

Zetafunktionen von Graphen und Bruhat-Tits-Gebäuden

Dissertation

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard Karls Universität Tübingen
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

vorgelegt von
Julien Sessler
aus Tübingen

Tübingen
2021

Gedruckt mit Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Eberhard Karls Universität Tübingen.

Tag der mündlichen Qualifikation:	25.06.2021
Dekan:	Prof. Dr. Thilo Stehle
1. Berichterstatter:	Prof. Dr. Anton Deitmar
2. Berichterstatter:	Prof. Dr. Victor Batyrev

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	3
1 Einleitung	5
2 Grundlagen	7
2.1 Zetafunktionen von Graphen	7
2.2 $\mathrm{PGL}_n(F)$ und $\mathrm{PGL}_n(\mathcal{O})$	8
2.3 Der Bruhat-Tits-Baum	10
2.4 Das Gebäude der $\mathrm{PGL}_n(F)$	11
2.5 Die Wirkung von $\mathrm{PGL}_2(F)$ auf dem Bruhat-Tits-Baum	15
2.6 Bass-Ihara-Zetafunktionen	17
2.7 Die Hauptseriendarstellungen der $\mathrm{GL}_n(F)$ und $\mathrm{PGL}_n(F)$	20
2.8 Langlands- L -Funktionen	22
2.9 Quaternionenalgebren	24
3 Unverzweigte Langlands-L-Funktionen	27
3.1 Unverzweigte L -Funktionen und Graph-Zetafunktionen	27
3.2 Höherer Rang	32
4 Zetafunktionen in höherem Rang	37
4.1 Eine Zetafunktion	37
4.2 S_π für unverzweigte Hauptseriendarstellungen	39
4.3 Für die $\mathrm{PGL}_2(F)$	52
4.4 Für die $\mathrm{PGL}_3(F)$	59
4.5 Translationsoperatoren	61
5 Globale Zetafunktionen von Quaternionenalgebren	69
5.1 Lokale Gitter	69
5.2 Lokale Graphen	71
5.3 Die globale Situation	74
5.4 Höherer Rang	88
Literatur	91

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Anton Deitmar für das überaus spannende und vielseitige Thema, die fachliche Betreuung und seine immer offenstehende Tür. Ich bin mir wohl bewusst, dass ich ihn im Laufe der Jahre einige Nerven gekostet habe.

Ebenfalls möchte ich Victor Batyrev dafür danken, dass er sich als Zweitbetreuer, Gutachter und Prüfer zur Verfügung gestellt hat. Ebenso danke ich Hannah Markwig und Elmar Teuffl, die sich bereit erklärt haben, als Prüfer zu fungieren.

Ich danke Carla Cederbaum, Stefan Keppeler, Elmar Teuffl, Walther Paravicini und Frank Loose für die gelungene Zusammenarbeit rund um die Tutorenschulung „Mathematik Lehren Lernen“.

Ganz besonderem Dank bin ich meiner Kollegin Lisa Hilken verpflichtet, mit der ich all die Jahre zusammengearbeitet habe. Sie musste mir häufig die Feinheiten der deutschen Kommasetzung erklären und manchen missglückten Kuchen probieren. Im Gegenzug hat sich mit Logikrätseln, die mich teilweise tagelang in Beschlag genommen haben, ausgiebig revanchiert.

Weiter danke ich natürlich meinen Freunden, die mich die ganze Zeit tatkräftig unterstützt haben und sich so manches Gejammer angehören mussten.

Weiterhin danke ich John Voight, der mich bei einem Problem in der Theorie der quadratischen Formen unterstützt hat, indem er mich auf einige Paper aufmerksam gemacht hat. Und natürlich für sein hervorragendes Buch zu Quaternionenalgebren.

Zusammenfassung

Wir betrachten ein uniformes, kokompaktes Gitter Γ in der Gruppe $\mathrm{PGL}_2(F)$. Ist Γ torsionsfrei, so kann man den Quotientengraphen $X = \Gamma \backslash \mathfrak{X}$ bilden, wobei \mathfrak{X} den Bruhat-Tits-Baum von F bezeichnet. Wir zeigen, dass die Langlands- L -Funktion des unverzweigten Teils der Rechtsdarstellung auf $L^2(\Gamma \backslash \mathrm{PGL}_2(F))$ dem Determinantenterm in der Ihara-Formel der Graph-Zetafunktion von X entspricht, wenn man $u = q^{-s}$ setzt:

$$L(R^{\mathrm{uv}}, s - \frac{1}{2})^{-1} = \det \left(1 - uA_X + qu^2 \right). \quad (*)$$

Betrachtet man den höheren Rang, d. h. ein Gitter Γ in $\mathrm{PGL}_n(F)$, dann gibt es im zugehörigen Bruhat-Tits-Gebäude mehrere Adjazenzoperatoren A_1, \dots, A_{n-1} . Wir zeigen, dass man den unverzweigten Teil der L -Funktion wieder als eine Determinante schreiben kann:

$$L(R^{\mathrm{uv}}, s - \frac{n-1}{2})^{-1} = \det \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-u)^k q^{k(k-1)/2} A_{k,X} + q^{\frac{n(n-1)}{2}} (-u)^n \right), \quad u = q^{-s}.$$

Weiter zeigen wir, dass man jede Langlands- L -Funktion $L(R^{\mathrm{uv}}, r, s)$ als geeignete Determinante schreiben kann, sofern r algebraisch ist. Aus einer Symmetrie der Operatoren $A_{k,X}$ folgern wir eine Invarianz der L -Funktion $L(R^{\mathrm{uv}}, r, s) = L(R^{\mathrm{uv}}, r^*, s)$.

In höherem Rang gibt es viele Möglichkeiten, einem Quotienten des Bruhat-Tits-Gebäudes eine Zetafunktion zuzuordnen. Wir betrachten einen multivariaten Ansatz von Deitmar, Kang und McCallum [DKM20] und setzen diese Zetafunktion in Bezug zu den Satake-Parametern der irreduziblen Hauptserie. Im Fall der PGL_2 erhalten wir ferner, dass die Langlands- L -Funktion der Rechtsdarstellung auf $L^2(\Gamma \backslash \mathrm{PGL}_2(F))$ bereits bis auf einen trivialen Faktor die Graph-Zetafunktion von $X = \Gamma \backslash \mathfrak{X}$ ist:

$$\zeta(X, q^{-s}) = L(R, s - \frac{1}{2}) \cdot \begin{cases} 1 - q^{-2s} & \text{falls } X \text{ bipartit,} \\ 1 - q^{-s} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir verfolgen dann den geometrischen Ansatz aus [DKM20] und verallgemeinern den Translationsoperator T von Bass aus dem Graph-Setting für Quotienten des Bruhat-Tits-Gebäudes der $\mathrm{PGL}_n(F)$. Wir zeigen, dass für irreduzible, unverzweigte Hauptseriendarstellungen π ebenfalls ein Zusammenhang zu Langlands- L -Funktionen besteht:

$$\det(1 - uT_{k,\pi})^{-1} = L(\pi, \wedge^k, q^{\frac{k(n-k)}{2}-s})^{k!(n-k)!}, \quad u = q^{-s}.$$

Zuletzt nutzen wir eine Konstruktion aus der Theorie der Ramanujan-Graphen, um eine globale Situation zu erhalten. Wir starten hierbei mit einer Quaternionenalgebra, die über den reellen Zahlen eine Divisionsalgebra ist, und erhalten ein kokompaktes, uniformes Gitter Γ in den projektiven adelischen Punkten. Hieraus

konstruieren wir für fast alle Primzahlen p kokompakte Gitter Γ_p^1 in $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Diese Gitter operieren auf dem Bruhat-Tits-Baum \mathfrak{X}_p und der Quotient $X_p = \Gamma_p^1 \backslash \mathfrak{X}_p$ ist ein bipartiter, $p+1$ -regulärer Graph, sofern die Quaternionenalgebra keine nicht-trivialen Torsionselemente enthält. Wir bilden das Euler-Produkt

$$\prod_p \zeta(X_p, p^{-s})$$

über die Graph-Zetafunktionen und untersuchen dieses globale Produkt auf seine analytischen Eigenschaften. Wir zeigen, dass das Produkt für rationale, torsionsfreie Quaternionenalgebren nicht über die Gerade $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ hinaus fortgesetzt werden kann. Jedoch kann das Euler-Produkt über die Determinantenterme in der Ihara-Formel

$$\prod_p \det(1 - p^{-s} A_{X_p} + p \cdot (p^{-s})^2)$$

im Wesentlichen als Rankin-Selberg- L -Funktion interpretiert werden und besitzt daher eine analytische Fortsetzung und Funktionalgleichung.

1 Einleitung

Ihara definiert in seinem grundlegenden Paper [Iha66] eine Zetafunktion für torsionsfreie Gitter von $\mathrm{PGL}_2(F)$ über einem lokalen Körper F . Serre zeigte darauf in [Ser03], dass diese Zetafunktion eine geometrische Interpretation besitzt und sich für beliebige, endliche Graphen definieren lässt.

Ihara und Sunada bewiesen, dass diese Graph-Zetafunktion eine rationale Funktion ist und eine bemerkenswerte Determinantenformel erfüllt, die sogenannte Ihara-Formel:

$$\zeta(X, u)^{-1} = (1 - u^2)^{r-1} \det(1 - uA_X + u^2Q_X).$$

Hashimoto und Bass gelang es zu zeigen, dass die Graph-Zetafunktion außerdem noch eine zweite Determinantenformel erfüllt:

$$\zeta(X, u)^{-1} = \det(1 - uT).$$

Ein Ziel dieser Arbeit ist es, die in der Ihara-Formel auftretenden Terme darstellungstheoretisch zu verstehen und einen Zusammenhang mit Langlands- L -Funktionen herzustellen. Ferner betrachten wir zwei Verallgemeinerungen der Graph-Zetafunktion in höherem Rang und untersuchen diese auf ihre Verbindung zu L -Funktionen.

In Kapitel 2 führen wir in aller Kürze die benötigten Konzepte und Grundlagen ein. Ausgehend davon zeigen wir in Kapitel 3, wie man die Standard- L -Funktion einer unverzweigten Unterdarstellung der Rechtsdarstellung auf $L^2(\Gamma \backslash \mathrm{PGL}_2(F))$ durch geometrische Daten ausdrücken kann. Hieraus folgern wir dann, dass der Determinantenterm in der Ihara-Formel der Langlands- L -Funktion entspricht, die zu den unverzweigten Unterdarstellungen der Rechtsdarstellung auf $L^2(\Gamma \backslash \mathrm{PGL}_2(F))$ gehört:

$$L(R^{\mathrm{uv}}, s - \frac{1}{2})^{-1} = \det(1 - Au + qu^2), \quad u = q^{-s}. \quad (*)$$

Wir verallgemeinern diese Resultate anschließend für Gitter in höherem Rang und zeigen, dass für eine irreduzible, unverzweigte Darstellung π jede Langlands- L -Funktion $L(\pi, r, s)$ durch geometrische Daten ausgedrückt werden kann. Damit gibt es für $L(R^{\mathrm{uv}}, r, s)$ eine zu (*) analoge Formel. Aufgrund einer Symmetrie der geometrischen Operatoren folgern wir:

$$L(R^{\mathrm{uv}}, r, s) = L(R^{\mathrm{uv}}, r^*, s).$$

In höherem Rang gibt es viele Möglichkeiten, einem Quotienten des Bruhat-Tits-Gebäudes eine Zetafunktion zuzuordnen. In Kapitel 4 betrachten wir einen multivariaten Ansatz von Deitmar, Kang und McCallum [DKM20] und setzen diese Zetafunktion in Bezug zu den Satake-Parametern der irreduziblen Hauptserie. Im Fall der PGL_2 erhalten wir ferner, dass die Langlands- L -Funktion der Rechtsdarstellung auf $L^2(\Gamma \backslash \mathrm{PGL}_2(F))$ bereits bis auf einen trivialen Faktor die Graph-Zetafunktion von $X = \Gamma \backslash \mathfrak{X}$ ist:

$$\zeta(X, q^{-s}) = L(R, s - \frac{1}{2}) \cdot \begin{cases} 1 - q^{-2s} & \text{falls } X \text{ bipartit,} \\ 1 - q^{-s} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir verfolgen dann den geometrischen Ansatz aus [DKM20] und verallgemeinern den Translationsoperator T von Bass aus dem Graph-Setting für Quotienten des Bruhat-Tits-Gebäudes der $\mathrm{PGL}_n(F)$. Wir zeigen, dass für irreduzible, unverzweigte Hauptseriendarstellungen π ebenfalls ein Zusammenhang zu Langlands- L -Funktionen besteht:

$$\det(1 - uT_{k,\pi}) = L(\pi, \wedge^k, q^{\frac{k(n-k)}{2}-s})^{k!(n-k)!}, \quad u = q^{-s}.$$

In Kapitel 5 nutzen wir eine Konstruktion aus der Theorie der Ramanujan-Graphen, um eine globale Situation zu erhalten. Wir starten hierbei mit einer Quaternionenalgebra, die über den reellen Zahlen eine Divisionsalgebra ist, und erhalten ein kokompaktes, uniformes Gitter Γ in den projektiven adelischen Punkten. Hieraus konstruieren wir für fast alle Primzahlen p kokompakte Gitter Γ_p^1 in $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Diese Gitter operieren auf dem Bruhat-Tits-Baum \mathfrak{X}_p und der Quotient $X_p = \Gamma_p^1 \backslash \mathfrak{X}_p$ ist ein bipartiter, $p+1$ -regulärer Graph, sofern die Quaternionenalgebra keine nicht-trivialen Torsionselemente enthält. Wir bilden das Euler-Produkt

$$\prod_p \zeta(X_p, p^{-s})$$

über die Graph-Zetafunktionen und untersuchen dieses globale Produkt auf seine analytischen Eigenschaften. Wir zeigen, dass das Produkt für rationale, torsionsfreie Quaternionenalgebren nicht über die Gerade $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ hinaus fortgesetzt werden kann. Jedoch kann das Euler-Produkt über die Determinantenterme in der Ihara-Formel

$$\prod_p \det(1 - p^{-s}A_{X_p} + p \cdot (p^{-s})^2)$$

im Wesentlichen als Rankin-Selberg- L -Funktion interpretiert werden und besitzt daher eine analytische Fortsetzung und Funktionalgleichung.

2 Grundlagen

In diesem Kapitel führen wir die für diese Arbeit notwendigen Grundlagen ein. Alle in diesem Kapitel eingeführten Objekte und die zugehörigen Resultate sind wohlbekannt.

2.1 Zetafunktionen von Graphen

In diesem Abschnitt definieren wir die Zetafunktion eines endlichen Graphen und diskutieren die für uns wesentlichen Eigenschaften. Unter Graphen verstehen wir hierbei ungerichtete Graphen, die Schleifen und mehrfache Kanten enthalten dürfen. Wir folgen der Darstellung in [Ter11].

Sei $X = (V(X), E(X))$ ein endlicher, zusammenhängender Graph, der weder ein Kreis, noch ein Baum ist und keine Ecke von Valenz 1 besitzt.

Wir definieren $OE(X)$ als die Menge der *orientierten Kanten* von X . Dann gilt $|OE(X)| = 2|E(X)|$. Für eine orientierte Kante e bezeichnen wir mit $o(e)$ bzw. $t(e)$ den *Startpunkt* bzw. *Endpunkt* von e . Eine Folge (e_1, \dots, e_m) von orientierten Kanten von X nennen wir einen *Kantenzug* der Länge m , wenn $t(e_i) = o(e_{i+1})$ für alle i gilt. Ein Kantenzug (e_1, \dots, e_m) heißt *geschlossen*, wenn $o(e_1) = t(e_m)$ gilt. Wir sagen der Kantenzug (e_1, \dots, e_m) hat *Backtracking*, wenn es ein i gibt, sodass $e_{i+1} = e_i^{-1}$. Ein geschlossener Kantenzug (e_1, \dots, e_m) heißt *primitiv*, wenn er nicht dadurch entsteht, dass man einen anderen Kantenzug mehrfach durchläuft. Auf der Menge aller geschlossenen Kantenzüge der Länge n operiert die Gruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ durch Verschiebung des Startpunkts. Wir sagen, eine solche Äquivalenzklasse P hat *Backtracking*, wenn es einen Vertreter für P gibt, der Backtracking hat. Ferner nennen wir eine Äquivalenzklasse P *primitiv*, wenn ein (und damit jeder) Vertreter von P primitiv ist. Wir bezeichnen mit $l(P)$ die Länge eines (und damit jedes) Vertreters von P .

2.1.1 Definition ([Ter11, Definition 2.2]).

Die *Graph-Zetafunktion* oder *Ihara-Zetafunktion* von X ist definiert als

$$\zeta(X, u) = \prod_P (1 - u^{l(P)})^{-1},$$

wobei P alle primitiven Äquivalenzklassen geschlossener Wege ohne Backtracking durchläuft.

Die Ihara-Zetafunktion konvergiert für $u \in \mathbb{C}$ mit $|u|$ hinreichend klein (siehe [Ter11, 8.1]) und erfüllt zwei bemerkenswerte Determinantenformeln.

2.1.2 Theorem (Ihara-Formel, [Iha66]).

Sei $r := |E(X)| - |V(X)| + 1$ der Rang der Fundamentalgruppe von X , A_X die Adjazenzmatrix von X und Q_X die Diagonalmatrix

$$Q_X = \text{diag}(\deg(v) - 1, v \in V(X)),$$

wobei $\deg(v)$ den Grad von v bezeichnet. Dann gilt für alle $u \in \mathbb{C}$ mit $|u|$ hinreichend klein

$$\zeta(X, u)^{-1} = (1 - u^2)^{r-1} \det(1 - uA_X + u^2Q_X).$$

Insbesondere ist $\zeta(X, u)^{-1}$ ein Polynom und $\zeta(X, u)$ ist auf \mathbb{C} eine rationale Funktion ohne Nullstellen.

Für die zweite Determinantenformel betrachten wir den von den orientierten Kanten erzeugten freien \mathbb{C} -Vektorraum, d. h. den Vektorraum

$$l^2(\text{OE}(X)) = \bigoplus_{e \in \text{OE}(X)} \mathbb{C}e.$$

Hierauf definieren wir den Operator T als

$$T(e) = \sum_f f,$$

wobei f alle orientierten Kanten durchläuft, sodass der Endpunkt von e der Startpunkt von f ist und $f \neq e^{-1}$. Dann gilt:

2.1.3 Theorem (Bass-Determinantenformel, [Bas92, Theorem 3.3]).

Es gilt für alle $u \in \mathbb{C}$ mit $|u|$ hinreichend klein:

$$\zeta(X, u)^{-1} = \det(1 - uT).$$

2.2 $\text{PGL}_n(F)$ und $\text{PGL}_n(\mathcal{O})$

Sei F ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren die *projektive lineare Gruppe* als

$$\text{PGL}_n(F) = \text{GL}_n(F)/F^*.$$

Ist R ein Unterring von F , dann können wir $\text{GL}_n(R)$ als Untergruppe von $\text{GL}_n(F)$ auffassen. Dann können wir auch die folgende Gruppe als Untergruppe der $\text{PGL}_n(F)$ betrachten:

$$\text{PGL}_n(R) = \text{GL}_n(R)/R^\times.$$

Wir schreiben Elemente der PGL_n mit eckigen Klammern und Elemente der GL_n mit runden Klammern.

