der Auswirkungen von Tail-Risiken auf die Preise von Vermögenswerten und die optimale Portfolioallokation von Investoren mit abnehmender relativer Risikoaversion und heterogenen Investitionshorizonten ermöglicht. Im Rahmen des CAPM – als einperiodiges Modell, in dem Anlageentscheidungen lediglich auf Grundlage der erwarteten (diskreten) Rendite und der Standardabweichung von Renditen getroffen werden – ist die Analyse von Tail-Risiken aufgrund bewusst getroffener Annahmen per Definition nicht möglich. Ein grundlegendes Verständnis für die Entstehung von Prämien, die durch Tail-Risiken induziert werden, fehlt somit.

In dem eingeführten Modell mit perfektem Wettbewerb wählen mit Geld ausgestattete Investoren eine den erwarteten Nutzen maximierende Portfolioallokation aus einer risikofreien Investitionsmöglichkeit und zwei Aktien mit identischer erwarteter diskreter Rendite und Standardabweichung, die jedoch unterschiedlich schiefe Verteilungen aufweisen: Während eine Aktie normalverteilte Renditen aufweist, unterliegt die andere Aktie dem

---

<sup>23</sup>EU-Verordnung Nr. 1286/2014 vom 26.11.2014, Amtsblatt EU L 352.

---

(ungeliebten) Katastrophenrisiko. Die Portfolioallokation der Investoren und die endogenen Marktpreise ermöglichen die Analyse der Präferenzen der Investoren hinsichtlich der Tail-Risiken in Abhängigkeit ihrer jeweiligen Investitionshorizonte und der resultierenden Schiefeprämie. Die Ergebnisse des Modells zeigen, dass die Investoren eine vergleichsweise hohe Rendite für die Aktie mit Katastrophenrisiko fordern, was zu einer positiven Schiefeprämie führt. Mit der Länge des Anlagehorizontes der Investoren nimmt die Höhe der Schiefeprämie ab, da der Einfluss eines (überraschenden) Sprungs im Preis einer Aktie auf das Endvermögen bei kürzeren Anlagezeiträumen größer ist als bei längeren Investitionsperioden. Im Gleichgewicht des Modells mit heterogenen Anlagehorizonten der Investoren halten langfristig orientierte Investoren sowohl eine höhere Aktienquote als auch ein höheres Portfoliogewicht in der Aktie mit Tail-Risiko als kurzfristige Investoren. Das Ergebnis, dass Investoren aufgrund des Katastrophenrisikos und in Abhängigkeit des Anlagehorizontes unterschiedliche Zusammensetzungen der risikobehafteten Portfolios halten, impliziert, dass im eingeführten Modell die Two-Fund-Separation nicht mehr gilt, was einen wesentlichen Unterschied zum grundlegenden CAPM darstellt. Zusätzlich zeigt das Modell, dass eine stärker ausgeprägte negative Schiefe der Renditeverteilung einer Aktie, eine größere Risikoaversion der Marktteilnehmer sowie ein stärker von kurzfristigen Investoren dominierter Markt die Schiefeprämie erhöht.

Das präsentierte Modell soll das Bewusstsein für die Existenz von Schiefeprämiën stärken, ein intuitives Verständnis für die Ursachen dieser Prämiën vermitteln und die praktische Relevanz für Investoren, Tail-Risiken bei ihren Anlageentscheidungen sorgfältig zu beachten, unterstreichen. Das Modell impliziert, dass es für Investoren möglicherweise nicht gleichermaßen optimal ist, ein und dasselbe Portfolio risikoreicher Vermögenswerte zu halten, da die Aufnahme von Tail-Risiken für Investoren je nach Länge des Anlagehorizontes mehr oder weniger attraktiv ist. Mit der empirischen Analyse der Implikationen des Gleichgewichtsmodells bietet der zweite Teil dieser Arbeit zudem einen interessanten Ansatzpunkt für weitere Forschung. In diesem Rahmen könnten die Auswirkungen unterschiedlicher Anlagehorizonte auf die Höhe von Schiefeprämiën analysiert werden. Es wäre zudem interessant zu untersuchen, auf welchen Märkten – wie beispielsweise dem Aktien- und Anleihemarkt – solche Prämiën besonders ausgeprägt sind und welche Rolle Marktcharakteristika wie Transaktionskosten und die Liquidität der Vermögenswerte dabei spielen.