2.2.1 Notation (Lokaler Körper).

Im Folgenden betrachten wir einen nicht-archimedischen, lokalen Körper F . Die Bewertung auf F bezeichnen wir mit ν , den Betrag mit $|\cdot|$. Wir schreiben \mathcal{O} für den diskreten Bewertungsring von F , d. h.

$$\mathcal{O} = \{x \in F : |x| \leq 1\}.$$

Das eindeutig bestimmte maximale Ideal in \mathcal{O} bezeichnen wir mit \mathfrak{m} und wir fixieren ein $\varpi \in F$ mit $|\varpi| = 1$. Der Restklassenkörper \mathcal{O}/\mathfrak{m} ist endlich, d. h. es gibt eine Primzahl p und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|\mathcal{O}/\mathfrak{m}| = p^n$. Wir bezeichnen mit q die Kardinalität von \mathcal{O}/\mathfrak{m} und nehmen ferner an, dass der Betrag so normiert ist, dass $|\varpi| = \frac{1}{q}$ gilt.

Sei ab jetzt F ein nicht-archimedischer, lokaler Körper.

2.2.2 Bemerkung (Ganze Vertreter).

Für viele Rechnungen bietet es sich an, mit möglichst einfachen Vertretern für ein Element g von $\mathrm{PGL}_n(F)$ zu arbeiten. Ein *ganzer Vertreter* für g ist eine Matrix $x \in \mathrm{GL}_n(F)$ mit $gF^\times = xF^\times$ und

$$x \in M_n(\mathcal{O}) \setminus M_n(\mathfrak{m}).$$

Beachte, dass ganze Vertreter immer existieren und bis auf Multiplikation mit einem Element aus \mathcal{O}^\times eindeutig bestimmt sind.

2.2.3 Bemerkung.

Wir haben die Gruppe PGL_n ad hoc definiert. Unsere Definition stimmt für allgemeine Ringe nicht mit der Definition aus der Theorie der Gruppenschemata überein. Für faktorielle Ringe ist dies jedoch der Fall (siehe Lemma 6.1 in [DM18]).

Ein nützliches Werkzeug für uns ist der Elementarteilersatz (siehe zum Beispiel [Wae67, § 85]).

2.2.4 Satz (Elementarteilersatz).

Sei $M \in \mathrm{GL}_n(F)$. Dann gibt es Matrizen $S, T \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ und eindeutig bestimmte ganze Zahlen $e_1 \leq e_2 \leq \dots \leq e_n$, sodass

$$S \cdot M \cdot T = \mathrm{diag}(\varpi^{e_1}, \dots, \varpi^{e_n}).$$

Man nennt $\varpi^{e_1}, \dots, \varpi^{e_n}$ die Elementarteiler von M .

Für die $\mathrm{PGL}_n(F)$ erhalten aus Satz 2.2.4:

2.2.5 Korollar.

Sei $M \in \mathrm{PGL}_n(F)$. Dann gibt es Matrizen $S, T \in \mathrm{PGL}_n(\mathcal{O})$ und eindeutig bestimmte ganze Zahlen $0 \leq e_2 \leq \dots \leq e_n$, sodass

$$S \cdot M \cdot T = \mathrm{diag}(1, \varpi^{e_2}, \dots, \varpi^{e_n})F^\times.$$

2.2.6 Bemerkung.

Wir ordnen auch Elementen von $\mathrm{PGL}_n(F)$ Elementarteilern zu, obwohl diese nur bis auf Multiplikation mit einem gemeinsamen Skalar eindeutig bestimmt sind. Wir wählen diesen Skalar so, dass $e_1 = 0$ gilt. Dies entspricht dann den Zahlen $1, \varpi^{e_2}, \dots, \varpi^{e_n}$ aus Korollar 2.2.5.

2.2.7 Proposition (Iwasawa-Zerlegung).

Sei $G = \mathrm{GL}_n(F)$ oder $G = \mathrm{PGL}_n(F)$, A die Untergruppe der Diagonalmatrizen, N die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen mit trivialer Diagonale und K die kanonische maximal kompakte Untergruppe von G , d. h. $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ bzw. $\mathrm{PGL}_n(\mathcal{O})$.

Dann gilt $G = ANK$ und für $f \in L^1(G)$ gilt

$$\int_G f(x) \, dx = \int_A \int_N \int_K f(ank) \, dk \, dn \, da.$$

Beweis: Die erste Aussage folgt aus [Car79, S. 140]. Die zweite Aussage folgt aus [DE14, Proposition 1.5.6] und [PR08, 2.6]. \square

2.3 Der Bruhat-Tits-Baum

In diesem Abschnitt sei F ein nicht-archimedischer, lokaler Körper und \mathcal{O}, ϖ, q wie zuvor (siehe 2.2.1). Wir definieren $G = \mathrm{PGL}_2(F)$ und $K = \mathrm{PGL}_2(\mathcal{O})$. Dieser Abschnitt folgt [Ser03, Kapitel II].

Wir betrachten den Quotienten G/K . Diesen Quotienten stellen wir mit einem Nachbarschaftsbegriff aus und erhalten dann einen $(q + 1)$ -regulären Baum, den sogenannten *Bruhat-Tits-Baum*.

Um die Nachbarschaftsrelation auf G/K zu definieren, betrachten wir die Menge aller Gitter in F^2 und nennen zwei Gitter äquivalent, wenn sie sich nur um einen Skalar unterscheiden. Jede Linksnebenklasse gK definieren eine Äquivalenzklasse von Gittern. Wir nennen g_1K und g_2K *benachbart*, wenn es Vertreter $x_1, x_2 \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$ gibt, sodass $x_1K = g_1K$, $x_2K = g_2K$ und sich die von x_1 und x_2 definierten Gitter wie folgt enthalten:

$$\varpi x_2 \mathcal{O}^2 \subsetneq x_1 \mathcal{O}^2 \subsetneq x_2 \mathcal{O}^2.$$

Diese Relation definiert auf G/K eine Graphstruktur. Dieser Graph ist ein $q + 1$ -regulärer Baum (siehe [Ser03, II.1.1]), der *Bruhat-Tits-Baum* \mathfrak{X}_q . Wir bezeichnen mit \mathfrak{o} die Ecke, der zur trivialen Nebenklasse K gehört. Wir können jede Kante mit dem abgeschlossenen Einheitsintervall $[0, 1]$ identifizieren und erhalten damit eine Topologie und eine Metrik auf dem Baum.

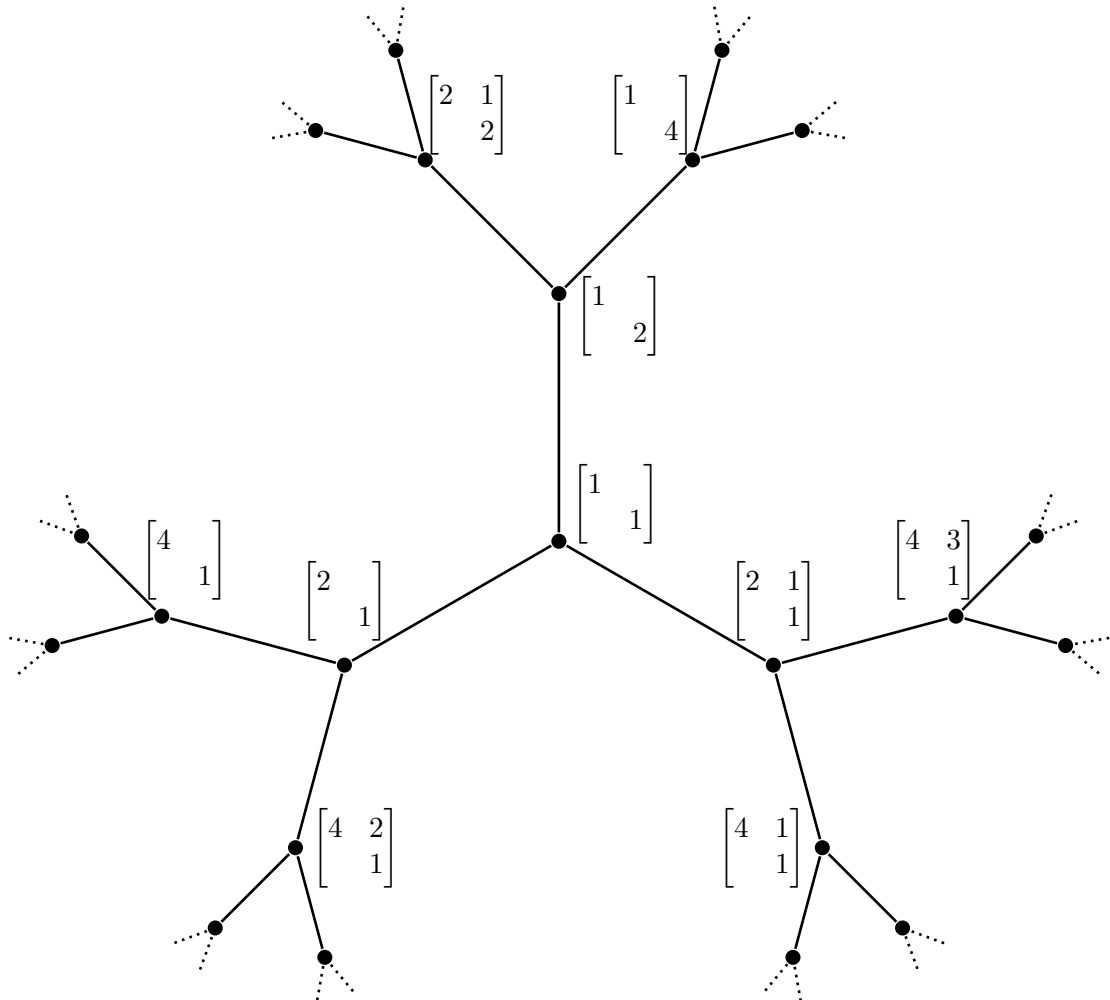
Dann gelten die folgenden Eigenschaften (siehe [Ser03, 2.1], [AB08, 6.9], [New72, II.6]):

1. Die Gruppe $\mathrm{GL}_2(F)$ bzw. $\mathrm{PGL}_2(F)$ operiert durch Linkstranslation auf den Ecken von \mathfrak{X}_q . Diese Operation ist transitiv.
2. Die Wirkung setzt sich in kanonischer Weise zu einer Wirkung auf \mathfrak{X}_q fort.
3. Sei $g \in G$. Dann ist der Abstand der Ecke gK zu \mathfrak{o} genau gleich dem Exponenten des nichttrivialen Elementarteilers von g aus 2.2.6.
4. Ein Vertretersystem für die Ecken von \mathfrak{X}_q ist gegeben durch

$$\left\{ \begin{bmatrix} \varpi^a & x \\ & \varpi^b \end{bmatrix} : a, b, x \in \mathbb{N}_0, x \in \mathcal{O}/\varpi^a \mathcal{O}, \text{ mindestens ein Eintrag liegt in } \mathcal{O}^\times \right\}.$$

2.3.1 Beispiel.

Für \mathbb{Q}_2 kann man den Graph wie folgt veranschaulichen. Jede Ecke entspricht jeweils einer $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}_2)$ -Nebenklasse. Angegeben ist jeweils der Vertreter aus 4.



2.4 Das Gebäude der $\mathrm{PGL}_n(F)$

Im vorigen Abschnitt haben wir den Bruhat-Tits-Baum eingeführt. In diesem Abschnitt führen wir nun das Bruhat-Tits-Gebäude der Gruppe $\mathrm{PGL}_n(F)$ ein, wobei F ein nicht-archimedisches, lokaler Körper ist.

Wir verwenden die Notation wie in 2.2.1. Sei weiter $G = \mathrm{PGL}_n(F)$ und $K = \mathrm{PGL}_n(\mathcal{O})$. Wir folgen der Darstellung in [AB08, 6.9]. Für uns ist hauptsächlich die Eckenstruktur des Gebäudes interessant. Das Bruhat-Tits-Gebäude hat jedoch viele weitere interessante Eigenschaften. Hierfür (und für eine ausführliche Einführung in die allgemeine Theorie von Gebäuden) verweisen wir auf [AB08] und [Gar97].

Wir betrachten die Menge aller Gitter in F^n und nennen zwei Gitter äquivalent, wenn sie sich nur um einen Skalar aus F^\times unterscheiden. Sind g_1K und g_2K zwei Linksnebenklassen von G/K , dann definieren g_1 und g_2 jeweils eine Äquivalenzklasse von Gittern. Wir nennen g_1K und g_2K *benachbart*, wenn es jeweils $x_1, x_2 \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ gibt, sodass $x_1K = g_1K$, $x_2K = g_2K$ und sich die von x_1 und x_2 definierten Gitter wie folgt enthalten:

$$\varpi x_2 \mathcal{O}^n \subsetneq x_1 \mathcal{O}^n \subsetneq x_2 \mathcal{O}^n.$$

Seien g_1K, \dots, g_mK paarweise benachbart. Dann nennen wir $\{g_1K, \dots, g_mK\}$ einen *Simplex* der Dimension $m-1$. Simplices der Dimension 0 nennen wir *Ecken*, Simplices der Dimension 1 *Kanten*. Jeder Simplex hat maximal die Dimension $n-1$. Einen solchen Simplex nennen wir *Kammer*. Jeder Simplex ist in einer Kammer enthalten (siehe [AB08, 3.1]).

2.4.1 Beispiel.

Im Bruhat-Tits-Baum hat jeder Simplex die Dimension ≤ 1 , d. h. es gibt nur Ecken und Kanten. Im Fall $n=3$ sind die Ecken

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} K, \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \varpi \end{bmatrix} K, \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \varpi & \\ & & \varpi \end{bmatrix} K$$

paarweise benachbart. Sie bilden eine Kammer. Für beliebiges n sind die Ecken

$$\left\{ \mathrm{diag}(\varpi^{e_1}, \dots, \varpi^{e_n}) K : e_i \in \{0, 1\}, e_1 = 0, e_i \leq e_{i+1} \forall i \right\}$$

paarweise benachbart und bilden eine Kammer.

Wir definieren

$$\mathfrak{a}_0 = \{ \mathrm{diag}(\varpi^{e_1}, \dots, \varpi^{e_n}) K : e_i \in \mathbb{Z} \}$$

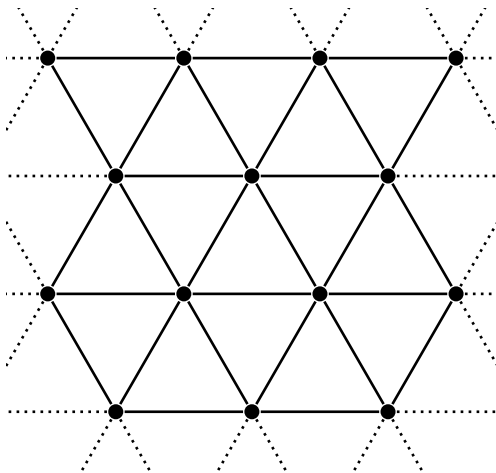
und können \mathfrak{a}_0 so in \mathbb{R}^{n-1} einbetten, dass benachbarte Ecken Abstand 1 erhalten. Wir identifizieren dann \mathfrak{a}_0 mit \mathbb{R}^{n-1} und erhalten eine Topologie und Metrik auf \mathfrak{a}_0 .

2.4.2 Beispiel.

Im Bruhat-Tits-Baum ist \mathfrak{a}_0 eine Gerade.

$$\begin{array}{ccccccccc} \begin{bmatrix} 1 & \\ & \varpi \end{bmatrix} K & \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} K & \begin{bmatrix} \varpi & \\ & 1 \end{bmatrix} K & \begin{bmatrix} \varpi^2 & \\ & 1 \end{bmatrix} K & \begin{bmatrix} \varpi^3 & \\ & 1 \end{bmatrix} K & & & & & \\ \cdots & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \cdots \end{array}$$

Im Fall $n = 3$ ergibt sich eine Kachelung von \mathbb{R}^2 durch gleichseitige Dreiecke. Jedes solche Dreieck entspricht einer Kammer.



Für $g \in G$ nennen wir $g\mathfrak{a}_0$ ein *Apartment* des Gebäudes. Dann gilt (siehe [AB08, 4.1, 6.9], [New72, II.6]):

- Für je zwei Simplizes A, B gibt es ein Apartment, das sowohl A als auch B enthält.
- Sind $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ zwei Apartments, die die Simplizes A, B enthalten, dann gibt es einen Isomorphismus $\mathfrak{a}_1 \rightarrow \mathfrak{a}_2$, der A und B punktweise fixiert.
- Die Metrik auf \mathfrak{a}_0 induziert eine Metrik auf dem Gebäude.
- Seien x, y zwei Punkte im Gebäude und \mathfrak{a} ein Apartment, das x und y enthält. Dann liegt jede Geodäte γ , die x und y verbindet, bereits in \mathfrak{a} . Die Geodäte ist insbesondere eindeutig bestimmt.
- G operiert durch Linkstranslation auf \mathfrak{X} . Diese Operation ist transitiv auf den Kammern.
- Ein Vertretersystem für die Ecken von \mathfrak{X} ist gegeben durch

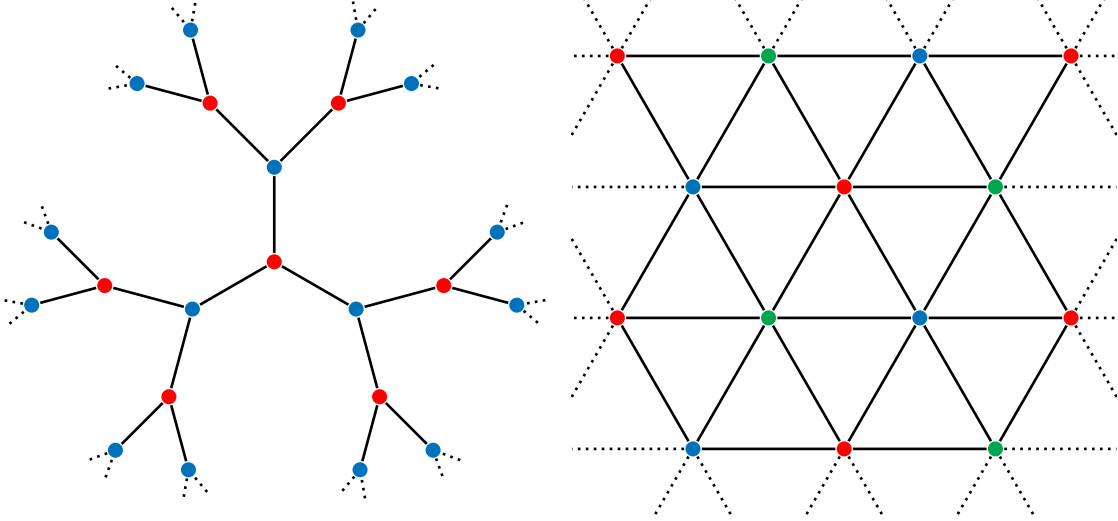
$$\left\{ [x_{ij}]_{ij} : \begin{array}{l} x_{ii} = \varpi^{a_i} \text{ für } a_i \in \mathbb{N}_0, \ x_{ij} = 0 \ \forall i > j, \ x_{ij} \in \mathcal{O}/\varpi^{a_i}\mathcal{O} \ \forall i > j, \\ \text{mindestens ein Eintrag liegt in } \mathcal{O}^\times \end{array} \right\}.$$

Wir definieren die Abbildung

$$\tau: G/K \rightarrow \{0, \dots, n-1\}, \ gK \mapsto \nu(\det(g)) \pmod{n}.$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert und ordnet jeder Ecke des Gebäudes eine Zahl aus $\{0, \dots, n-1\}$ zu. Wir nennen $\tau(gK)$ den *Typ* der Ecke gK . Die Operation von G auf

\mathfrak{X} ist nicht typerhaltend. Jedes $g \in G$ verschiebt die Typen jeweils $\nu(\det(g))$ modulo n , d. h. wir erhalten einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $G \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Jede Kammer besteht aus genau n Ecken, wobei jeder Typ genau einmal vertreten ist. Insbesondere haben zwei benachbarte Ecken des Gebäude verschiedene Typen.



Das Gebäude \mathfrak{X} definieren wir dann als die Vereinigung aller Simplizes. Dies entspricht der Vereinigung aller Apartments, wobei wir je zwei Apartments entlang ihrer Schnittmenge verkleben.

Für später halten wir das folgende Resultat fest.

2.4.3 Lemma.

Ein Element $g \in G$ operiert auf \mathfrak{a}_0 genau dann als Translation, wenn g eine Diagonalmatrix ist.

Beweis: Sei $g = \text{diag}(\varepsilon_1 \varpi^{b_1}, \dots, \varepsilon_n \varpi^{b_n})$ für gewisse $b_i \in \mathbb{N}_0$ und $\varepsilon_i \in \mathcal{O}^\times$. Dann gilt für alle $a_i \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} g \cdot \text{diag}(\varpi^{a_1}, \dots, \varpi^{a_n})K &= \text{diag}(\varepsilon_1 \varpi^{a_1+b_1}, \dots, \varepsilon_n \varpi^{a_n+b_n})K \\ &= \text{diag}(\varpi^{a_1+b_1}, \dots, \varpi^{a_n+b_n})K. \end{aligned}$$

Damit operiert g auf \mathfrak{a}_0 als Translation.

Sei g auf \mathfrak{a}_0 eine Translation, d. h. es gebe $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{Z}$, sodass für alle $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}_0$

$$g \cdot \text{diag}(\varpi^{a_1}, \dots, \varpi^{a_n})K = \text{diag}(\varpi^{a_1+b_1}, \dots, \varpi^{a_n+b_n})K.$$

Die Bedingung ist äquivalent dazu, dass für alle $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}_0$

$$\text{diag}(\varpi^{-a_1-b_1}, \dots, \varpi^{-a_n-b_n}) \cdot g \cdot \text{diag}(\varpi^{a_1}, \dots, \varpi^{a_n}) \in K.$$

Wir schreiben $g = [g_{ij}]_{ij}$. Setzt man $a_2 = \dots = a_n = 0$ und lässt a_1 gegen ∞ gehen, dann folgt $g_{12} = \dots = g_{1n} = 0$. Analog erhält man durch Variation von a_k , dass die Einträge der k -ten Zeile von g , die nicht auf der Diagonalen liegen, verschwinden. \square

2.4.4 Korollar.

Sei $g \in G$. Wenn es ein Apartment \mathfrak{a} gibt, auf dem g durch Translation operiert, dann ist g über F diagonalisierbar.

Beweis: Sei $g \in G$ und \mathfrak{a} ein Apartment. Dann gibt es ein $x \in G$ mit $\mathfrak{a} = x\mathfrak{a}_0$. Wenn g auf \mathfrak{a} durch Translation operiert, dann operiert das Element xgx^{-1} als Translation auf \mathfrak{a}_0 , ist also nach der Proposition diagonal. \square

2.5 Die Wirkung von $\mathrm{PGL}_2(F)$ auf dem Bruhat-Tits-Baum

Wir verwenden in diesem Abschnitt dieselbe Notation wie in 2.3. Wir fassen F als Quotientenkörper des faktoriellen Rings \mathcal{O} auf. Dieser Abschnitt folgt [Ser03, Kapitel II].

Sei $g \in G$. Wir betrachten die Operation von G auf dem Bruhat-Tits-Baum \mathfrak{X} und sagen

- g fixiert eine Ecke, wenn es ein $x \in G$ gibt mit $gxK = xK$;
- g ist eine *Kanteninversion*, wenn es benachbarte Ecken xK und yK gibt, die durch die Wirkung von g vertauscht werden;
- g ist *hyperbolisch* oder *operiert fixpunktfrei*, wenn g weder eine Ecke fixiert, noch eine Kante invertiert.

2.5.1 Beispiel.

- $\begin{bmatrix} \varpi & \\ & 1 \end{bmatrix}$ ist hyperbolisch.
- $\begin{bmatrix} 1 & \\ \varpi & 1 \end{bmatrix}$ fixiert die Ecken K und $\begin{bmatrix} 1 & \\ & \varpi \end{bmatrix}K$ und damit auch die Kante, die diese beiden Ecken verbindet.
- $\begin{bmatrix} & 1 \\ \varpi & \end{bmatrix}$ ist eine Kanteninversion, denn es vertauscht die Ecken K und $\begin{bmatrix} 1 & \\ & \varpi \end{bmatrix}K$.

Sei $g \in G$. Wir definieren

$$l(g) = \inf_{x \in \mathfrak{X}} d(gx, x),$$

wobei x alle Punkte des Bruhat-Tits-Baumes \mathfrak{X} durchläuft. $l(g)$ gibt den minimalen Abstand an, den ein Punkt x von seinem Bildpunkt unter der Wirkung von g hat. Da die Wirkung von G die Eckenstruktur erhält, ist $l(g) \in \mathbb{N}_0$ und das Infimum wird angenommen. Ist g keine Kanteninversion, dann genügt es das Minimum über alle Ecken $V(\mathfrak{X})$ des Bruhat-Tits-Baumes \mathfrak{X} zu erstrecken, d. h.

$$l(g) = \min_{x \in V(\mathfrak{X})} d(gx, x).$$

2.5.2 Lemma ([Ser03, Kapitel II.1]).

Sei $g \in G$ hyperbolisch. Dann ist $l(g) > 0$ und es gibt genau eine Gerade $L(g)$ im Bruhat-Tits-Baum, die invariant unter g ist. Auf dieser Gerade operiert g als Translation um $l(g)$. Genauer gilt

$$L(g) = \{x \in \mathfrak{X} : d(gx, x) = l(g)\}.$$

Insbesondere ist wegen Korollar 2.4.4 jedes hyperbolische $g \in G$ bereits über F diagonalisierbar.

2.5.3 Lemma.

Sei $g \in G$ über F diagonalisierbar mit Eigenwerten $\varepsilon_1 \varpi^{e_1}$ und $\varepsilon_2 \varpi^{e_2}$, wobei $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathcal{O}^\times$ und $e_1, e_2 \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$l(g) = |e_1 - e_2|.$$

Beweis: Da l unter Konjugation invariant ist, können wir annehmen, dass

$$g = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \varpi^{e_1} & \\ & \varepsilon_2 \varpi^{e_2} \end{bmatrix}$$

gilt. Ferner können wir annehmen, dass $e_1 \geq e_2$ gilt, andernfalls konjugieren wir noch mit der Matrix $\begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}$. Nach Division durch den Skalar $\varepsilon_2 \varpi^{e_2}$ können wir außerdem annehmen, dass $\varepsilon_2 = 1$ und $e_2 = 0$ gilt, d. h.

$$g = \begin{bmatrix} \varepsilon \varpi^{e_1 - e_2} & \\ & 1 \end{bmatrix}$$

mit $\varepsilon \in \mathcal{O}^\times$. Wir können annehmen, dass $e_1 > e_2$, denn sonst hätte g den Fixpunkt \mathfrak{o} und damit $l(g) = 0$. Es folgt $L(g) = \mathfrak{a}_0$ und g operiert auf \mathfrak{a}_0 als Verschiebung um $e_1 - e_2$. Aus Lemma 2.5.2 folgt die Behauptung. \square

2.5.4 Korollar.

Sei $\gamma \in \Gamma$ hyperbolisch. Dann gibt es ein $\varepsilon \in \mathcal{O}^\times$, sodass γ in G zu dem Element

$$\begin{bmatrix} 1 & \\ & \varepsilon \varpi^{l(\gamma)} \end{bmatrix}$$

konjugiert ist.

Gitter in $\mathrm{PGL}_2(F)$

2.5.5 Proposition.

Sei Γ ein kokompaktes, uniformes Gitter in G .

- $\gamma \in \Gamma$ ist genau dann ein Torsionselement, wenn $l(\gamma) = 0$, d. h. wenn γ einen Fixpunkt hat.
- Ist Γ torsionsfrei, dann ist jedes $\gamma \neq 1$ hyperbolisch und damit über F diagonalisierbar.

Beweis: Sei $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma^n = 1$. Dann folgt $l(\gamma^n) = n \cdot l(\gamma)$, d. h. $l(\gamma) = 0$.

Sei umgekehrt $\gamma \in \Gamma$ mit $l(\gamma) = 0$. Dann fixiert γ^2 eine Ecke xK . Die von γ^2 erzeugte Gruppe $\langle \gamma^2 \rangle$ fixiert ebenfalls die Ecke xK und ist damit in der Stabilisatorgruppe xKx^{-1} von xK enthalten. Diese ist kompakt, denn sie ist zu K konjugiert. Gleichzeitig ist $\langle \gamma^2 \rangle$ eine Untergruppe von Γ , also diskret. Somit ist $\langle \gamma \rangle$ endlich und γ ein Torsionselement.

Die zweite Aussage folgt nun aus Lemma 2.5.2. □

2.5.6 Bemerkung.

- Ist \mathfrak{X} der Bruhat-Tits-Baum von F und Γ ein torsionsfreies Gitter in $\mathrm{PGL}_2(F)$, so ist $\Gamma \backslash \mathfrak{X}$ ein endlicher, zusammenhängender $q + 1$ -regulärer Graph (siehe [Iha66]). Die universelle Überlagerung dieses Graphen ist \mathfrak{X} und Γ ist die Fundamentalgruppe.
- Jedes Gitter Γ von $\mathrm{PGL}_2(F)$ enthält ein Untergitter von endlichem Index, das torsionsfrei ist (siehe Lemma 8 in [Sel60]).

Wir halten für später noch das folgende Korollar fest.

2.5.7 Korollar.

Sei Γ ein torsionsfreies Gitter und $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq 1$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes primitives Element $\gamma_0 \in \Gamma$ und eine natürliche Zahl n mit

$$\gamma = \gamma_0^n.$$

Hierbei heißt γ_0 primitiv, falls es nicht als Potenz eines anderen Elementes in Γ geschrieben werden kann.

Beweis: γ operiert entlang der Gerade $L(\gamma)$ (siehe Lemma 2.5.2) als Translation. Wir identifizieren $L(\gamma)$ mit \mathbb{Z} und nehmen ohne Beschränkung an, dass γ eine positive Translation auf \mathbb{Z} induziert. Wir wählen $\gamma_0 \in \Gamma$, sodass γ_0 eine positive, minimale Verschiebung auf der Geraden $L(\gamma)$ induziert. Dann ist γ_0 primitiv. Sei γ'_0 ein weiteres Element mit minimaler Verschiebung, dann lässt $\gamma_0^{-1}\gamma'_0$ die Gerade $L(\gamma)$ fest, hat also Fixpunkte. Aus Proposition 2.5.5 folgt $\gamma_0 = \gamma'_0$. Mit dem gleichen Argument sieht man, dass die Untergruppe von Γ aller Elemente, die $L(\gamma)$ invariant lassen, eine freie Gruppe vom Rang 1 ist. □

2.6 Bass-Ihara-Zetafunktionen

In Kapitel 5 werden wir Gitter betrachten, die kokompakt aber nicht torsionsfrei sind. Um den Quotientengraphen $\Gamma \backslash \mathfrak{X}$ bilden zu können, darf Γ keine Kantenversionen enthalten. Der Quotientengraph ist im Allgemeinen kein $q + 1$ -regulärer Graph, denn Γ kann Drehungen enthalten, welche von einer Ecke ausgehende Kanten identifiziert. Insbesondere ist der Bruhat-Tits-Baum nicht die universelle Überlagerung.

Bass führt in [Bas92] eine gewichtete Zetafunktion ein und zeigt, dass damit analoge Aussagen zu der Ihara-Formel 2.1.2 und der Determinantenformel 2.1.3 gelten.

In diesem Abschnitt nutzen wir die Notation aus dem vorigen Abschnitt, d. h. F ist ein nicht-archimedischer, lokaler Körper und \mathfrak{X} der zu F gehörige Bruhat-Tits-Baum. Dieser Abschnitt folgt [Bas92] und [DK18].

2.6.1 Definition.

Sei e eine orientierte Kante von \mathfrak{X} und $x = o(e)$ der Startpunkt von e . Dann definieren wir das Gewicht $w(e)$ als

$$w(e) = |\Gamma_x(e)|,$$

d. h. $w(e)$ zählt, wie viele Kanten in \mathfrak{X} unter Γ mit e identifiziert werden. Dies definiert dann auch w auf dem Quotientengraph X . Für zwei Kanten e, e' mit $t(e) = o(e')$ definieren wir

$$w(e, e') = \begin{cases} w(e') & \text{falls } e' \neq e^{-1}, \\ w(e') - 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ferner setzen wir $w(e, e') = 0$, falls $t(e) \neq o(e')$. Für einen geschlossenen Kantenzug $P = (e_1, \dots, e_n)$ von X definieren wir

$$w(P) = w(e_1, e_2) \cdot \dots \cdot w(e_{n-1}, e_n) \cdot w(e_n, e_1).$$

2.6.2 Definition ([Bas92, Definition II.2.7]).

Wir definieren die *Bass-Ihara-Zetafunktion* von X als

$$\zeta(X, u) = \prod_P (1 - w(P)u^{l(P)})^{-1},$$

wobei P alle geschlossenen, primitiven Kantenzüge modulo Verschiebung des Startpunktes durchläuft (vgl. Definition 2.1.1).

Im Gegensatz zur Definition der Graph-Zetafunktion in 2.1 durchlaufen wir hier nicht nur die Kantenzüge ohne Backtracking. Ist Γ torsionsfrei, dann gilt

$$w(P) = \begin{cases} 1 & \text{falls } P \text{ kein Backtracking hat,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also stimmt in diesem Fall die Definition mit der Definition der Graph-Zetafunktion überein.

2.6.3 Definition.

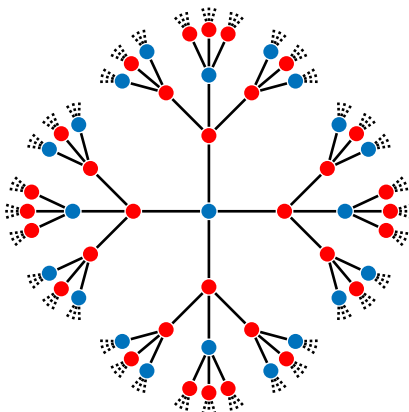
Sei v_1, \dots, v_n ein Vertretersystem für die Ecken von \mathfrak{X} unter der Wirkung von Γ . Die *induzierte Adjazenzmatrix* A_Γ ist die $n \times n$ -Matrix, die angibt, wie sich die Nachbarn einer Ecke auf die Γ -Orbits verteilen:

$$(A_\Gamma)_{ij} = \left| \{v \in V(\mathfrak{X}) : d(v_i, v) = 1, \Gamma v = \Gamma v_j\} \right|.$$

Ist Γ torsionsfrei, so ist A_Γ die Adjazenzmatrix von $\Gamma \backslash \mathfrak{X}$.

2.6.4 Beispiel.

Wir veranschaulichen die Wirkung von Γ auf \mathfrak{X} , indem wir Ecken gleich färben, wenn sie unter Γ identifiziert werden.



Jede rote Ecke hat zwei blaue und zwei rote Nachbarn, aber jede blaue Ecke hat vier rote Nachbarn. Als induzierte Adjazenzmatrix erhalten wir:

$$\begin{array}{cc} \bullet & \bullet \\ \bullet & \left(\begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{array} \right). \end{array}$$

Beachte, dass die induzierte Adjazenzmatrix nicht symmetrisch sein muss, also insbesondere nicht die Adjazenzmatrix des Quotientengraphen $\Gamma \backslash \mathfrak{X}$ sein kann.

2.6.5 Satz ([Bas92, Theorem II.3.9]).

Sei A_Γ die von Γ induzierte Adjazenzmatrix und $r = |E(X)| - |V(X)| + 1$ der Rang der Fundamentalgruppe von X .

Dann gilt für alle $u \in \mathbb{C}$ mit $|u|$ hinreichend klein

$$\zeta(X, u)^{-1} = (1 - u^2)^{r-1} \det(1 - uA_\Gamma + qu^2).$$

2.6.6 Definition ([Bas92, Definition II.3.2]).

Seien e_1, \dots, e_m die Kanten von X . Wir betrachten die Menge $\text{OE}(X)$ der $2m$ orientierten Kanten und den davon erzeugten freien \mathbb{C} -Vektorraum

$$\bigoplus_{e \in \text{OE}(X)} \mathbb{C}e.$$

Wir statten diesen Raum mit dem kanonischen Skalarprodukt aus und definieren den Operator T hierauf, sodass für $e, f \in \text{OE}(X)$ gilt:

$\langle T(e), f \rangle = w(e, f)$ genau dann, wenn der Endpunkt von e der Startpunkt von f ist und 0 sonst.

Falls Γ torsionsfrei ist, stimmt die Definition von T mit der Definition aus 2.1 überein.

2.6.7 Satz ([Bas92, Theorem II.3.3]).

Es gilt für alle $u \in \mathbb{C}$ mit $|u|$ hinreichend klein

$$\zeta(X, u)^{-1} = \det(1 - uT).$$

2.7 Die Hauptseriendarstellungen der $GL_n(F)$ und $PGL_n(F)$

In diesem Abschnitt sei F ein nicht-archimedischer, lokaler Körper und G die Gruppe $GL_n(F)$ oder $PGL_n(F)$. Wir verwenden weiterhin die Notation wie in 2.2.1. Der gesamte Abschnitt folgt [PR08].

Sei A die Untergruppe der Diagonalmatrizen, N die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen mit trivialer Diagonale und K die kanonische maximal kompakte Untergruppe von G , d.h. $GL_n(\mathcal{O})$ bzw. $PGL_n(\mathcal{O})$. Aufgrund der Iwasawa-Zerlegung gilt nun $G = ANK$ (siehe 2.2.7).

Eine Darstellung (π, V) von G heißt *glatt*, wenn für jedes $v \in V$ eine kompakte, offene Untergruppe H von G existiert, die v fixiert. Eine glatte Darstellung heißt *zulässig*, wenn für jede kompakte, offene Untergruppe H von G der Raum der invarianten Vektoren endlichdimensional ist.

Ein *Quasicharakter* einer topologischen Gruppe H ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus $\chi: H \rightarrow \mathbb{C}^\times$. Er heißt *Charakter*, wenn $|\chi(h)| = 1$ für alle $h \in H$ gilt.

2.7.1 Definition.

Seien χ_1, \dots, χ_n Quasicharaktere von F^\times . Ist $G = PGL_n(F)$, so fordern wir zusätzlich $\chi_1 \cdot \dots \cdot \chi_n = 1$.

Die *Hauptseriendarstellung* $\pi(\chi_1, \dots, \chi_n)$ ist definiert als Rechtsdarstellung auf dem Raum

$$V_{\pi(\chi_1, \dots, \chi_n)} = \left\{ f: G \rightarrow \mathbb{C} \text{ lokal konstant, } \right. \\ \left. f(anx) = \varrho(a) \chi_1(a_1) \cdot \dots \cdot \chi_n(a_n) f(x) \quad \forall a \in A, n \in N, x \in G \right\}.$$

Hierbei ist ϱ der Quasicharakter von A mit

$$\varrho(\text{diag}(a_1, \dots, a_n)) = \prod_{i=1}^n |a_i|^{\frac{n+1}{2} - i}.$$

Die Hauptseriendarstellungen haben die folgenden Eigenschaften [PR08, 4.2, 5.5, 5.10]:

1. $\pi(\chi_1, \dots, \chi_n)$ ist eine zulässige Darstellung von G .
2. $\pi(\chi_1, \dots, \chi_n)$ ist genau dann reduzibel, wenn es i und j gibt mit $\chi_i \chi_j^{-1} = | \cdot |$.