---

Aus den Erkenntnissen des zweiten Teils der vorliegenden Dissertation lässt sich außerdem die Notwendigkeit ableiten, die für eine Anlageentscheidung berücksichtigten Risikomaße vorab einer kritischen Prüfung zu unterziehen. So sollten sich Anleger darüber bewusst sein, dass die Standardabweichung von Renditen beispielsweise keine geeignete Risikokennzahl darstellt, um Tail-Risiken in der Portfolioallokation zu berücksichtigen. Mit dem Value-at-Risk und dem Conditional Value-at-Risk existieren zwei etablierte Downside-Risikomaße mit einem – durch die Betrachtung der Wertentwicklung in einem Extremszenario – grundlegend anderen Risikoverständnis, wobei neben der Standardabweichung auch höhere Verteilungseigenschaften der Renditen miteinbezogen werden. Wenngleich diese Risikokennzahlen aussagekräftige Maße darstellen, besteht die Gefahr, dass sie das tatsächliche Risiko einer spezifischen Anwendung nicht (vollständig) erfassen, was in diesen Fällen zu fehlgeleiteten Portfolioallokationen führen kann.

Mit der strategischen Asset-Allokation von Pensionsfonds wird im dritten Teil der vorliegenden Arbeit die nicht passgenaue Verwendung von Risikokennzahlen in der Portfolioallokation anhand eines illustrativen Beispiels betrachtet: Vor dem Hintergrund gesetzlicher Vorschriften sind Unternehmen nach der Auslagerung von Pensionsverpflichtungen auf Pensionsfonds lediglich bei einer eintretenden Unterdeckung zu Nachschusszahlungen verpflichtet. Daraus lassen sich mit der Nachschusswahrscheinlichkeit und dem Nachschuss-at-Risk Risikokennzahlen ableiten, die im Gegensatz zu Standard-Risikomaßen das tatsächliche Risiko von Pensionsfonds in der strategischen Asset-Allokation direkt aufgreifen. Die Analyse der Portfolioallokation und der Portfolioeigenschaften zeigt deutlich die Unzulänglichkeit eines auf der Minimierung des einjährigen Conditional Value-at-Risk unter Beachtung einer Mindestrendite basierenden Ansatzes ( $\mu$ -CVaR Strategie): In dem betrachteten Beispiel kann durch eine auf den anwendungsspezifischen Risikomaßen basierende Anlageentscheidung die Nachschusswahrscheinlichkeit um 19 Prozentpunkte von 25,61 % auf 6,45 % bei identischem Nachschuss-at-Risk reduziert werden. Dies ist vor allem auf die deutlich höhere Aktienquote im Vergleich zum  $\mu$ -CVaR Portfolio mit einer entsprechend höheren (erwarteten) Portfoliorendite zurückzuführen, die erforderlich ist, um langfristig ausreichend Kapital zu bilden, sodass die Risiken einer Unterdeckung auch langfristig reduziert werden können. Mit der vergleichsweise hohen Aktienquote des risikoeffizienten Portfolios geht jedoch auch ein erhöhtes kurzfristiges Verlustrisiko einher, welches im Rahmen der  $\mu$ -CVaR Strategie gerade minimiert wird und damit zu einer fehlgeleiteten Asset-Allokation führt.

Dieses zentrale Ergebnis des dritten Teils der Dissertation hat weitreichende Implikationen für eine Vielzahl von Asset-Allokationsentscheidungen, sowohl für institutionelle Anleger als auch für private Investoren. Es soll das Bewusstsein von Marktteilnehmern dafür schärfen, die Wahl von (Standard-)Risikomaßen als zugrunde liegende Kennzahlen für Anlageentscheidungen grundsätzlich kritisch zu hinterfragen. Auch vor dem Hintergrund des zweiten Teils dieser Arbeit könnte beispielsweise eine Anlagestrategie, die auf einem Zielwert für den jährlichen (Conditional) Value-at-Risk basiert, möglicherweise keine optimale Strategie für Privatinvestoren darstellen, die langfristiges Kapitalwachstum anstreben und dabei bereit sind, kurzfristig hohe Verluste zu akzeptieren. Analog zur strategischen Asset-Allokation von Pensionsfonds ist es für Investoren unter Umständen erforderlich, für sie passgenaue Ziel- und Risikokennzahlen abzuleiten, um so optimale Portfolioallokationsentscheidungen treffen zu können.