3. $\pi(\chi_1, \dots, \chi_n)$ besitzt genau eine irreduzible Unterdarstellung.
4. Zwei irreduzible Hauptseriendarstellungen $\pi(\chi_1, \dots, \chi_n), \pi(\varrho_1, \dots, \varrho_n)$ sind genau dann isomorph, wenn es eine Permutation $\sigma \in S_n$ gibt, sodass $\varrho_i = \chi_{\sigma(i)}$ für alle i .

Wir nennen einen Quasicharakter χ von F^\times *unverzweigt*, falls $\chi(\mathcal{O}^\times) = 1$. Ferner nennen wir eine zulässige, irreduzible Darstellung (π, V_π) von G *unverzweigt*, wenn der Raum

$$V_\pi^K = \{v \in V_\pi : gv = v \ \forall g \in K\}$$

nichttrivial ist. In diesem Fall ist V_π^K eindimensional (siehe [GJ72, p. 74]).

Theorem 9.10 in [PR08] besagt: Eine Hauptseriendarstellung $\pi(\chi_1, \dots, \chi_n)$ ist genau dann unverzweigt, wenn die Quasicharaktere χ_1, \dots, χ_n unverzweigt sind. Umgekehrt gibt es für jede irreduzible, unverzweigte Darstellung π von G unverzweigte Quasicharaktere χ_1, \dots, χ_n , sodass π eine Unterdarstellung von $\pi(\chi_1, \dots, \chi_n)$ ist. Die Menge $\{\chi_1, \dots, \chi_n\}$ ist dann eindeutig festgelegt.

Ist π eine unverzweigte Hauptseriendarstellung, dann gibt es also unverzweigte Quasicharaktere χ_1, \dots, χ_n mit $\pi = \pi(\chi_1, \dots, \chi_n)$. Da die Quasicharaktere χ_k jeweils unverzweigt sind, gibt es komplexe Zahlen $\lambda_k \in \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$, sodass $\chi_k = |\cdot|^{\lambda_k}$. Man nennt $|\varpi|^{\lambda_1}, \dots, |\varpi|^{\lambda_n}$ dann die *Satake-Parameter* der Darstellung π .

Wir definieren die *Iwahori-Gruppe* I als die Untergruppe aller Elemente von K , die modulo \mathfrak{m} eine obere Dreiecksmatrix sind, d. h.

$$I = \left\{ (a_{ij})_{ij} : (a_{ij})_{ij} \in K, a_{ij} \in \mathfrak{m} \ \forall i > j \right\}.$$

In dieser Arbeit werden nur die Darstellungen interessant sein, welche Vektoren besitzen, die unter I invariant sind.

2.7.2 Satz ([PR08, Theorem 9.15]).

Ist π eine zulässige, irreduzible Darstellung von G . Dann ist

$$V_\pi^I = \{v \in V_\pi : gv = v \ \forall g \in I\}$$

genau dann nichttrivial, wenn π isomorph zu einer Unterdarstellung einer unverzweigten Hauptseriendarstellung ist.

Umgekehrt besitzt jede Unterdarstellung einer unverzweigten Hauptseriendarstellung nichttriviale Iwahori-Fixvektoren.

Im Fall $G = \mathrm{PGL}_2(F)$ können wir die unverzweigten Darstellung und die Darstellungen mit Iwahori-fixen Vektoren noch weiter präzisieren, denn die Unterdarstellungen der reduzierten Hauptserie sind leicht zu klassifizieren.

Sei $\chi = |\cdot|^{\frac{1}{2}}$. Die irreduzible Unterdarstellung von $\pi(\chi, \chi^{-1})$ aus dem vorigen Satz heißt *Steinberg-Darstellung*. Wir bezeichnen sie mit St . Für einen Quasicharakter χ mit $\chi^2 = 1$ definieren wir die gewistete Darstellung $\chi \otimes \pi$ als

$$\chi \otimes \pi(g) = \chi(\det(g)) \cdot \pi(g)$$

und nennen diese Darstellung eine *spezielle Darstellung*.

2.7.3 Satz ([PR08, 8.3]).

Sei π eine zulässige, irreduzible Darstellung von $\mathrm{PGL}_2(F)$. Dann besitzt π genau dann nichttriviale Vektoren, die unter der Iwahori-Gruppe invariant sind, wenn π zu einer der folgenden Darstellungen isomorph ist:

- Eine irreduzible Hauptseriendarstellung $\pi(\chi, \chi^{-1})$, wobei $\chi \neq |\cdot|^{\pm\frac{1}{2}}$ ein unverzweigter Quasicharakter von F^\times ist.
- Eine eindimensionale Darstellung der Form $\chi \circ \det$, wobei χ ein unverzweigter Charakter von F^\times mit $\chi^2 = 1$ ist.
- Eine spezielle Darstellung, d. h. $\chi \otimes \mathrm{St}$, wobei χ ein unverzweigter Quasicharakter mit $\chi^2 = 1$ ist.

π ist genau dann unverzweigt, wenn π zu einer Darstellung aus den ersten beiden Fällen isomorph ist.

2.8 Langlands- L -Funktionen

In diesem Abschnitt führen wir L -Funktionen von Darstellungen ein. Wir folgen hierbei [GJ72] und [Bor79].

Sei F ein nicht-archimedischer, lokaler Körper, $G = \mathrm{GL}_n(F)$ oder $\mathrm{PGL}_n(F)$ und \widehat{G} die zu G duale Gruppe (siehe [Bor79]), d. h.

$$\widehat{G} = \begin{cases} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) & \text{falls } G = \mathrm{GL}_n(F), \\ \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) & \text{falls } G = \mathrm{PGL}_n(F). \end{cases}$$

Ist π eine irreduzible, unverzweigte Darstellung von G mit zugehörigen Satake-Parametern $|\varpi|^{\lambda_1}, \dots, |\varpi|^{\lambda_n}$, dann setzen wir

$$c(\pi) = \mathrm{diag}(|\varpi|^{\lambda_1}, \dots, |\varpi|^{\lambda_n}) = \mathrm{diag}(q^{-\lambda_1}, \dots, q^{-\lambda_n}).$$

Ist r eine endlichdimensionale Darstellung von \widehat{G} , dann ist die Langlands- L -Funktion von π und r definiert als

$$L(\pi, r, s)^{-1} = \det(1 - r(c(\pi))q^{-s}).$$

Ist $r = r_{\mathrm{std}}: \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ die identische Darstellung, so gilt

$$L(\pi, r_{\mathrm{std}}, s) = \prod_{i=1}^n (1 - q^{-s-\lambda_i})^{-1}.$$

Man nennt diese L -Funktion auch die Standard-Langlands- L -Funktion und schreibt $L(\pi, s)$.

Jede Darstellung von $\mathrm{PGL}_n(F)$ kann als Darstellung von $\mathrm{GL}_n(F)$ aufgefasst werden. Umgekehrt kann eine Darstellung von $\mathrm{GL}_n(F)$ genau dann als Darstellung von $\mathrm{PGL}_n(F)$ aufgefasst werden, wenn diese auf den Vielfachen der Einheitsmatrix trivial ist. Die Definition der L -Funktion ist unabhängig davon, ob man π als Darstellung von $\mathrm{PGL}_n(F)$ oder $\mathrm{GL}_n(F)$ auffasst.

2.8.1 Beispiel.

Sei $G = \mathrm{GL}_2(F)$ und $r = \otimes^2: \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \otimes \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ das Tensorprodukt der identischen Darstellung. Ist π eine unverzweigte Darstellung mit Satake-Parametern $|\varpi|^\lambda, |\varpi|^\mu$, dann folgt

$$L(\pi, \otimes^2, s)^{-1} = (1 - q^{-s-\lambda-\mu})(1 - q^{-s+\lambda-\mu})(1 - q^{-s-\lambda+\mu})(1 - q^{-s+\lambda+\mu}).$$

2.8.2 Beispiel.

Sei $r = \wedge^k: \mathrm{GL}(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathrm{GL}(\wedge^k \mathbb{C}^n)$ die Darstellung auf das k -te Tensorprodukt und π eine irreduzible, unverzweigte Darstellung mit Satake-Parametern $|\varpi|^{\lambda_1}, \dots, |\varpi|^{\lambda_n}$. Dann gilt

$$L(\pi, \wedge^k, s)^{-1} = \prod_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I|=k}} \left(1 - q^{-s} \prod_{i \in I} q^{-\lambda_i} \right).$$

Beweis: Wir erinnern daran, dass für jede Basis e_1, \dots, e_n eines Vektorraumes V

$$e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$$

eine Basis für $\wedge^k V$ ist. Damit folgt

$$r(c(\pi)) = \mathrm{diag}(q^{-\lambda_{i_1}} \cdot \dots \cdot q^{-\lambda_{i_k}}, 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n)$$

und

$$\begin{aligned} \det(1 - r(c(\pi))q^{-s}) &= \prod_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (1 - q^{-s} q^{-\lambda_{i_1}} \cdot \dots \cdot q^{-\lambda_{i_k}}) \\ &= \prod_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I|=k}} \left(1 - q^{-s} \cdot \prod_{i \in I} q^{-\lambda_i} \right). \quad \square \end{aligned}$$

Der Ansatz von Godement, Jacquet und Langlands

Bislang haben wir nur L -Funktionen für unverzweigte Darstellung π definiert. In den Arbeiten [JL70] und [GJ72] zeigen Jacquet, Godement und Langlands, dass man die Standard- L -Funktion für die Gruppe $\mathrm{GL}_n(F)$ über einem lokalen Körper F auch über einen Integralansatz definieren kann. Mit diesem Ansatz kann man die L -Funktion für jede irreduzible, zulässige Darstellung von $\mathrm{GL}_n(F)$ definieren.

Sei π eine irreduzible, zulässige Darstellung von $\mathrm{GL}_n(F)$, $\phi \in \mathcal{S}(\mathrm{M}_n(F))$ und f ein Matrixkoeffizient von π . Dann definieren wir

$$Z(\phi, s, f) = \int_{\mathrm{GL}_n(F)} \phi(x) f(x) |\det(x)|^s dx.$$

Dann gilt (siehe S. 30ff in [GJ72]):

1. Es gibt ein $s_0 \in \mathbb{R}$, sodass das Integral $Z(\phi, s, f)$ für alle $\phi \in \mathcal{S}(M_n(F))$, jedes $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > s_0$ und jeden Matrixkoeffizienten f von π absolut konvergiert.
2. Es gibt eine Funktion $L(\pi, s)$, sodass für alle $\phi \in \mathcal{S}(M_n(F))$ und jeden Matrixkoeffizienten von π

$$\xi(\phi, s, f) = \frac{Z(\phi, s + \frac{n-1}{2}, f)}{L(\pi, s)}$$

ein Polynom in q^s und q^{-s} ist. Dabei ist $L(\pi, s)$ das Inverse eines Polynoms in q^{-s} mit konstantem Term 1.

3. Es gibt endlich viele Funktionen $\phi_i \in \mathcal{S}(M_n(F))$ und Matrixkoeffizienten f_i von π , sodass

$$\sum_i \xi(\phi_i, s, f_i)$$

eine Konstante $\neq 0$ ist.

Die Funktion $L(\pi, s)$ ist durch diese Bedingungen eindeutig bestimmt. Man nennt sie die *Langlands-L-Funktion (à la Godement-Jacquet)* der Darstellung π . Für unverzweigte Darstellungen stimmt diese mit $L(\pi, r_{\text{std}}, s)$ überein.

2.9 Quaternionenalgebren

In diesem Abschnitt führen wir Quaternionenalgebren und ihre für uns wesentlichen Eigenschaften ein. Wir orientieren uns hierbei an [Voi21] und [Vig80].

Sei K ein Körper der Charakteristik 0 und seien $a, b \in K^*$. Dann definieren wir eine *Quaternionenalgebra* $M_{a,b}$ über K wie folgt: Wir betrachten den vierdimensionalen K -Vektorraum $M_{a,b}$ der Form

$$M_{a,b} = K \oplus iK \oplus jK \oplus kK$$

auf dem wir durch $i^2 = a$, $j^2 = b$, $ij = k = -ji$ eine Multiplikation definieren. Damit entspricht $M_{a,b}$ der Algebra

$$K\{i, j, k\}/(i^2 = a, j^2 = b, ij = k, -ji = k).$$

Hierbei bezeichnen wir mit $K\{i, j, k\}$ die Ringerweiterung von K um die nicht-kommutierenden Variablen i, j, k . Wie bei Zahlkörpern definieren wir zu einem Element

$$x = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$$

das konjugierte Element

$$\bar{x} = \alpha - \beta i - \gamma j - \delta k.$$

Damit erhalten wir eine *Norm* und eine *Spurabbildung*

$$\begin{aligned} N(x) &= x\bar{x} = \alpha^2 - a\beta^2 - b\gamma^2 + ab\delta^2 \\ \text{tr}(x) &= x + \bar{x} = 2\alpha. \end{aligned}$$

Dann gilt wie bei Zahlkörpern $N(xy) = N(x) \cdot N(y)$, $\text{tr}(x + y) = \text{tr}(x) + \text{tr}(y)$ und x ist in M genau dann invertierbar, wenn $N(x) \neq 0$.

Wir können M in natürlicher Weise auch über Erweiterungskörpern L von K betrachten, indem wir Koeffizienten aus L zulassen. Dies entspricht dem Tensorprodukt von M mit L

$$M \otimes_K L = L \oplus iL \oplus jL \oplus kL.$$

Es gibt verschiedene Paare a, b , die (bis auf Isomorphie) dieselbe Quaternionenalgebra definieren. Allerdings kann man für Zahlkörper Quaternionenalgebren durch ihr Zerfallsverhalten über den Primstellen des Körper bis auf Isomorphie klassifizieren:

2.9.1 Theorem ([Voi21, Theorem 14.6.1]).

1. *Eine Quaternionenalgebra M über einem Körper F der Charakteristik 0 ist entweder eine Divisionsalgebra oder isomorph zu $M_2(F)$. In dem Fall, dass sie isomorph zu $M_2(F)$ ist, nennen wir M über F unverzweigt. Falls $F = K_\nu$, d. h. F ist die Vervollständigung von K bezüglich einer Primstelle ν , dann nennen wir M an der Primstelle ν unverzweigt.*
2. *Eine Quaternionenalgebra M über einem Zahlkörper K ist für fast alle Primstellen ν über dem Körper K_ν unverzweigt, d. h. $M \otimes K_\nu$ ist nur für endlich viele ν eine Divisionsalgebra.*
3. *Sei K ein Zahlkörper. Die Abbildung, die einer Quaternionenalgebra M über K die Primstellen zuordnet, über denen M verzweigt ist, induziert eine Bijektion zwischen Quaternionenalgebren über K modulo Isomorphie und endlichen Mengen von Primstellen von gerader Mächtigkeit.*

3 Unverzweigte Langlands- L -Funktionen

In diesem Kapitel sei F ein nicht-archimedischer, lokaler Körper. In 3.1 betrachten wir kokompakte, uniforme Gitter Γ in $\mathrm{PGL}_2(F)$ und zeigen, wie man die Standard-Langlands- L -Funktion einer irreduziblen, unitären, unverzweigten Darstellung von $\mathrm{PGL}_2(F)$ geometrisch ausdrücken kann. Operiert Γ ohne Kanteninversion auf dem Bruhat-Tits-Baum \mathfrak{X} , dann können wir den Quotientengraphen $X = \Gamma \backslash \mathfrak{X}$ bilden. In dieser Situation folgern wir, dass die L -Funktion des unverzweigten Teils der Rechtsdarstellung auf $L^2(\Gamma \backslash \mathrm{PGL}_2(F))$ dem Determinantenterm in der Ihara-Formel entspricht

$$L(R^{\mathrm{uv}}, s - \frac{1}{2})^{-1} = \det(1 - uA_X + qu^2), \quad (1)$$

wenn wir $u = q^{-s}$ setzen.

In 3.2 verallgemeinern wir dieses Ergebnis dann für die irreduziblen, unitären, unverzweigten Darstellungen der Gruppe $\mathrm{PGL}_n(F)$. Wir zeigen weiter, dass für jede algebraische Darstellung r die L -Funktion $L(R^{\mathrm{uv}}, r, s)$ eine zu (1) analoge Determinantenformel erfüllt. Daraus folgen wir eine Symmetrie der unverzweigten L -Funktionen bezüglich r und der zu r dualen Darstellung r^*

$$L(R^{\mathrm{uv}}, r, s) = L(R^{\mathrm{uv}}, r^*, s).$$

Notation: Wir verwenden die Notation wie in 2.2. Weiter bezeichne G die Gruppe $\mathrm{PGL}_n(F)$ und K die maximal kompakte Untergruppe $\mathrm{PGL}_n(\mathcal{O})$. Ferner sei Γ ein kokompaktes, uniformes Gitter in G . Wir normalisieren das Haar-Maß auf G so, dass K das Maß 1 erhält.

3.1 Unverzweigte L -Funktionen und Graph-Zetafunktionen

Wir betrachten in diesem Abschnitt den Fall $n = 2$.

Sei \mathfrak{X} der Bruhat-Tits-Baum aus 2.3 und $V(\mathfrak{X})$ die Eckenmenge von \mathfrak{X} . Dann betrachten wir den von den Ecken erzeugten freien Vektorraum

$$\bigoplus_{v \in V(\mathfrak{X})} \mathbb{C}v$$

und seine Vervollständigung als Hilbertraum

$$l^2(V(\mathfrak{X})) = \widehat{\bigoplus_{v \in V(\mathfrak{X})} \mathbb{C}v} = \left\{ \sum_{v \in V(\mathfrak{X})} c(v)v : c(v) \in \mathbb{C}, \sum_{v \in V(\mathfrak{X})} |c(v)|^2 < \infty \right\}.$$

Auf $l^2(V(\mathfrak{X}))$ betrachten wir wie Serre in [Ser03, p. 73] für $n \in \mathbb{N}_0$ die folgenden Operatoren:

$$A_n(v) = \sum_{\substack{w \in V(\mathfrak{X}) \\ d(v,w)=n}} w.$$

Hierbei bezeichnet $d(v, w)$ den Abstand von v und w in \mathfrak{X} . Der Operator A_n bildet also eine Ecke v auf alle Ecken vom Abstand n ab.

Die Operatoren erfüllen die folgenden Rekursionsgleichungen (siehe [Ser03, p. 73]):

1. $A_1 A_1 = A_2 + q + 1$,
2. $A_1 A_n = A_{n+1} + q A_{n-1}$ für $n \geq 2$.