# Literaturverzeichnis

- Ait-Sahalia, Y. (2004), Disentangling diffusion from jumps, *Journal of Financial Economics* **74**(3), 487–528.
- Amédée-Manesme, C.-O., Barthélémy, F. und Maillard, D. (2019), Computation of the corrected Cornish–Fisher expansion using the response surface methodology: application to VaR and CVaR, *Annals of Operations Research* **281**(1), 423–453.
- Anand, K. (2016), Covered bonds – safe assets with side effects?, *Research Brief Deutsche Bundesbank* **6th edition**.
- Ang, A., Chen, J. und Xing, Y. (2006), Downside risk, *The Review of Financial Studies* **19**(4), 1191–1239.
- Arditti, F. D. (1967), Risk and the required return on equity, *The Journal of Finance* **22**(1), 19–36.
- Aretz, K. und Arisoy, Y. E. (2023), The pricing of skewness over different return horizons, *Journal of Banking & Finance* **148**, 106713.
- Bali, T. G., Cakici, N. und Whitelaw, R. F. (2011), Maxing out: Stocks as lotteries and the cross-section of expected returns, *Journal of Financial Economics* **99**(2), 427–446.
- Baltas, N. und Salinas, G. (2022), Cross-asset skew, *The Journal of Portfolio Management* **48**(4), 194–219.
- Black, F. und Scholes, M. (1973), The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy* **81**(3), 637–654.

- Bodie, Z. (2015), Thoughts on the future: Life-cycle investing in theory and practice, *Financial Analysts Journal* **71**(1), 43–48.
- Boyer, B., Mitton, T. und Vorkink, K. (2010), Expected idiosyncratic skewness, *The Review of Financial Studies* **23**(1), 169–202.
- Brealey, R. A., Myers, S. C. und Allen, F. (2011), *Principles of corporate finance*, 10th edn, McGraw-Hill.
- Breuer, W., Fuchs, D. und Mark, K. (2014), Estimating cost of capital in firm valuations with arithmetic or geometric mean—or better use the Cooper estimator?, *The European Journal of Finance* **20**(6), 568–594.
- Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht (2016), Rundschreiben 7/2016 (VA) - Aufstellung und Führung des Vermögensverzeichnisses, Vorlage des Ausdrucks und Aufbewahrung des Sicherungsvermögens. Abgerufen: 04.05.2023.  
**URL:** <https://www.bafin.de/dok/8623674>
- Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht (2017), Basisinformationsblatt: Anwendbarkeit der PRIIPs-Verordnung ab Anfang 2018 nun sicher. Abgerufen: 04.02.2020.  
**URL:** <https://www.bafin.de/dok/9267430>
- Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht (2021), Häufige Fragen zu Pensionsfonds. Abgerufen: 04.05.2023.  
**URL:** <https://www.bafin.de/dok/10023884>
- Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht (2022), Statistik der BaFin - Erstversicherungsunternehmen 2021 (Pensionsfonds). Abgerufen: 02.06.2023.  
**URL:** <https://www.bafin.de/dok/19022728>
- Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht (2023a), Aufsicht über Pensionskassen und Pensionsfonds. Abgerufen: 04.05.2023.  
**URL:** <https://www.bafin.de/dok/7850948>
- Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht (2023b), Das System der betrieblichen Altersversorgung. Abgerufen: 04.05.2023.  
**URL:** <https://www.bafin.de/dok/7850980>