Als erzeugende Funktion erhalten wir damit:

3.1.1 Lemma.

Für $u \in \mathbb{C}$ mit $|u|$ hinreichend klein gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} u^n A_n = (1 - u^2) (1 - u A_1 + q u^2)^{-1}.$$

Beweis: Die Reihe $\sum u^n A_n$ ist für $|u|$ hinreichend klein absolut konvergent, denn der Baum ist $q + 1$ -regulär. Mit den Rekursionsgleichungen folgt

$$\begin{aligned} & (1 - u A_1 + q u^2) \sum_{n=0}^{\infty} u^n A_n \\ &= (1 + q u^2) \sum_{n=0}^{\infty} u^n A_n - \sum_{n=0}^{\infty} u^{n+1} A_1 A_n \\ &= (1 + q u^2) \sum_{n=0}^{\infty} u^n A_n - \left(\sum_{n=0}^{\infty} u^{n+1} A_{n+1} + (q + 1) u^2 + q \sum_{n=2}^{\infty} u^{n+1} A_{n-1} \right) \\ &= 1 - u^2. \end{aligned}$$

Insbesondere ist der Operator $1 - u A_1 + q u^2$ für $|u|$ hinreichend klein invertierbar. Da $1 - u^2$ ein Skalar ist und damit mit dem Operator kommutiert, folgt die Behauptung. \square

Sei π eine Darstellung. Die Operatoren A_k induzieren eine Operation auf V_π^K (siehe [KLW10])

$$A_k f(xK) = \sum_{\substack{yK \\ d(xK, yK)=k}} f(yK).$$

3.1.2 Satz.

Es sei (π, V_π) eine irreduzible, unitäre, unverzweigte Darstellung von G . Wir schreiben $A_{k,\pi}$ für den Skalar, mit dem A_k auf dem eindimensionalen Raum V_π^K operiert. Dann gilt mit $u = q^{-s}$

$$L(\pi, s - \frac{1}{2})^{-1} = (1 - u A_{1,\pi} + q u^2).$$

Beweis: Das zentrale Werkzeug ist ein Resultat von Jacquet und Langlands, später verallgemeinert von Godement und Jacquet. Nach [GJ72, § 6] und [Dei13, 8.2] können wir für eine irreduzible, unitäre, unverzweigte Darstellung (π, V_π) von $\mathrm{GL}_2(F)$ die Standard-Langlands- L -Funktion wie folgt berechnen:

Wähle das Haar-Maß auf $\mathrm{GL}_2(F)$ so, dass $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$ das Maß 1 erhält. Für $\mathrm{Re}(s)$ hinreichend groß konvergiert das Bochner-Integral

$$\int_{\mathrm{GL}_2(F)} \mathbf{1}_{\mathrm{M}_2(\mathcal{O})}(x) |\det(x)|^s \pi(x) \, dx \quad (2)$$

im Banachraum der beschränkten Operatoren auf V_π mit der starken Operatortopologie. Für $f \in V_\pi$ gilt dann

$$\int_{\mathrm{GL}_2(F)} \mathbf{1}_{\mathrm{M}_2(\mathcal{O})}(x) |\det(x)|^s \pi(x) f \, dx = L(\pi, s - \frac{1}{2}) P_\pi(f).$$

Um das Bochner-Integral über GL_2 auf ein Integral über PGL_2 zurückzuführen, definieren wir auf $\mathrm{PGL}_2(F)$ die folgende Funktion:

$$| \cdot | : \mathrm{PGL}_2(F) \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_K \left[\begin{smallmatrix} 1 & \\ & \varpi^k \end{smallmatrix} \right]_K(x) \cdot q^{-k}.$$

Ist $x \in G$ und $y \in \mathrm{GL}_2(F)$ ein ganzer Vertreter von x , dann gilt $|x| = |\det(y)|$. Außerdem gilt $|x| = q^{-k}$ genau dann, wenn die Ecke xK im Bruhat-Tits-Baum den Abstand k von der Ecke \mathfrak{o} hat, das heißt $|x| = q^{-d(xK, \mathfrak{o})}$.

Wir wenden die Quotientenintegralformel [DE14, 1.5] auf (2) an und erhalten

$$\begin{aligned} & \int_{\mathrm{GL}_2(F)} \mathbf{1}_{\mathrm{M}_2(\mathcal{O})}(x) |\det(x)|^s \pi(x) \, dx \\ &= \int_{\mathrm{PGL}_2(F)} \int_{F^\times} \mathbf{1}_{\mathrm{M}_2(\mathcal{O})}(\lambda x) |\det(\lambda x)|^s \pi(\lambda x) \, d\lambda \, dx \\ &= \int_{\mathrm{PGL}_2(F)} \int_{F^\times} \mathbf{1}_{\mathrm{M}_2(\mathcal{O})}(\lambda x) |\lambda^2|^s \cdot |\det(x)|^s \pi(x) \, d\lambda \, dx. \end{aligned}$$

Damit die Haar-Maße auf GL_2 und PGL_2 zusammenpassen, wählen wir das Haar-Maß μ auf F^\times so, dass \mathcal{O}^\times Maß 1 erhält. Wir wählen x jeweils als ganzen Vertreter. Dann liegt λx genau dann in $\mathrm{M}_2(\mathcal{O})$, wenn $\lambda \in \mathcal{O} \setminus \{0\}$. Der Term $|\lambda|^s$ hängt nur von der Bewertung von λ ab. Wir schreiben das Integral über F^\times entsprechend um und erhalten für $\mathrm{Re}(s)$ hinreichend groß:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathrm{PGL}_2(F)} \int_{F^\times} \mathbf{1}_{\mathrm{M}_2(\mathcal{O})}(\lambda x) |\lambda^2|^s \cdot |x|^s \pi(x) \, d\lambda \, dx \\ &= \int_{\mathrm{PGL}_2(F)} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\varpi^n \mathcal{O}^\times} |\lambda^2|^s \cdot |x|^s \pi(x) \, d\lambda \, dx \\ &= \int_{\mathrm{PGL}_2(F)} \sum_{n=0}^{\infty} \mu(\varpi^n \mathcal{O}^\times) (q^{-2n})^s |x|^s \pi(x) \, dx \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mu(\varpi^n \mathcal{O}^\times) (q^{-2n})^s \right) \int_{\mathrm{PGL}_2(F)} |x|^s \pi(x) \, dx \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (q^{-2n})^s \right) \int_{\mathrm{PGL}_2(F)} |x|^s \pi(x) \, dx \\ &= \frac{1}{1 - q^{-2s}} \int_{\mathrm{PGL}_2(F)} |x|^s \pi(x) \, dx. \end{aligned}$$

Sei $f \in V_\pi^K$ und $y \in G$. Wir identifizieren G/K mit den Ecken des $q + 1$ -regulären Bruhat-Tits-Baumes und bezeichnen mit \mathfrak{o} die Ecke, die zu der trivialen Nebenklasse K gehört. Dann folgt

$$\begin{aligned} \left(\int_G |x|^s \pi(x) f \, dx \right)(y) &= \int_G |x|^s f(yx) \, dx = \sum_{xK \in G/K} |x|^s f(yxK) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} q^{-ls} \sum_{\substack{x \in G/K \\ d(xK, \mathfrak{o})=l}} f(yxK) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} q^{-ls} (A_{l, \pi} f)(y). \end{aligned}$$

Aus Lemma 3.1.1 folgt

$$\int_G |x|^s \pi(x) f \, dx = (1 - u^2) (1 - uA_{1, \pi} + qu^2)^{-1} f.$$

Insgesamt gilt dann nach (2)

$$L(\pi, s - \frac{1}{2}) P_\pi = \frac{1}{1 - u^2} \int_G |x|^s \pi(x) \, dx P_\pi = (1 - A_1 u + qu^2)^{-1} P_\pi. \quad \square$$

3.1.3 Beispiel.

Sei π eine irreduzible, unitäre, unverzweigte Hauptseriendarstellung von G mit Satake-Parametern $|\varpi|^\lambda$, $|\varpi|^{-\lambda}$ und $G = ANK$ die Iwasawa-Zerlegung. Die Funktion

$$f(ank) = |a_1|^\lambda |a_2|^{-\lambda} \left| \frac{a_1}{a_2} \right|^{\frac{1}{2}} = \left| \frac{a_1}{a_2} \right|^{\lambda + \frac{1}{2}}$$

ist wohldefiniert und liegt in V_π^K . Die $q + 1$ Nachbarn von \mathfrak{o} sind gegeben durch

$$\left\{ \begin{bmatrix} \varpi & x \\ & 1 \end{bmatrix} K, x \in \mathcal{O}/\varpi\mathcal{O} \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \\ & \varpi \end{bmatrix} K \right\}.$$

Dann gilt

$$A_{1, \pi} f(1) = \sum_{z \in \mathcal{O}/\varpi\mathcal{O}} f\left(\begin{bmatrix} \varpi & z \\ & 1 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} 1 & \\ & \varpi \end{bmatrix}\right) = q^{-\lambda + \frac{1}{2}} + q^{\lambda + \frac{1}{2}},$$

d. h. $A_{1, \pi}$ operiert als Skalar $q^{-\lambda + \frac{1}{2}} + q^{\lambda + \frac{1}{2}}$ auf V_π^K . Aus Satz 3.1.2 folgt

$$L(\pi, s) = \frac{1}{(1 - q^{-s+\lambda})(1 - q^{-s-\lambda})}.$$

Insbesondere liefert die Definition von Jacquet, Langlands und Godement in der Tat L -Funktionen im Sinne von Langlands.

Sei nun Γ ein kokompaktes, uniformes Gitter, das ohne Kanteninversion auf dem Bruhat-Tits-Baum \mathfrak{X} operiert. Als Folgerung aus Satz 3.1.2 erhalten wir, dass die L -Funktion des unverzweigten Teils der Rechtsdarstellung auf $L^2(\Gamma \backslash G)$ gleich dem Determinantenterm in der Ihara-Formel 2.1.2 bzw. 2.6.5 ist.

Sei R die Rechtsdarstellung auf $L^2(\Gamma \backslash G)$ und

$$R = \bigoplus_{\pi \in \widehat{G}} N(\pi)\pi$$

die Zerlegung der Rechtsdarstellung in irreduzible Unterdarstellungen (siehe [DE14, 9.1, 9.2]). Wir definieren den *unverzweigten Teil* der Rechtsdarstellung als

$$R^{\text{uv}} = \bigoplus_{\substack{\pi \in \widehat{G} \\ \text{unverzweigt}}} N(\pi)\pi.$$

Diese Summe ist endlich, denn Γ ist kokompakt. Die L -Funktion von R^{uv} definieren wir als

$$L(R^{\text{uv}}, s) = \prod_{\substack{\pi \in \widehat{G} \\ \text{unverzweigt}}} L(\pi, s)^{N(\pi)}.$$

3.1.4 Satz.

Sei A die von Γ induzierte Adjazenzmatrix (siehe 2.6.3). Dann gilt mit $u = q^{-s}$

$$L(R^{\text{uv}}, s - \frac{1}{2})^{-1} = \det \left(1 - uA + qu^2 \right).$$

3.1.5 Bemerkung.

Beachte, dass A die Adjazenzmatrix des Graphen $X = \Gamma \backslash \mathfrak{X}$ ist, wenn Γ torsionsfrei ist. Der Determinantenterm ist dann der Determinantenterm in der Ihara-Formel 2.1.2 der Graph-Zetafunktion. Ist Γ nicht torsionsfrei, aber operiert ohne Kanteninversion auf \mathfrak{X} , so entspricht der obige Determinantenterm dem Term in der Ihara-Formel 2.6.5 der Bass-Ihara-Zetafunktion von $\Gamma \backslash \mathfrak{X}$.

Beweis: Sei $R^{\text{uv}} = \pi_1 \oplus \dots \oplus \pi_k$ die Zerlegung des unverzweigten Teils der Rechtsdarstellung in irreduzible Unterdarstellungen. Dann ist

$$L^2(\Gamma \backslash G)^K = \bigoplus_{i=1}^k V_{\pi_i}^K$$

eine direkte Zerlegung von $L^2(\Gamma \backslash G)^K$ in eindimensionale Unterräume. Nach Satz 3.1.2 ist $1 - uA_1 + qu^2$ bzgl. dieser Zerlegung durch die Diagonalmatrix

$$\text{diag} \left(L(\pi_1, s - \frac{1}{2})^{-1}, \dots, L(\pi_k, s - \frac{1}{2})^{-1} \right)$$

gegeben. □

3.2 Höherer Rang

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir 3.1.2 und 3.1.4 für höheren Rang. Sei dazu Γ ein torsionsfreies, kokompaktes, uniformes Gitter in $G = \mathrm{PGL}_n(F)$.

Die Nachbarn einer Ecken im PGL_n -Gebäude besitzen verschiedene Typen, d. h. wir erhalten im PGL_n -Gebäude mehrere Adjazenzoperatoren A_1, \dots, A_{n-1} (siehe [LPS88]).

Sei \mathfrak{X} das Bruhat-Tits-Gebäude von $\mathrm{PGL}_n(F)$ und $V(\mathfrak{X})$ die Eckenmenge von \mathfrak{X} . Wir betrachten für $i \in \{1, \dots, n-1\}$ das Element

$$x_i = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n-i}, \underbrace{\varpi, \dots, \varpi}_i)$$

und definieren den Operator

$$A_i(xK) = \sum_{yK \in Kx_iK} xyK$$

auf dem Hilbertraum

$$l^2(V(\mathfrak{X})) = \widehat{\bigoplus_{v \in V} \mathbb{C}v} = \left\{ \sum_{v \in V} c(v)v : c(v) \in \mathbb{C}, \sum_{v \in V(\mathfrak{X})} |c(v)|^2 < \infty \right\}.$$

Dann gilt

$$A_i(xK) = \sum_{yK \in V(\mathfrak{X})} yK,$$

wobei die Summe sich über alle zu xK benachbarten Ecken yK erstreckt, sodass für den Typ von yK gilt

$$\tau(yK) \equiv \tau(xK) + i \pmod{n}.$$

A_i ist folglich der Operator, der eine Ecke xK vom Typ k auf alle Nachbarn vom Typ $k+i$ (modulo n) abbildet. Da jeder Nachbar von xK einen anderen Typ hat als xK , ist $\sum_{i=1}^{n-1} A_i$ der geometrische Adjazenzoperator auf $V(\mathfrak{X})$.

Dann gilt (siehe [LSV05]): Die Operatoren A_1, \dots, A_{n-1} sind beschränkt, normal und kommutieren miteinander.

Seien xK und yK benachbarte Ecken von \mathfrak{X} . Wir definieren den *Typ* der orientierten Kante, die von xK nach yK führt, als $\tau(yK) - \tau(xK) \pmod{n}$. $A_{1,l}$ definieren wir dann als den Operator, der eine Ecke xK auf alle Ecken yK abbildet, sodass es einen gerichteten Kantenzug der Länge l gibt, der nur Kanten vom Typ 1 verwendet. Im Fall von $n=2$ hat jede Kante den Typ 1, d. h. $A_{1,l}$ ist gleich dem Operator A_l aus 3.1.

3.2.1 Satz.

Sei π eine irreduzible, unitäre, unverzweigte Darstellung von $\mathrm{PGL}_n(F)$. Dann ist V_π^K unter A_k invariant und wir schreiben $A_{k,\pi}$ für den Skalar, mit dem A_k auf dem eindimensionalen Raum V_π^K operiert. Dann gilt mit $u = q^{-s}$

$$L(\pi, s - \frac{n-1}{2})^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-u)^k q^{k(k-1)/2} A_{k,\pi} + q^{\frac{n(n-1)}{2}} (-u)^n.$$

Wie im Fall $n = 2$ können wir dann die L -Funktion des unverzweigten Teils der Rechtsdarstellung als Determinante schreiben.

3.2.2 Korollar.

Sei Γ ein torsionsfreies, kokompaktes, uniformes Gitter in G und X der Quotient $\Gamma \backslash \mathfrak{X}$. Die Adjazenzoperatoren A_1, \dots, A_{n-1} von \mathfrak{X} induzieren dann die entsprechenden Adjazenzoperatoren $A_{1,X}, \dots, A_{n-1,X}$ auf $l^2(V(X))$. Dann gilt mit $u = q^{-s}$

$$L(R^{\mathrm{uv}}, s - \frac{n-1}{2})^{-1} = \det \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-u)^k q^{k(k-1)/2} A_{k,X} + q^{\frac{n(n-1)}{2}} (-u)^n \right).$$

Beweis des Satzes: Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Satz 3.1.2. Nach [GJ72, § 6] gilt für $f \in V_\pi$ und $\mathrm{Re}(s)$ hinreichend groß

$$L(\pi, s - \frac{n-1}{2}) P_\pi(f) = \int_{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O})} \mathbf{1}_{\mathrm{M}_2(\mathcal{O})}(x) |\det(x)|^s \pi(x) f \, dx. \quad (3)$$

Sei $x \in G$ und y ein ganzer Vertreter für x . Wir definieren $|x| = |\det(y)|$. Dann gilt $|xK| = q^{-k}$ genau dann, wenn $xK \in A_{1,l}(\mathfrak{o})$.

Wie im Beweis von Satz 3.1.2 können wir mit $u = q^{-s}$ das Integral in (3) in ein Integral über die Gruppe PGL_n umschreiben:

$$\int_{\mathrm{GL}_n(F)} \mathbf{1}_{\mathrm{M}_n(\mathcal{O})}(x) |\det(x)|^s \pi(x) \, dx = \frac{1}{1 - u^n} \int_{\mathrm{PGL}_n(F)} |x|^s \pi(x) \, dx.$$

Für $\mathrm{Re}(s)$ hinreichend groß folgt dann für $f \in V_\pi^K$

$$\int_G |x|^s \pi(x) f \, dx = \int_{G/K} |x|^s \pi(x) f \, dx = \sum_{l=0}^{\infty} q^{-ls} \sum_{\substack{x \in V(\mathfrak{X}) \\ |x|=q^{-l}}} \pi(x) f = \sum_{l=0}^{\infty} q^{-ls} A_{1,l}(f).$$

Aus Theorem 3 in [Tam63] erhält man

$$\sum_{l=0}^{\infty} u^l A_{1,l} = (1 - u^n) \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-u)^k q^{k(k-1)/2} A_k + q^{\frac{n(n-1)}{2}} (-u)^n \right)^{-1}$$

für alle $u \in \mathbb{C}$ mit $|u|$ hinreichend klein. Damit folgt die Behauptung. \square

Bisher haben wir lediglich die Standard-Langlands- L -Funktion $L(\pi, s) = L(\pi, r_{\text{std}}, s)$ betrachtet. Wir zeigen nun, dass analoge Aussagen auch für alle L -Funktionen $L(\pi, r, s)$ gelten, sofern r eine endlichdimensionale, algebraische Darstellung ist.

3.2.3 Satz.

Sei r eine endlichdimensionale, algebraische Darstellung von $\text{SL}_n(\mathbb{C})$. Dann gibt es ein Polynom ϕ_r in n Variablen, sodass für jede irreduzible, unverzweigte Darstellung π gilt

$$L(\pi, r, s)^{-1} = \phi_r(A_{1,\pi}, \dots, A_{n-1,\pi}, u).$$

Hierbei ist $u = q^{-s}$.

Insbesondere erhalten wir: Ist Γ ein torsionsfreies, kokompaktes, uniformes Gitter in G und X der Quotient $\Gamma \backslash \mathfrak{X}$, so gilt

$$L(R^{\text{uv}}, r, s)^{-1} = \det(\phi_r(A_{1,X}, \dots, A_{n-1,X}, u)).$$

Beachte, dass die Auswertung von ϕ_r wohldefiniert ist, denn A_1, \dots, A_{n-1} kommutieren.

Für den Beweis benötigen wir eine einfache Proposition (siehe [LSV05, Proposition 2.1]):

3.2.4 Proposition.

Wir bezeichnen mit σ_k das k -te elementarsymmetrische Polynom in n Variablen

$$\sigma_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} \cdot \dots \cdot x_{i_k}.$$

Sei π eine irreduzible, unverzweigte Hauptseriendarstellung mit Satake-Parametern $|\varpi|^{\lambda_1}, \dots, |\varpi|^{\lambda_n}$. Dann operiert der Operator A_k auf V_π^K als Skalar

$$A_{k,\pi} = q^{\frac{n-k}{2} \cdot k} \cdot \sigma_k(q^{-\lambda_1}, \dots, q^{-\lambda_n}).$$

Beweis des Satzes: Seien $|\varpi|^{\lambda_1}, \dots, |\varpi|^{\lambda_n}$ die Satake-Parameter von π . $L(\pi, r, s)$ ist definiert als

$$L(\pi, r, s)^{-1} = \det(1 - r(c(\pi))u),$$

wobei $c(\pi) = \text{diag}(q^{-\lambda_1}, \dots, q^{-\lambda_n})$. Nach [FH91, Kapitel 15] ist die Darstellung r durch Polynome gegeben und damit ist dieser Ausdruck ein symmetrisches Polynom in den Variablen $q^{-\lambda_1}, \dots, q^{-\lambda_n}$ (über dem Ring $\mathbb{C}[u]$). Nach dem Hauptsatz über symmetrische Polynome und der Proposition gibt es ein Polynom ϕ_r , sodass

$$L(\pi, r, s)^{-1} = \det(1 - r(c(\pi))u) = \phi_r(A_{1,\pi}, \dots, A_{n-1,\pi}, u).$$

Beachte hierbei, dass es keinen Operator gibt, der zum n -ten elementarsymmetrischen Polynom in n Variablen korrespondiert. Dieses ist jedoch wegen $q^{-\lambda_1 - \dots - \lambda_n} = 1$ trivial. \square

3.2.5 Beispiel.

Sei $\wedge^2: \mathrm{SL}_3(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{SL}(\mathbb{C}^3 \wedge \mathbb{C}^3)$ die Darstellung auf das Hutprodukt und seien $|\varpi|^{\lambda_1}, |\varpi|^{\lambda_2}, |\varpi|^{\lambda_3}$ die Satake-Parameter der irreduziblen, unverzweigten Darstellung π . Dann gilt mit $u = q^{-s}$ (siehe Beispiel 2.8.2)

$$L(\pi, \wedge^2, s)^{-1} = \prod_{i < j} (1 - q^{-\lambda_i - \lambda_j} u).$$

Wegen $q^{-\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3} = 1$ folgt

$$L(\pi, \wedge^2, s)^{-1} = 1 - (q^{-\lambda_1 - \lambda_2} + q^{-\lambda_1 - \lambda_3} + q^{-\lambda_2 - \lambda_3})u + (q^{-\lambda_1} + q^{-\lambda_2} + q^{-\lambda_3})u^2 - u^3.$$

Dies ist der Skalar, mit dem der Operator $1 - q^{-1}uA_2 + q^{-1}u^2A_1 - u^3$ auf V_π^K operiert. Wir erhalten

$$L(R^{\mathrm{uv}}, \wedge^2, s - 1)^{-1} = \det(1 - uA_{X,2} + qu^2A_{X,1} - q^3u^3).$$

[LSV05, S. 279] besagt, dass $(A_{X,2})^t = A_{X,1}$. Damit folgt die Gleichheit der L -Funktionen

$$\begin{aligned} L(R^{\mathrm{uv}}, \wedge^2, s - 1)^{-1} &= \det(1 - uA_{X,2} + qu^2A_{X,1} - q^3u^3) \\ &= \det(1 - uA_{X,1} + qu^2A_{X,2} - q^3u^3) \\ &= L(R^{\mathrm{uv}}, r_{\mathrm{std}}, s - 1)^{-1}. \end{aligned}$$

Dieses einfache Beispiel motiviert den folgenden Satz, der sich aus der Symmetrie $(A_{X,i})^t = A_{X,n-i}$ ergibt:

3.2.6 Satz.

Sei r eine endlichdimensionale, algebraische Darstellung von $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ und r^* die duale Darstellung zu r . Dann gilt

$$L(R^{\mathrm{uv}}, r, s) = L(R^{\mathrm{uv}}, r^*, s).$$

Beweis: Sei π eine irreduzible, unitäre, unverzweigte Darstellung mit zugehörigen Satake-Parametern $|\varpi|^{\lambda_1}, \dots, |\varpi|^{\lambda_n}$. Nach dem vorigen Satz gibt es ein Polynom ϕ_r , sodass

$$L(\pi, r, s)^{-1} = \phi_r(A_{1,\pi}, \dots, A_{n-1,\pi}, u).$$

Sei $\tilde{\pi}$ die kontragrediente Darstellung zu π , d. h. die irreduzible, unverzweigte Darstellung mit Satake-Parametern $|\varpi|^{-\lambda_1}, \dots, |\varpi|^{-\lambda_n}$ (siehe [Car79, Theorem 3.2]). Dann gilt

$$L(\tilde{\pi}, r, s)^{-1} = \phi_r(A_{1,\tilde{\pi}}, \dots, A_{n-1,\tilde{\pi}}, u).$$

Wegen Proposition 3.2.4 und $q^{-\lambda_1} \dots q^{-\lambda_n} = 1$ gilt $A_{i,\pi} = A_{n-i,\tilde{\pi}}$ und damit

$$L(\tilde{\pi}, r, s)^{-1} = \phi_r(A_{n-1,\pi}, \dots, A_{1,\pi}, u).$$

Nach Definition gilt

$$\det(1 - r^*(c(\pi))u) = \det(1 - r((c(\pi)^t)^{-1})u) = \det(1 - r(c(\pi)^{-1})u),$$

d. h. $L(\pi, r^*, s) = L(\tilde{\pi}, r, s)$. Es folgt

$$L(R^{\text{uv}}, r^*, s)^{-1} = \det(\phi_r(A_{n-1,X}, \dots, A_{1,X}, u)).$$

Wegen $(A_{i,X})^t = A_{n-i,X}$ (siehe [LSV05, p. 279]) und da ϕ_r ein Polynom ist, erhalten wir

$$L(R^{\text{uv}}, r^*, s)^{-1} = \det(\phi_r(A_{1,X}, \dots, A_{n-1,X}, u)) = L(R^{\text{uv}}, r, s)^{-1}. \quad \square$$

3.2.7 Beispiel.

Es gilt $L(R^{\text{uv}}, \wedge^k, u) = L(R^{\text{uv}}, \wedge^{n-k}, u)$ für $k = 1, \dots, n-1$.

4 Zetafunktionen in höherem Rang

Sei F ein nicht-archimedischer, lokaler Körper, \mathfrak{X} das Bruhat-Tits-Gebäude der Gruppe $G = \mathrm{PGL}_n(F)$ und Γ ein uniformes, kokompaktes, torsionsfreies Gitter in G . Es gibt mehrere Ansätze, wie man dem Quotienten $\Gamma \backslash \mathfrak{X}$ eine Zetafunktion zuordnen kann. In [DKM20] werden zwei Möglichkeiten aufgezeigt, wie man in einem allgemeineren Setting eine multivariate Zetafunktion definieren kann.

In 4.1 führen wir die Zetafunktion $S(u)$ aus [DKM20] im Fall der $\mathrm{PGL}_n(F)$ ein. Ausgehend davon definieren wir für eine irreduzible, zulässige Darstellung π eine Zetafunktion $S_\pi(u)$ und zeigen, dass man $S(u)$ durch geeignete $S_\pi(u)$ ausdrücken kann. In 4.2 bestimmen wir S_π in Abhängigkeit von den Satake-Parametern von π . In 4.3 betrachten wir den Fall $n = 2$ und zeigen, dass ein enger Zusammenhang zur Graph-Zetafunktion von $X = \Gamma \backslash \mathfrak{X}$ besteht:

$$S(u) = u \cdot \frac{\zeta'}{\zeta}(X, u).$$

Ferner zeigen wir, dass die Zetafunktionen $S_\pi(u)$ mit den entsprechenden Langlands- L -Funktionen eng zusammenhängen und folgern, dass die Graph-Zetafunktion bereits bis auf einen trivialen Faktor die Langlands- L -Funktion der Rechtsdarstellung ist. In 4.4 bestimmen wir S_π für alle zulässigen, unitären Darstellungen von $\mathrm{PGL}_3(F)$.

In 4.5 verfolgen wir den geometrischen Ansatz aus [DKM20] und verallgemeinern den Translationsoperator T aus 2.1. Wir erhalten für irreduzible, unverzweigte Hauptseriendarstellungen einen Zusammenhang mit gewissen Langlands- L -Funktionen:

$$\det(1 - uT_{k,\pi})^{-1} = L(\pi, \wedge^k, q^{\frac{k(n-k)}{2}-s})^{k!(n-k)!}, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad u = q^{-s}.$$

Notation: F sei ein nicht-archimedischer, lokaler Körper und \mathcal{O} , \mathfrak{m} und ϖ wie in 2.2.1. Weiter bezeichne G die Gruppe $\mathrm{PGL}_n(F)$ und K die maximal kompakte Untergruppe $\mathrm{PGL}_n(\mathcal{O})$. Ferner sei Γ ein torsionsfreies, kokompaktes, uniformes Gitter in G . Wir normalisieren das Haar-Maß auf G so, dass die Iwahori-Gruppe I das Maß 1 erhält.

4.1 Eine Zetafunktion

Wir fassen hier die Notation und für uns wesentlichen Definitionen und Ergebnisse aus [DKM20] zusammen. Hierbei beschränken wir uns auf den Fall des Bruhat-Tits-Gebäudes \mathfrak{X} der Gruppe $\mathrm{PGL}_n(F)$.

Sei \mathcal{C} eine Kammer im sphärischen Gebäude bei ∞ (siehe [AB08, 11.8]). Dann gibt es ein Apartment \mathfrak{a} , sodass $\mathcal{C} \subset \partial \mathfrak{a}$ gilt. Damit gibt es eine eindeutig bestimmte Kammer $\bar{\mathcal{C}} \subset \partial \mathfrak{a}$, die \mathcal{C} entgegengesetzt ist. Sei P bzw. \bar{P} die Stabilisatorgruppe von \mathcal{C} bzw. $\bar{\mathcal{C}}$ in G . Wir setzen $L = P \cap \bar{P}$. L stabilisiert \mathfrak{a} und operiert auf \mathfrak{a} durch

Translationen. Sei M die punktweise Stabilisatorgruppe von \mathfrak{a} . Dann ist M eine normale Untergruppe von L und die Gruppe $A(\mathfrak{a}) = L/M$ ist isomorph zu \mathbb{Z}^{n-1} .

Wir fixieren eine sphärische Kammer \mathcal{C} und ein entsprechendes Apartment \mathfrak{a} . Weiter sei C eine beliebige Kammer in \mathfrak{a} , sodass eine Wand von C zu \mathcal{C} korrespondiert, und I die punktweise Stabilisatorgruppe von C in G . Wir definieren A^- als diejenige Halbgruppe, die aus allen $a \in A(\mathfrak{a})$ besteht, die von \mathcal{C} weg in Richtung $\bar{\mathcal{C}}$ translatieren.

Sei (π, V_π) eine zulässige Darstellung von G . Wir definieren π_I auf A^- als das Bochner-Integral

$$\pi_I(a) = \pi(\mathbf{1}_{IaI}) = \int_G \mathbf{1}_{IaI}(x) \pi(x) dx.$$

Dann definiert $\pi_I(a)$ eine endlichdimensionale Darstellung der Halbgruppe A^- auf dem Raum V_π^I . Für eine messbare Menge Teilmenge M von G schreiben wir

$$[\gamma : M] = \text{vol}(\{x \in G/G_\gamma : x\gamma x^{-1} \in M\}).$$

Wir bezeichnen mit $\mathcal{E}(\Gamma)$ die Menge aller Konjugationsklassen $[\gamma]$ in Γ , sodass γ in G zu einem Element aus IA^-I konjugiert ist. Ferner bezeichnen wir mit $G^\mathfrak{a}$ bzw. $\Gamma^\mathfrak{a}$ die jeweilige Untergruppe von G bzw. Γ , die auf dem Apartment \mathfrak{a} als Translation operieren.

Dann gilt:

4.1.1 Satz ([DKM20, Theorem 2.3.8]).

Sei das Haar-Maß auf G so normalisiert, dass I Maß 1 erhält. Weiter sei für jedes $\gamma \in \Gamma$ das Haar-Maß auf G_γ so normalisiert, dass $I \cap G_\gamma$ Maß 1 erhält. Dann gilt

$$\text{tr } R_I(a) = \sum_{[\gamma]} |G_\gamma^\mathfrak{a}/\Gamma_\gamma^\mathfrak{a}| [\gamma : IaI],$$

wobei \mathfrak{a} jeweils das Apartment bezeichnet, auf dem a als minimale Verschiebung operiert (siehe [DKM20, 2.2.2]), und sich die Summe über alle Konjugationsklassen in Γ erstreckt. Ferner ist $[\gamma : IaI]$ für jedes $a \in A^-$ eine ganze Zahl.

Sei x_0 diejenige Ecke von C , die \mathcal{C} entgegengesetzt ist (diese existiert nach Wahl von C). Wir wählen x_0 als Ursprung und geben \mathfrak{a} damit die Struktur eines reellen Vektorraumes. Dann definieren die anderen Ecken x_1, \dots, x_n von C eine Basis v_1, \dots, v_{n-1} von \mathfrak{a} . Zu jedem $a \in A^-$ kann man den zugehörigen Translationsvektor v_a als Linearkombination der Basis schreiben

$$v_a = \xi_1 v_1 + \dots + \xi_{n-1} v_{n-1},$$

wobei $\xi_i \in \mathbb{N}$. Für $a \in A^-$ und $u \in \mathbb{C}^{n-1}$ definieren wir dann

$$u^{\xi(a)} = u_1^{\xi_1} \cdot \dots \cdot u_{n-1}^{\xi_{n-1}}.$$

Ferner setzen wir für $x \in IaI$

$$u^{\xi(\gamma)} = u^{\xi(a)}.$$

Dies ist nach Lemma 2.3.9 in [DKM20] wohldefiniert. Damit kann man nun eine Zetafunktion in $n - 1$ Variablen u_1, \dots, u_{n-1} definieren.

4.1.2 Definition ([DKM20, 2.4]).

Wir definieren

$$S(u) = \sum_{[\gamma] \in \mathcal{E}(\Gamma)} |G_\gamma^\alpha / \Gamma_\gamma^\alpha| [\gamma : IA^{-1}I] u^{\xi(\gamma)}.$$

Dann gibt es ein $c > 0$, sodass die Funktion $S(u)$ auf der Menge

$$\{u \in \mathbb{C}^{n-1} : \|u\|_\infty < c\}$$

lokal gleichmäßig konvergiert und dort eine rationale Funktion darstellt (siehe Theorem 2.4.3 in [DKM20]).

Die Funktion $S(u)$ können wir mit Satz 4.1.1 auch als Summe von Spuren der Operatoren $R_I(a)$ schreiben. Sei $R = \bigoplus_{\pi} N(\pi)\pi$ die Zerlegung der Rechtsdarstellung auf $L^2(\Gamma \backslash G)$ in irreduzible Unterdarstellungen. Wir definieren für eine zulässige Darstellung π

$$S_\pi(u) = \sum_{a \in A^-} \text{tr } \pi_I(a) u^{\xi(a)}.$$

Dann können wir $S(u)$ auch als Summe der S_π ausdrücken.

4.1.3 Lemma.

Es gilt

$$S(u) = \sum_{\pi} N(\pi) \cdot S_\pi(u).$$

In der Summe sind hierbei nur endlich viele Summanden nichttrivial.

Beweis: Die erste Aussage folgt aus Satz 4.1.1. $L^2(\Gamma \backslash G)^I$ ist endlichdimensional, denn Γ ist kokompakt. Es gibt damit nur endlich viele π mit $V_\pi^I \neq 0$ und nur diese Darstellung können einen nichttrivialen Summanden liefern. \square

4.2 S_π für unverzweigte Hauptseriendarstellungen

In diesem Abschnitt betrachten wir S_π für unverzweigte Hauptseriendarstellungen und drücken S_π durch die Satake-Parameter von π aus.

Sei \mathfrak{a}_0 das Apartment aus 2.4, d. h. \mathfrak{a}_0 enthält die Ecken

$$\text{diag}(\varpi^{e_1}, \dots, \varpi^{e_n})K$$

mit $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{Z}$. Wir wählen die Kammer C , sodass sie die n paarweise benachbarten Ecken

$$\{\text{diag}(\varpi^{e_1}, \dots, \varpi^{e_n})K : e_i \in \{0, 1\}, e_i \leq e_{i+1} \forall i\}$$

enthält (siehe 2.4.1).

4.2.1 Lemma.

Die punktweise Stabilisatorgruppe der Kammer C ist die Iwahori-Untergruppe

$$I = \left\{ \left[a_{ij} \right]_{ij} : \left(a_{ij} \right)_{ij} \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}), a_{ij} \in \mathfrak{m} \ \forall i > j \right\}.$$

Beweis: Sei $g \in G$ gegeben durch einen ganzen Vertreter. Dann fixiert g genau dann die Ecke \mathfrak{o} , wenn $g \in K$. Sei $m \in \{0, \dots, n-1\}$ und

$$x_m = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_m, \underbrace{\varpi, \dots, \varpi}_{n-m}).$$

Dann gilt $gx_mK = x_mK$ genau dann, wenn $x_m^{-1}gx_m \in K$. Das Element $x_m^{-1}gx_m$ entsteht hierbei aus g durch Multiplikation der letzten m Spalten mit ϖ und der letzten m Zeilen mit ϖ^{-1} . Damit fixiert $g \in K$ genau dann x_mK , wenn g_{ij} für alle $n-m \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq m$ in \mathfrak{m} enthalten ist.

Insgesamt erhalten wir, dass g genau dann die Kammer C punktweise stabilisiert, wenn $x \in I$. \square

4.2.2 Lemma.

Es gilt

$$A^- = \left\{ \mathrm{diag}(\varpi^{a_1}, \varpi^{a_1+a_2}, \dots, \varpi^{a_1+\dots+a_n}), a_1 \in \mathbb{N}_0, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Beweis: Sei A die Gruppe der Diagonalmatrizen in G . Die Gruppe der Translationen $A(\mathfrak{a}_0)$ auf \mathfrak{a}_0 ist gegeben durch A (siehe Proposition 2.4.3). Hierbei operieren genau die Elemente aus $A \cap K$ trivial, d. h.

$$A(\mathfrak{a}_0) = \left\{ \mathrm{diag}(\varpi^{e_1}, \dots, \varpi^{e_n}), e_1, \dots, e_n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ein Element von $A(\mathfrak{a}_0)$ verschiebt genau dann in Richtung \bar{C} , wenn $e_1 < \dots < e_n$. \square

Viele der folgenden Resultate gelten nicht nur für $a \in A^-$, sondern für eine Halbgruppe, die A^- enthält. Wir definieren

$$A^{\leq 0} = \left\{ \mathrm{diag}(\varpi^{a_1}, \varpi^{a_1+a_2}, \dots, \varpi^{a_1+\dots+a_n}) : a_i \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

und werden im Folgenden immer ohne Einschränkung annehmen, dass $a_1 = 0$ gilt.

4.2.3 Lemma.

Sei $a = \mathrm{diag}(\varpi^{a_1}, \varpi^{a_1+a_2}, \dots, \varpi^{a_1+\dots+a_n}) \in A^{\leq 0}$ mit $a_1 = 0$.

Dann ist IaI eine disjunkte Vereinigung von $q^{\sum_k (n+1-k)(k-1)a_k}$ verschiedenen Linksnebenklassen.