- Börse Online (2019), Pfandbriefe: Was Anleger über die gedeckten Anleihen wissen müssen. Abgerufen: 01. Juli 2023.
- Campbell, J. Y. und Cochrane, J. H. (1999), By force of habit: A consumption-based explanation of aggregate stock market behavior, *Journal of Political Economy* **107**(2), 205–251.
- Cao, Z., Harris, R. D. und Shen, J. (2010), Hedging and Value at Risk: A semi-parametric approach, *Journal of Futures Markets: Futures, Options, and Other Derivative Products* **30**(8), 780–794.
- Chatterjee, S. und Adinarayan, T. (2020), Buy, sell, repeat! No room for ‘hold’ in whipsawing markets. Abgerufen: 05.03.2022.  
**URL:** <https://www.reuters.com/article/us-health-coronavirus-short-termism-anal-idUSKBN24Z0XZ>
- Cochrane, J. H. (2009), *Asset pricing: Revised edition*, Princeton University Press.
- Conrad, J., Dittmar, R. F. und Ghysels, E. (2013), Ex ante skewness and expected stock returns, *The Journal of Finance* **68**(1), 85–124.
- Cont, R. (2001), Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues, *Quantitative Finance* **1**(2), 223.
- Cont, R. und Tankov, P. (2003), *Financial modelling with jump processes*, Chapman and Hall/CRC Financial Mathematics Series.
- Cooper, I. (1996), Arithmetic versus geometric mean estimators: Setting discount rates for capital budgeting, *European Financial Management* **2**(2), 157–167.
- Copeland, T. E., Weston, J. F., Shastri, K. et al. (2005), *Financial theory and corporate policy*, Vol. 4, Pearson Addison Wesley Boston.
- Cornish, E. A. und Fisher, R. A. (1938), Moments and cumulants in the specification of distributions, *Revue de l’Institut international de Statistique* **5**(4), 307–320.
- Damodaran, A. (2013), Equity risk premiums (ERP): Determinants, estimation and implications – The 2012 edition, *Managing and measuring risk: Emerging global standards*

*and regulations after the financial crisis* S. 343–455.

*Delegierte Verordnung (EU) 2017/653 der Kommission vom 8. März 2017 zur Ergänzung der Verordnung (EU) Nr. 1286/2014 des Europäischen Parlaments und des Rates über Basisinformationsblätter für verpackte Anlageprodukte für Kleinanleger und Versicherungsanlageprodukte (PRIIP) durch technische Regulierungsstandards in Bezug auf die Darstellung, den Inhalt, die Überprüfung und die Überarbeitung dieser Basisinformationsblätter sowie die Bedingungen für die Erfüllung der Verpflichtung zu ihrer Bereitstellung* (2017).

URL: <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/DE/TXT/PDF/?uri=CELEX:32017R0653&from=DE>

Deutsche Bundesbank (2023), Abzinsungszinssätze gemäß § 253 Abs. 2 HGB / 10-Jahresdurchschnitt. Abgerufen: 05.06.2022.

URL: <https://www.bundesbank.de/resource/blob/650678/5bbd3dd636f0edbf713731f66ce925b/mL/abzinsungszinssaetze-10jahre-data.pdf>

Deutsches Aktieninstitut (2022), 50 Jahre Aktien-Renditen: Das DAX-Rendite-Dreieck des Deutschen Aktieninstituts. Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht (2022).

URL: [https://www.dai.de/fileadmin/user\\_upload/221231\\_DAX-Rendite-Dreieck\\_50\\_Jahre\\_Web.pdf](https://www.dai.de/fileadmin/user_upload/221231_DAX-Rendite-Dreieck_50_Jahre_Web.pdf)

Dorfleitner, G. (2002), Stetige versus diskrete Renditen: Überlegungen zur richtigen Verwendung beider Begriffe in Theorie und Praxis, *Kredit und Kapital* **35**, 216–241.

Dorfleitner, G. (2003), Why the return notion matters, *International Journal of Theoretical and Applied Finance* **6**(01), 73–86.

Dowd, K. (2007), *Measuring market risk*, John Wiley & Sons.

Fabozzi, F. J., Rachev, S. T. und Stoyanov, S. V. (2013), Sensitivity of portfolio VaR and CVaR to portfolio return characteristics, *Annals of Operations Research* **205**(1), 169–187.

Fama, E. F. und French, K. R. (2018), Long-horizon returns, *The Review of Asset Pricing Studies* **8**(2), 232–252.

- Fernandez-Perez, A., Frijns, B., Fuertes, A.-M. und Miffre, J. (2018), The skewness of commodity futures returns, *Journal of Banking & Finance* **86**, 143–158.
- Fritsch, S., Neumann, S., Wintermantel, T. und Weiß, G. (2020), Strategische Assetallokation – robuste Portfolios dank maschinellem Lernen, *bank und markt* **10**, 454 – 457.
- Graf, S. (2019), PRIIP-KID: providing retail investors with inappropriate product information?, *European Actuarial Journal* **9**(2), 361–385.
- Guiso, L., Sapienza, P. und Zingales, L. (2018), Time varying risk aversion, *Journal of Financial Economics* **128**(3), 403–421.
- Hansson, B. und Persson, M. (2000), Time diversification and estimation risk, *Financial Analysts Journal* **56**(5), 55–62.
- Harvey, C. R., Liechty, J. C., Liechty, M. W. und Müller, P. (2010), Portfolio selection with higher moments, *Quantitative Finance* **10**(5), 469–485.
- Harvey, C. R. und Siddique, A. (2000), Conditional skewness in asset pricing tests, *The Journal of Finance* **55**(3), 1263–1295.
- Heinemann, A. (2020), Teil 1: Pensionsverpflichtungen in einem Jahrzehnt der Niedrigzinsen, *LBBW: Corporate Finance Fokus*.
- Huang, C.-f. und Litzenberger, R. H. (1988), *Foundations for financial economics*, North-Holland.
- Hull, J. C. (2017), *Options, futures, and other derivatives*, 9th edn, Pearson.
- Industrie-Pensions-Verein e.V. (2020), Pensionszusagen: Wenn die Rückstellungen in der Bilanz stören. Wirtschaftliche Enthftung durch Auslagerung auf einen Pensionsfonds, *IPV-Report Pensionsfonds*.
- Institut der Wirtschaftsprüfer (2019), Neue Kapitalkostenempfehlungen des FAUB. Abgerufen: 05.06.2020.
- URL: <https://www.idw.de/idw/idw-aktuell/neue-kapitalkostenempfehlungen-des-faub/120158>

- Jaggia, S. und Thosar, S. (2000), Risk aversion and the investment horizon: A new perspective on the time diversification debate, *The Journal of Psychology and Financial Markets* **1**(3-4), 211–215.
- Jenkinson, T. und Sousa, M. (2015), What determines the exit decision for leveraged buyouts?, *Journal of Banking & Finance* **59**, 399–408.
- Jin, C., Conlon, T., Cotter, J. et al. (2022), Co-Skewness across Return Horizons, *Journal of Financial Econometrics* S. 1–36.
- Jondeau, E. und Rockinger, M. (2006), Optimal portfolio allocation under higher moments, *European Financial Management* **12**(1), 29–55.
- Jorion, P. (2002), How informative are Value-at-Risk disclosures?, *The Accounting Review* **77**(4), 911–931.
- Jorion, P. (2007), *Value at Risk: the new benchmark for managing financial risk*, The McGraw-Hill Companies, Inc.
- Kelly, J. J. (1956), A new interpretation of information rate, *The Bell System Technical Journal*.
- Kipp, M. und Koziol, C. (2020), Which is the correct discount rate? Arithmetic versus geometric mean, *Credit and Capital Markets–Kredit und Kapital* **53**(3), 355–381.
- Kipp, M. und Koziol, C. (2022), Tail risk management and the skewness premium, *Journal of Asset Management* **23**(6), 534–546.
- Koller, T., Goedhart, M. und Wessels, D. (2015), *Valuation: Measuring and managing the value of companies*, 6th edn, John Wiley & Sons.
- KPMG (2019), Cost of Capital Study 2019.  
URL: <https://assets.kpmg.com/content/dam/kpmg/ch/pdf/cost-of-capital-study-2019.pdf>
- Kraus, A. und Litzenberger, R. H. (1976), Skewness preference and the valuation of risk assets, *The Journal of Finance* **31**(4), 1085–1100.