Genauer gilt: Sei V_{ij} für $i > j$ ein Vertretersystem für $\mathfrak{m}/\varpi^{a_{j+1}+\dots+a_i}\mathfrak{m}$ und

$$M(a) = \left\{ \left[x_{ij} \right]_{ij} : x_{ii} = 1, x_{ij} = 0 \ \forall i < j, x_{ij} \in V_{ij} \ \forall i > j \right\}.$$

Dann ist

$$IaI = \bigsqcup_{m \in M(a)} maI.$$

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass jede Nebenklasse einen solchen Vertreter hat. Sei $x = [x_{ij}]_{ij} \in I$. Dann gibt es nach der Iwahori-Zerlegung [Gar97, 18.6] Matrizen $x_l, x_u \in I$ mit $x_l x_u = x$, wobei x_l eine untere Dreiecksmatrix mit trivialer Diagonale und x_u eine obere Dreiecksmatrix ist. Wie man leicht sieht, gilt $x_u a \in aI$ und damit $x a I = x_l a I$. Wir können also ohne Einschränkung annehmen, dass x eine untere Dreiecksmatrix mit trivialer Diagonale ist:

$$x a I = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ x_{21} & 1 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & & 1 \end{bmatrix} a I = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ x_{21} & \varpi^{a_2} & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ x_{n1} & \varpi^{a_2} x_{n2} & \cdots & & \varpi^{a_2 + \dots + a_n} \end{bmatrix} I.$$

Durch die Wirkung von I können wir annehmen, dass für alle $i > j$ auch $\varpi^{a_2 + \dots + a_j} x_{ij}$ in $\mathfrak{m}/\varpi^{1+a_2+\dots+a_i}\mathcal{O}$ liegt.

Zur Eindeutigkeit: Seien $x = [x_{ij}]_{ij}, y = [y_{ij}]_{ij} \in M$ mit $x a I = y a I$. Dann folgt $a^{-1} y^{-1} x a \in I$. Wir betrachten die Elemente auf der ersten Nebendiagonalen von $a^{-1} y^{-1} x a$ und erhalten

$$(a^{-1} y^{-1} x a)_{k+1,k} = \frac{x_{k+1,k} - y_{k+1,k}}{\varpi^{a_{k+1}}}$$

für $k = 1, \dots, n-1$. Dann folgt $x_{k+1,k} \varpi^{1+a_{k+1}} \mathcal{O} = y_{k+1,k} \varpi^{1+a_{k+1}} \mathcal{O}$ und damit $x_{k+1,k} = y_{k+1,k}$. Setzen wir dies ein und betrachten die Elemente auf der zweiten Nebendiagonale, dann erhalten wir

$$(y^{-1} x)_{k+2,k} = \frac{x_{k+2,k} - y_{k+2,k}}{\varpi^{a_{k+1} + a_{k+2}}}.$$

Wie oben folgt $x_{k+2,k} = y_{k+2,k}$ für $k = 1, \dots, n-2$. Induktiv erhält man so die Eindeutigkeit.

Wir müssen noch zeigen, dass $M(a)$ genau $q^{\sum_i (n+1-i)(i-1)a_i}$ viele Elemente enthält. Aus $|\mathfrak{m}/\varpi^k \mathfrak{m}| = q^k$ folgt

$$|M(a)| = \prod_{i>j} q^{a_{j+1} + \dots + a_i} = q^{m_k a_k},$$

wobei

$$\begin{aligned} m_k &= \left| \{(i, j) : i, j \in \{1, \dots, n\}, j < k \leq i\} \right| \\ &= \left| \{i : i \in \{1, \dots, n\}, k \leq i\} \right| \cdot \left| \{j : j \in \{1, \dots, n\}, j < k\} \right| \\ &= (n - k + 1)(k - 1). \end{aligned} \quad \square$$

Mit Lemma 4.2.3 können wir S_π für eindimensionale unverzweigte Darstellungen bestimmen. Für alle anderen Darstellungen benötigen wir genauere Kenntnis des Raumes V_π^I .

4.2.4 Proposition (S_π für eindimensionale Darstellungen).

Sei π eine eindimensionale, unverzweigte Darstellung von G . Dann gibt es einen unverzweigten Charakter χ mit $\chi^n = 1$, sodass $\pi = \chi \circ \det$. Dann gilt

$$S_\pi(u_1, \dots, u_{n-1}) = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{q^{(n-k)k} \chi(\varpi)^{n-k} u_k}{1 - q^{(n-k)k} \chi(\varpi)^{n-k} u_k}.$$

Beweis: Die erste Aussage folgt aus [PR08, 3.6]. Sei $f \in V_\pi^I$ mit $f \neq 0$. Da π unverzweigt und eindimensional ist, gilt $V_\pi = V_\pi^I$. Sei

$$a = \text{diag}(1, \varpi^{a_2}, \dots, \varpi^{a_2 + \dots + a_n}) \in A^-.$$

Dann folgt wegen $\dim(V_\pi^I) = 1$

$$\pi_I(a)f = \text{tr}(\pi_I(a))f.$$

Wir berechnen mit Lemma 4.2.3

$$\begin{aligned} \pi_I(a)f &= \int_G \mathbf{1}_{IaI}(x) \pi(x) \cdot f \\ &= \sum_{xI \in IaI} \chi(\det(x)) \cdot f \\ &= |IaI/I| \cdot \chi(\det(a)) \cdot f \\ &= q^{\sum_k (n+1-k)(k-1)a_k} \chi(\varpi)^{\sum_k a_k(n+1-k)} \cdot f, \end{aligned}$$

d. h. $\text{tr}(\pi_I(a)) = q^{\sum_k (n+1-k)(k-1)a_k} \chi(\varpi)^{\sum_k a_k(n+1-k)}$. Also

$$\begin{aligned} S_\pi(u_1, \dots, u_{n-1}) &= \sum_{a_2, \dots, a_n=1}^{\infty} q^{\sum_k (n+1-k)(k-1)a_k} \chi(\varpi)^{\sum_k a_k(n+1-k)} u_1^{a_2} \cdot \dots \cdot u_{n-1}^{a_n} \\ &= \prod_{k=2}^n \sum_{a_k=1}^{\infty} q^{(n+1-k)(k-1)a_k} \chi(\varpi)^{a_k(n+1-k)} u_{k-1}^{a_k} \\ &= \prod_{k=2}^n \frac{q^{(n+1-k)(k-1)} \chi(\varpi)^{n+1-k} u_{k-1}}{1 - q^{(n+1-k)(k-1)} \chi(\varpi)^{n+1-k} u_{k-1}} \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} \frac{q^{(n-k)k} \chi(\varpi)^{n-k} u_k}{1 - q^{(n-k)k} \chi(\varpi)^{n-k} u_k}. \quad \square \end{aligned}$$

V_π^I für unverzweigte Hauptseriendarstellungen

In diesem Abschnitt bestimmen wir eine Basis für den Raum V_π^I , wobei π eine unverzweigte Hauptseriendarstellung ist. Da jede irreduzible Darstellung π mit $V_\pi^I \neq 0$ eine Unterdarstellung einer unverzweigten Hauptseriendarstellung ist, können wir später den allgemeinen Fall hierauf zurückführen (siehe 4.3 und 4.4).

Wir definieren auf V_π^I das folgende Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_K f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Beachte, dass dies auch für nicht unitäre Hauptseriendarstellungen π ein Skalarprodukt ist, denn die Einschränkung von π auf K ist unitär (vgl. [Dei13, 7.1.3]). Wir betten die symmetrische Gruppe S_n durch die Abbildung

$$\sigma \mapsto \left[\delta_{\sigma(i),j} \right]_{i,j}$$

in G ein. Hierbei bezeichnet δ das Kronecker-Delta, d. h. $\delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = y, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

4.2.5 Definition.

Sei ANK die Iwasawa-Zerlegung von G aus 2.2.7. Dann definieren wir für $\sigma \in S_n$

$$K_\sigma = (AN \cap K)\sigma I$$

und

$$G_\sigma = AN\sigma I.$$

Sei $a = \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \in A$ und seien $|\varpi|^{\lambda_1}, \dots, |\varpi|^{\lambda_n}$ die Satake-Parameter der Darstellung π . Wir definieren

$$a^\lambda = \prod_{i=1}^n |a_i|^{\lambda_i}.$$

Außerdem schreiben wir $a^{\lambda+\varrho}$ für $a^\lambda \cdot a^\varrho$, wobei ϱ der Quasicharakter aus 2.7.1 ist.

4.2.6 Satz.

Für $\sigma \in S_n$ ist die Funktion

$$f_\sigma: G \rightarrow \mathbb{C}, \quad ank \mapsto a^{\lambda+\varrho} \mathbf{1}_{K_\sigma}(k),$$

wohldefiniert. Eine Orthogonalbasis für V_π^I ist gegeben durch f_σ , $\sigma \in S_n$ und es gilt

$$\|f_\sigma\|^2 = \text{vol}(K_\sigma).$$

4.2.7 Bemerkung.

Aufgrund des Transformationsverhaltens von V_π und der Iwasawa-Zerlegung könnte man erwarten, dass es für jede der Nebenklassen $v_i I$ von K/I eine Basisfunktion f_i der Bauart $ank \mapsto a^{\lambda+\varrho} \mathbf{1}_{v_i I}(k)$ gibt. Diese Funktionen sind jedoch nicht wohldefiniert, denn der K -Anteil der Iwasawa-Zerlegung ist nicht eindeutig bestimmt. So sind zum Beispiel

$$\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

zwei verschiedene Iwasawa-Zerlegungen desselben Elements, wobei der K -Anteil in unterschiedlichen I -Nebenklassen ist.

Statt des Quotienten K/I müssen wir daher $(AN \cap K) \backslash K/I$ betrachten.

Der Beweis der Proposition erfordert einige Vorbereitungen. Zuerst benötigen wir eine stärkere Version der Iwasawa-Zerlegung.

4.2.8 Definition.

Sei X eine $n \times n$ -Matrix und $S, T \subseteq \{1, \dots, n\}$. Dann bezeichnen wir mit $X_{S,T}$ diejenige Untermatrix von x , die nur aus den Zeilen aus S und Spalten aus T besteht. Statt $X_{\{i\},\{j\}}$ schreiben wir auch x_{ij} .

4.2.9 Beispiel.

Ist

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix},$$

dann gilt

$$X_{\{1,4\},\{2,4\}} = \begin{pmatrix} x_{12} & x_{14} \\ x_{42} & x_{44} \end{pmatrix}.$$

4.2.10 Proposition (Starke Iwasawa-Zerlegung).

1. Es gilt $G = \bigsqcup_{\sigma \in S_n} AN\sigma I$.
2. Sei $x = au\sigma k$, wobei $a = \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \in A$ mit $a_i \in F^\times$, $u \in N$, $\sigma \in S_n$ und $k \in I$. Dann gilt für alle $l, m \in \{1, \dots, n\}$

$$\frac{\det(x_{\{m, \dots, n\}, \{l, \sigma(m+1), \dots, \sigma(n)\}})}{a_m \cdot \dots \cdot a_n} \in \begin{cases} \mathfrak{m} & \text{falls } l < \sigma(m), \\ \mathcal{O}^\times & \text{falls } l = \sigma(m), \\ \mathcal{O} & \text{falls } l > \sigma(m). \end{cases}$$

Wir setzen hierbei die Determinante 0, falls die Matrix nicht quadratisch ist, d. h. falls $l \in \{\sigma(m+1), \dots, \sigma(n)\}$.

3. Seien $a, a' \in A$, $n, n' \in N$, $\sigma, \sigma' \in S_n$ und $k, k' \in I$ mit $an\sigma k = a'n'\sigma'k'$. Dann folgt $a(A \cap K) = a'(A \cap K)$.

Beweis: Die erste Aussage folgt aus [Car79, S. 140].

Die dritte Aussage folgt aus der zweiten wie folgt: Wähle $m = n$, dann gilt für jedes $l \in \{1, \dots, n\}$

$$\frac{x_{n,l}}{a_n} \in \begin{cases} \mathcal{O}^\times & \text{falls } l = \sigma(n), \\ \mathcal{O} & \text{falls } l > \sigma(n), \\ \mathfrak{m} & \text{falls } l < \sigma(n). \end{cases}$$

Dies legt $\nu(a_n)$ eindeutig fest. Wählt man nun $m = n-1$, dann gilt für $l \in \{1, \dots, n\} \setminus \{\sigma(n)\}$

$$\frac{\det(x_{\{n-1, n\}, \{l, \sigma(n)\}})}{a_{n-1}a_n} \in \begin{cases} \mathcal{O}^\times & \text{falls } l = \sigma(n-1), \\ \mathcal{O} & \text{falls } l > \sigma(n-1), \\ \mathfrak{m} & \text{falls } l < \sigma(n-1). \end{cases}$$

Dies legt nun zusammen mit dem Vorigen $\nu(a_{n-1})$ eindeutig fest. Induktiv erhält man, dass $\nu(a_m)$ für alle m eindeutig festgelegt ist.

Wir zeigen nun die zweite Aussage. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $l \in \{1, \dots, n\} \setminus \{\sigma(m+1), \dots, \sigma(n)\}$, denn sonst ist die resultierende Matrix nicht quadratisch und die Aussage trivial.

Es gilt

$$x_{\{m, \dots, n\}, \{l, \sigma(m+1), \dots, \sigma(n)\}} = (au)_{\{m, \dots, n\}, \{m, \dots, n\}} \cdot (\sigma k)_{\{m, \dots, n\}, \{l, \sigma(m+1), \dots, \sigma(n)\}},$$

denn au ist eine obere Dreiecksmatrix. Weiter erhalten wir

$$\begin{aligned} \det(x_{\{m, \dots, n\}, \{l, \sigma(m+1), \dots, \sigma(n)\}}) &= a_m \cdot \dots \cdot a_n \cdot \det((\sigma k)_{\{m, \dots, n\}, \{l, \sigma(m+1), \dots, \sigma(n)\}}) \\ &= a_m \cdot \dots \cdot a_n \cdot \det(k_{\{\sigma(m), \dots, \sigma(n)\}, \{l, \sigma(m+1), \dots, \sigma(n)\}}). \end{aligned}$$

Wir wählen einen ganzen Vertreter für k , d. h. wir nehmen an, dass $k \in \text{GL}_n(\mathcal{O})$ und betrachten dann die Teilmatrix $k_{\{\sigma(m), \dots, \sigma(n)\}, \{l, \sigma(m+1), \dots, \sigma(n)\}}$ über dem Körper \mathcal{O}/\mathfrak{m} . Mit Laplace-Entwicklung erhält man, dass

$$\det(k_{\{\sigma(m), \dots, \sigma(n)\}, \{l, \sigma(m+1), \dots, \sigma(n)\}}) \in \begin{cases} \mathfrak{m} & \text{falls } l < \sigma(m), \\ \mathcal{O}^\times & \text{falls } l = \sigma(m), \\ \mathcal{O} & \text{falls } l > \sigma(m). \end{cases}$$

□

4.2.11 Korollar.

Es gilt

$$K = \bigsqcup_{\sigma \in S_n} K_\sigma.$$

Beweis: Sei $x \in K$. Nach dem Satz gibt es $a \in A, u \in N, \sigma \in S_n$ und $k \in I$ mit

$$x = au\sigma k.$$

Insbesondere gilt $au = xk^{-1}\sigma^{-1} \in K$, d. h. $au \in AN \cap K$. Damit folgt nun $x \in (AN \cap K)\sigma I = K_\sigma$. Da σ eindeutig bestimmt ist, folgt die Behauptung. □

Beweis von Satz 4.2.6:

1. Die Funktionen sind wegen der starken Iwasawa-Zerlegung (Satz 4.2.10) wohldefiniert.

2. Wir müssen nun zeigen, dass die Funktionen den Raum V_π^I erzeugen. Sei hierzu $f \in V_\pi^I$ und $x \in G$ mit Iwasawa-Zerlegung $x = ank$. Dann gilt einerseits $f(ank) = a^{\lambda+e}f(k)$, andererseits ist f unter I rechtsinvariant. Also ist f durch die Funktionswerte auf K/I eindeutig bestimmt. f ist auch $AN \cap K$ -linksinvariant, d. h. f ist eindeutig durch die Funktionswerte auf $AN \cap K \backslash K/I$ bestimmt und kann wegen Korollar 4.2.11 als Linearkombination der Funktionen geschrieben werden.

3. Seien $\sigma, \tau \in S_n$ und $\sigma \neq \tau$. Dann sind f_σ und f_τ orthogonal, denn

$$\langle f_\sigma, f_\tau \rangle = \int_K f_\sigma(k) \overline{f_\tau(k)} dk = \int_K \mathbf{1}_{K_\sigma}(k) \mathbf{1}_{K_\tau}(k) dk = 0.$$

Insbesondere sind f_σ und f_τ auch linear unabhängig, bilden also mit 2. eine Orthogonalbasis.

Ebenso erhält man $\|f_\sigma\|^2 = \langle f_\sigma, f_\sigma \rangle = \text{vol}(K_\sigma)$. □

S_π für unverzweigte Hauptseriendarstellungen

Das Hauptresultat für diesen Abschnitt ist der folgende Satz.

4.2.12 Satz.

Sei π eine unverzweigte Hauptseriendarstellung von G mit den Satake-Parametern $|\varpi|^{\lambda_1}, \dots, |\varpi|^{\lambda_n}$, wobei $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$.

Dann gilt

$$S_\pi(u_1, \dots, u_{n-1}) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{q^{\frac{i(n-i)}{2} - \lambda_{\sigma(1)} - \dots - \lambda_{\sigma(i)}} u_i}{1 - q^{\frac{i(n-i)}{2} - \lambda_{\sigma(1)} - \dots - \lambda_{\sigma(i)}} u_i}.$$

Für den Beweis benötigen wir die folgende Proposition:

4.2.13 Proposition.

Sei ϱ der Quasicharakter aus 2.7.1. Dann gilt für $a \in A^{\leq 0}$

$$\langle \pi_I(a) f_\sigma, f_\sigma \rangle = \|f_\sigma\|^2 a^\varrho (\sigma a \sigma^{-1})^\lambda.$$

Der Beweis der Proposition benötigt einige technischen Aussagen.

4.2.14 Lemma.

Sei

$$H = \left\{ [x_{ij}]_{ij} : x_{ii} = 1, x_{ij} = 0 \ \forall i > j, x_{ij} \in \mathcal{O}/\mathfrak{m} \ \forall i < j \right\}$$

und

$$H^{\text{opp}} = \left\{ [x_{ij}]_{ij} : x_{ii} = 1, x_{ij} = 0 \ \forall i < j, x_{ij} \in \mathcal{O}/\mathfrak{m} \ \forall i > j \right\}.$$

Für $\sigma \in S_n$ ist

$$\{x\sigma : x \in H, \sigma^{-1}x\sigma \in H^{\text{opp}}\}$$

ein Vertretersystem für K_σ/I .

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass jede Nebenklasse einen solchen Vertreter hat. Sei $x \in AN \cap K$. Es gilt $AN \cap K = (N \cap K)(A \cap K)$ und $(A \cap K)\sigma I = \sigma I$, d. h. wir können annehmen, dass $x \in N \cap K$. Wir definieren $z = x\sigma$. Dann gilt

$$z_{i,j} = x_{i,\sigma^{-1}(j)}$$

und daher gilt $z_{i,\sigma(i)} = 1$ für alle i und $z_{i,j} = 0$ für $i > \sigma^{-1}(j)$. Durch die Wirkung von I kann man nun erreichen, dass $z_{i,j} = 0$ für alle $j > \sigma(i)$ und $z_{i,j} \in \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ für alle $j < \sigma(i)$. Somit können wir annehmen, dass $z_{i,j} = 0$, falls $j > \sigma(i)$. Insbesondere gilt $x = z\sigma^{-1} \in H$. Nun gilt für $i < j$

$$(\sigma^{-1}x\sigma)_{i,j} = x_{\sigma^{-1}(i),\sigma^{-1}(j)} = z_{\sigma^{-1}(i),j} = 0,$$

d. h. $\sigma^{-1}x\sigma \in H^{\text{opp}}$.