- Langlois, H. (2020), Measuring skewness premia, *Journal of Financial Economics* **135**(2), 399–424.
- Leiber, S. (2005), Formen und Verbreitung der betrieblichen Altersvorsorge – eine Zwischenbilanz, *WSI Mitteilungen* **6**(2005), 314ff.
- Lintner, J. (1965), Security prices, risk, and maximal gains from diversification, *The Journal of Finance* **20**(4), 587–615.
- Liu, J., Longstaff, F. A. und Pan, J. (2003), Dynamic asset allocation with event risk, *The Journal of Finance* **58**(1), 231–259.
- Maillard, D. (2018), A user’s guide to the Cornish Fisher expansion, *Available at SSRN 1997178*.
- Markowitz, H. (1952), Portfolio selection, *The Journal of Finance* **7**(1), 77–91.
- Markowitz, H. M. (1959), *Portfolio selection: Efficient diversification of investments*, Yale University Press.
- Merton, R. C. (1971), Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model, *Journal of Economic Theory* **3**(4), 373–413.
- Merton, R. C. (1976), Option pricing when underlying stock returns are discontinuous, *Journal of Financial Economics* **3**(1-2), 125–144.
- Mitton, T. und Vorkink, K. (2007), Equilibrium underdiversification and the preference for skewness, *The Review of Financial Studies* **20**(4), 1255–1288.
- Mossin, J. (1966), Equilibrium in a capital asset market, *Econometrica: Journal of the Econometric Society* **S. 768–783**.
- Ogaki, M. und Zhang, Q. (2001), Decreasing relative risk aversion and tests of risk sharing, *Econometrica* **69**(2), 515–526.
- Ramezani, C. A. und Zeng, Y. (2007), Maximum likelihood estimation of the double exponential jump-diffusion process, *Annals of Finance* **3**, 487–507.

*Richtlinie (EU) 2016/2341 des Europäischen Parlaments und des Rates vom 14. Dezember 2016 über die Tätigkeiten und die Beaufsichtigung von Einrichtungen der betrieblichen Altersversorgung (EbAV) (Neufassung)* (2016).

**URL:** <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/DE/TXT/PDF/?uri=CELEX:32016L2341>

Rockafellar, R. T. und Uryasev, S. (2000), Optimization of Conditional Value-at-Risk, *Journal of Risk* **2**, 21–42.

Rubinstein, M. (1976), The strong case for the generalized logarithmic utility model as the premier model of financial markets, *Journal of Finance* **31**(2), 551–571.

Samuelson, P. A. (1970), The fundamental approximation theorem of portfolio analysis in terms of means, variances and higher moments, *The Review of Economic Studies* **37**(4), 537–542.

Schmid, F. und Trede, M. M. (2006), *Finanzmarktstatistik*, Springer-Verlag.

Scott, R. C. und Horvath, P. A. (1980), On the direction of preference for moments of higher order than the variance, *The Journal of Finance* **35**(4), 915–919.

Sharpe, W. F. (1964), Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk, *The Journal of Finance* **19**(3), 425–442.

Sharpe, W. F. (2007), Expected utility asset allocation, *Financial Analysts Journal* **63**(5), 18–30.

Stehle, R. (2004), Die Festlegung der Risikoprämie von Aktien im Rahmen der Schätzung des Wertes von börsennotierten Kapitalgesellschaften, *Die Wirtschaftsprüfung* **57**(17), 906–927.

Taylor, A. E. (1952), L'Hospital's rule, *The American Mathematical Monthly* **59**(1), 20–24.

Thorley, S. R. (1995), The time-diversification controversy, *Financial Analysts Journal* **51**(3), 68–76.

Tsay, R. S. (2005), *Analysis of financial time series*, Vol. 543, John Wiley & Sons.

Verordnung (EU) Nr. 1286/2014 des Europäischen Parlaments und des Rates vom 26. November 2014 über Basisinformationsblätter für verpackte Anlageprodukte für Kleinanleger und Versicherungsanlageprodukte (PRIIP) (2014).

URL: <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/DE/TXT/PDF/?uri=CELEX:32014R1286&from=DE>

Wilcox, J. (2003), Harry Markowitz and the discretionary wealth hypothesis, *The Journal of Portfolio Management* **29**(3), 58–65.

Wilcox, J. (2020), Better portfolios with higher moments, *Journal of Asset Management* **21**(7), 569–580.

Wilcox, J. und Fabozzi, F. J. (2009), A discretionary wealth approach for investment policy, *The Journal of Portfolio Management* **36**(1), 46–59.

Willmroth, J. (2016), Welchen Anteil meines Vermögens sollte ich in Aktien investieren?, *Süddeutsche Zeitung*. Abgerufen: 27.06.2023.

URL: <https://www.sueddeutsche.de/wirtschaft/geldwerkstatt-welchen-anteil-meines-vermoegens-sollte-ich-in-aktien-investieren-1.2953445>

Wu, L. (2003), Jumps and dynamic asset allocation, *Review of Quantitative Finance and Accounting* **20**(3), 207–243.