Wir zeigen nun, dass die Vertreter verschiedene Nebenklassen definieren. Seien daher $x, y \in H$ mit $\sigma^{-1}x\sigma, \sigma^{-1}y\sigma \in H^{\text{opp}}$ und $x\sigma I = y\sigma I$. Dann folgt $\sigma^{-1}y^{-1}x\sigma \in I$. Wegen

$$\sigma^{-1}y^{-1}x\sigma = (\sigma^{-1}y\sigma)^{-1}\sigma^{-1}x\sigma$$

gilt $\sigma^{-1}y^{-1}x\sigma \in H^{\text{opp}}$. Wegen $I \cap H^{\text{opp}} = \{1\}$ folgt $x = y$. \square

4.2.15 Lemma.

Seien $a \in A^{\leq 0}$, $\sigma \in S_n$, H und H^{opp} wie in Lemma 4.2.14 und $x \in H$. Dann liegt σxa genau dann in G_σ , wenn $\sigma x\sigma^{-1} \in H^{\text{opp}}$.

Beweis: Angenommen $\sigma x\sigma^{-1} \in H^{\text{opp}}$. Dann folgt $\sigma x\sigma^{-1} \in AN \cap K$. Betrachte

$$\sigma xa = \sigma x\sigma^{-1}\sigma a\sigma^{-1}\sigma.$$

Der Term $\sigma a\sigma^{-1}$ ist wieder eine Diagonalmatrix, d. h. $\sigma x\sigma^{-1}\sigma a\sigma^{-1} \in AN$. Insbesondere folgt $\sigma xa \in AN\sigma \subset G_\sigma$.

Sei nun umgekehrt $\sigma xa \in G_\sigma$. Wir wenden die starke Iwasawa-Zerlegung 4.2.10 auf $z = \sigma xa$ an und erhalten, dass für alle $l < \sigma(n)$

$$\nu(z_{n,\sigma(n)}) < \nu(z_{n,l})$$

gilt. Aufgrund der Bedingungen die x erfüllt, folgt für alle $l < \sigma(n)$, dass $x_{\sigma(n),l} = 0$. Wir wenden wiederum die starke Iwasawa-Zerlegung an und erhalten, dass für alle $l < \sigma(n-1)$ mit $l \neq \sigma(n)$

$$\nu(\det(z_{\{n-1,n\},\{\sigma(n-1),\sigma(n)\}})) < \nu(\det(z_{\{n-1,n\},\{l,\sigma(n)\}}))$$

gilt. Aufgrund der Bedingungen die x erfüllt, folgt für alle $l < \sigma(n-1)$ mit $l \neq \sigma(n)$, dass $x_{\sigma(n-1),l} = 0$.

Induktiv erhält man, dass $x_{ij} = 0$ gilt, sofern $i > j$ und $\sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j)$. Dies ist äquivalent dazu, dass für alle $i < j$

$$(\sigma x\sigma^{-1})_{ij} = x_{\sigma(i),\sigma(j)} = 0$$

gilt, d. h. $\sigma x\sigma^{-1} \in H^{\text{opp}}$. \square

4.2.16 Korollar.

Seien $x \in H$ und $\sigma \in S_n$. Dann gilt für alle $a \in A^{\leq 0}$

$$f_\sigma(\sigma xa) = \begin{cases} (\sigma a \sigma^{-1})^{\lambda+\varrho} & \text{falls } \sigma x \sigma^{-1} \in AN \cap K, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis: Aus Lemma 4.2.15 folgt, dass $f_\sigma(\sigma xa) = 0$, wenn $\sigma x \sigma^{-1} \notin AN \cap K$.

Wir nehmen daher an, dass $\sigma x \sigma^{-1} \in AN \cap K$. Dann folgt aus der Invarianz von f_σ unter $AN \cap K$

$$f_\sigma(\sigma xa) = f_\sigma(\sigma x \sigma^{-1} \sigma a) = f_\sigma(\sigma a) = f_\sigma(\sigma a \sigma^{-1} \sigma).$$

Wegen $\sigma a \sigma^{-1} \in A$ erhält man

$$f_\sigma(\sigma a \sigma^{-1} \sigma) = (\sigma a \sigma^{-1})^{\lambda+\varrho} f_\sigma(\sigma) = (\sigma a \sigma^{-1})^{\lambda+\varrho}. \quad \square$$

4.2.17 Lemma.

Sei $a = \text{diag}(\varpi^{a_1}, \varpi^{a_1+a_2}, \dots, \varpi^{a_1+\dots+a_n}) \in A^{\leq 0}$ mit $a_1 = 0$ und $\sigma \in S_n$. Sei weiter $M(a)$ das Vertretersystem für IaI/I aus Lemma 4.2.3. Dann gilt

$$\left| \{x \in M(a) \mid \sigma x \sigma^{-1} \in AN \cap K\} \right| = \prod_{k=1}^n q^{m_k a_k},$$

wobei

$$m_k = \left| \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid i < k \leq j \leq n, \sigma^{-1}(i) > \sigma^{-1}(j)\} \right|.$$

Beweis: Sei $x \in M(a)$ mit $\sigma x \sigma^{-1} \in AN \cap K$. Dann sind die Einträge x_{ij} mit $i > j$ oder $\sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j)$ trivial. Für die anderen Einträge, d.h. x_{ij} mit $i < j$ und $\sigma^{-1}(i) > \sigma^{-1}(j)$, haben wir jeweils $q^{a_{i+1}+\dots+a_j}$ viele Möglichkeiten. Insgesamt gibt es daher

$$\prod_{\substack{i < j \\ \sigma^{-1}(i) > \sigma^{-1}(j)}} q^{a_{i+1}+\dots+a_j}$$

viele Möglichkeiten für x . In diesem Produkt tritt der Exponent a_k genau dann auf, wenn $i < k \leq j$. \square

4.2.18 Lemma.

Sei $n \in \mathbb{N}$, $\sigma \in S_n$ und $k \in \{1, \dots, n\}$. Dann gilt

$$\left| \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid i < k \leq j \leq n, \sigma(i) > \sigma(j)\} \right| = \sum_{i=1}^{k-1} \sigma(i) - i.$$

Beweis: Wir berechnen

$$\begin{aligned}
& \left| \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid i < k \leq j \leq n, \sigma(i) > \sigma(j)\} \right| \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \left| \{j \in \mathbb{N} \mid k \leq j \leq n, \sigma(i) > \sigma(j)\} \right| \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \left(\left| \{j \in \mathbb{N} \mid j \leq n, \sigma(i) \geq \sigma(j)\} \right| - \left| \{j \in \mathbb{N} \mid 1 \leq j < k \leq n, \sigma(i) \leq \sigma(j)\} \right| \right) \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \sigma(i) - \sum_{i=1}^{k-1} \left| \{j \in \mathbb{N} \mid 1 \leq j < k \leq n, \sigma(i) \leq \sigma(j)\} \right| \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \sigma(i) - \left| \{(i, j) \in \{1, \dots, k-1\}^2 \mid \sigma(i) \leq \sigma(j)\} \right| \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \sigma(i) - \frac{(k-1)k}{2} \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \sigma(i) - i. \quad \square
\end{aligned}$$

4.2.19 Lemma.

Sei $a = \text{diag}(\varpi^{a_1}, \varpi^{a_1+a_2}, \dots, \varpi^{a_1+\dots+a_n}) \in A^{\leq 0}$ mit $a_1 = 0$ und $\sigma \in S_n$. Dann gilt

$$(a^{-1}\sigma a\sigma^{-1})^\varrho = \prod_{k=1}^n q^{m_k a_k},$$

wobei

$$m_k = \sum_{i=1}^{k-1} i - \sigma^{-1}(i).$$

Beweis: Es gilt $(a^{-1}\sigma a\sigma^{-1})^\varrho = (a^{-1})^\varrho (\sigma a\sigma^{-1})^\varrho$. Nun ist

$$(a^{-1})^\varrho = \prod_{i=1}^n \left| \varpi^{-a_2 - \dots - a_i} \right|^{\frac{n+1}{2} - i} = \prod_{i=1}^n q^{(a_2 + \dots + a_i)(\frac{n+1}{2} - i)}$$

und

$$\begin{aligned}
(\sigma a\sigma^{-1})^\varrho &= \prod_{i=1}^n \left| \varpi^{a_2 + \dots + a_{\sigma(i)}} \right|^{\frac{n+1}{2} - i} \\
&= \prod_{i=1}^n q^{-(a_2 + \dots + a_{\sigma(i)})(\frac{n+1}{2} - i)} \\
&= \prod_{i=1}^n q^{-(a_2 + \dots + a_i)(\frac{n+1}{2} - \sigma^{-1}(i))}.
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} (a^{-1}\sigma a\sigma^{-1})^\varrho &= \prod_{i=1}^n q^{(a_2+\dots+a_i)(\sigma^{-1}(i)-i)} \\ &= \prod_{k=1}^n q^{m_k a_k}, \end{aligned}$$

wobei $m_k = \sum_{i=k}^n \sigma^{-1}(i) - i$. Wegen $\sum_{i=1}^n \sigma^{-1}(i) - i = 0$ folgt $m_k = \sum_{i=1}^{k-1} i - \sigma^{-1}(i)$. \square

4.2.20 Korollar.

Sei $a \in A^{\leq 0}$, $\sigma \in S_n$ und $M(a)$ das Vertretersystem für IaI/I aus Lemma 4.2.3. Dann gilt

$$\left| \{x \in M(a) : \sigma x \sigma^{-1} \in AN\} \right| = \left((a^{-1}\sigma a\sigma^{-1})^\varrho \right)^{-1}.$$

Beweis: Dies folgt aus Lemma 4.2.17, Lemma 4.2.18 und Lemma 4.2.19. \square

4.2.21 Lemma.

Sei $a = \text{diag}(\varpi^{a_1}, \varpi^{a_1+a_2}, \dots, \varpi^{a_1+\dots+a_n}) \in A^{\leq 0}$ mit $a_1 = 0$. Dann gilt

$$(\sigma a \sigma^{-1})^\lambda = \prod_{k=1}^n q^{m_k a_k},$$

wobei

$$m_k = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_{\sigma^{-1}(i)}.$$

Insbesondere gilt

$$a^\varrho = \prod_{k=1}^n q^{\frac{(k-1)(n-k+1)}{2} \cdot a_k}.$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} (\sigma a \sigma^{-1})^\lambda &= \prod_{i=1}^n \left| \varpi^{a_{\sigma(2)}+\dots+a_{\sigma(i)}} \right|^{\lambda_i} \\ &= \prod_{i=1}^n \left| \varpi^{a_2+\dots+a_i} \right|^{\lambda_{\sigma^{-1}(i)}} \\ &= \prod_{k=1}^n q^{m_k a_k}, \end{aligned}$$

wobei $m_k = -\sum_{i=k}^n \lambda_{\sigma^{-1}(i)}$. Wegen $q^{\lambda_1+\dots+\lambda_n} = 1$ folgt $m_k = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_{\sigma^{-1}(i)}$.

Wählt man $\sigma = \text{id}$ und $\lambda = \varrho$, dann folgt die zweite Aussage durch eine leichte Rechnung. \square

Beweis von Proposition 4.2.13: Es gilt

$$\begin{aligned}
\langle \pi_I(a)f_\sigma, f_\sigma \rangle &= \int_K (\pi_I(a)f_\sigma)(k) \overline{f_\sigma(k)} dk \\
&= \int_K \int_G \mathbf{1}_{IaI}(x) (\pi(x)f_\sigma)(k) dx \cdot \overline{f_\sigma(k)} dk \\
&= \int_K \mathbf{1}_{K_\sigma}(k) \int_G \mathbf{1}_{IaI}(x) f_\sigma(kx) dx dk.
\end{aligned}$$

Die Abbildung $k \mapsto \int_G \mathbf{1}_{IaI}(x) f_\sigma(kx) dx$ ist I -rechtsinvariant, d. h. aufgrund der Definition von K_σ und der Normierung des Haar-Maßes gilt

$$\begin{aligned}
\langle \pi_I(a)f_\sigma, f_\sigma \rangle &= \int_K \mathbf{1}_{K_\sigma}(k) \int_G \mathbf{1}_{IaI}(x) f_\sigma(kx) dx dk \\
&= \sum_{kI \in K_\sigma/I} \int_G \mathbf{1}_{IaI}(x) f_\sigma(kx) dx.
\end{aligned}$$

Mit Lemma 4.2.14 erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{kI \in K_\sigma/I} \int_G \mathbf{1}_{IaI}(x) f_\sigma(kx) dx &= \sum_{kI \in K_\sigma/I} \int_G \mathbf{1}_{IaI}(x) f_\sigma(\sigma x) dx \\
&= \text{vol}(K_\sigma) \int_G \mathbf{1}_{IaI}(x) f_\sigma(\sigma x) dx \\
&= \text{vol}(K_\sigma) \sum_{xaI \in IaI} f_\sigma(\sigma xa).
\end{aligned}$$

Nach Satz 4.2.6 gilt $\text{vol}(K_\sigma) = \|f_\sigma\|^2$. Aus Korollar 4.2.16 und Lemma 4.2.20 folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{xaI \in IaI} f_\sigma(\sigma xa) &= \left((a^{-1}\sigma a\sigma^{-1})^\varrho \right)^{-1} \cdot (\sigma a\sigma^{-1})^{\lambda+\varrho} \\
&= a^\varrho \left((\sigma a\sigma^{-1})^\varrho \right)^{-1} \cdot (\sigma a\sigma^{-1})^\lambda \cdot (\sigma a\sigma^{-1})^\varrho \\
&= a^\varrho \cdot (\sigma a\sigma^{-1})^\lambda. \quad \square
\end{aligned}$$

Beweis von Satz 4.2.12: Nach Definition gilt

$$S_\pi(u_1, \dots, u_{n-1}) = \sum_{a \in A^-} \text{tr } \pi_I(a) u^{\xi(a)}.$$

Nach Satz 4.2.6 sind die Funktionen f_σ mit $\sigma \in S_n$ eine Orthogonalbasis von V_π^I , d. h.

$$\text{tr } \pi_I(a) = \sum_{\sigma \in S_n} \frac{\langle \pi_I(a)f_\sigma, f_\sigma \rangle}{\|f_\sigma\|^2}.$$

Aus Proposition 4.2.13 folgt

$$\text{tr } \pi_I(a) = a^\varrho \sum_{\sigma \in S_n} (\sigma a\sigma^{-1})^\lambda.$$

Mit Lemma 4.2.21 erhalten wir nun

$$\begin{aligned}
S_\pi(u_1, \dots, u_{n-1}) &= \sum_{a \in A^-} a^\varrho \sum_{\sigma \in S_n} (\sigma a \sigma^{-1})^\lambda u^{\xi(a)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{a_2, \dots, a_n=1}^{\infty} a^\varrho (\sigma a \sigma^{-1})^\lambda \cdot u_1^{a_2} \cdot \dots \cdot u_{n-1}^{a_n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=2}^n \sum_{a_i=1}^{\infty} q^{\binom{(k-1)(n-k+1)}{2} - \lambda_{\sigma^{-1}(1)} - \dots - \lambda_{\sigma^{-1}(k-1)}} \cdot u_{k-1}^{a_k} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=2}^n \sum_{a_i=1}^{\infty} q^{\binom{(k-1)(n-k+1)}{2} - \lambda_{\sigma(1)} - \dots - \lambda_{\sigma(k-1)}} \cdot u_{k-1}^{a_k} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{q^{\frac{i(n-i)}{2} - \lambda_{\sigma(1)} - \dots - \lambda_{\sigma(i)}} u_i}{1 - q^{\frac{i(n-i)}{2} - \lambda_{\sigma(1)} - \dots - \lambda_{\sigma(i)}} u_i}. \quad \square
\end{aligned}$$

4.3 Für die $\mathrm{PGL}_2(F)$

In diesem Abschnitt bestimmen wir die Zetafunktion $S(u)$ aus 4.1 im Fall des Bruhat-Tits-Baumes und zeigen die Verbindung zur Graph-Zetafunktion von $\Gamma \backslash \mathfrak{X}$ auf. Wir bestimmen S_π für jede zulässige Darstellung π und zeigen, dass S_π im Wesentlichen die logarithmische Ableitung der Langlands- L -Funktion $L(\pi, s)$ ist.

Sei $G = \mathrm{PGL}_2(F)$, $K = \mathrm{PGL}_2(\mathcal{O})$ und Γ ein torsionsfreies, kokompaktes Gitter in G .

Sphärische Kammern entsprechen im Fall des Bruhat-Tits-Baumes den Enden des Baumes (siehe [AB08, 11.8]). \mathcal{C} entspricht dann dem Ende, das durch die Ecken

$$\begin{bmatrix} \varpi^n & \\ & 1 \end{bmatrix} K, \quad n \in \mathbb{N}$$

definiert wird. \mathfrak{a} ist das Apartment, welches die Ecken $\begin{bmatrix} \varpi^n & \\ & 1 \end{bmatrix} K, \quad n \in \mathbb{Z}$ enthält, und $\bar{\mathcal{C}}$ ist das Ende, das durch die Ecken

$$\begin{bmatrix} 1 & \\ & \varpi^n \end{bmatrix} K, \quad n \in \mathbb{N}$$

definiert wird. \mathcal{C} ist die Kammer, die die beiden Ecken

$$\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} K, \quad \begin{bmatrix} 1 & \\ & \varpi \end{bmatrix} K$$

enthält.

4.3.1 Lemma.

Es gilt

$$\mathcal{E}(\Gamma) = \{[\gamma] : \gamma \in \Gamma, \gamma \neq 1\}.$$

Beweis: Offenbar ist $\gamma = 1$ nicht zu einem Element aus $IA^{-1}I$ konjugiert. Sei nun $\gamma \neq 1$. Nach Proposition 2.5.5 und Korollar 2.5.4 ist γ in G zu der Diagonalmatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & \\ & \varepsilon \varpi^l \end{bmatrix}$$

konjugiert, wobei $l = l(\gamma) \geq 1$ und $\varepsilon \in \mathcal{O}^\times$. Diese Matrix liegt offenbar in $IA^{-1}I$. \square

4.3.2 Lemma.

Sei $\begin{bmatrix} 1 & \\ & \varpi^n \end{bmatrix} \in A^-$. Dann gilt

$$I \begin{bmatrix} 1 & \\ & \varpi^n \end{bmatrix} I = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} F^\times : c, d \in \varpi \mathcal{O}, b \in \mathcal{O}, a \in \mathcal{O}^\times, ad - bc \in \varpi^n \mathcal{O}^\times \right\}.$$

Insbesondere gilt

$$IA^{-1}I = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} F^\times : c, d \in \varpi \mathcal{O}, b \in \mathcal{O}, a \in \mathcal{O}^\times \right\}.$$

Beweis: Seien

$$\alpha = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \varpi a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ \varpi b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \in I$$

jeweils in ganzen Vertretern, d. h. $a_{ij}, b_{ij} \in \mathcal{O}$ und $a_{ii}, b_{ii} \in \mathcal{O}^\times$. Dann gilt

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & \\ & \varpi^n \end{bmatrix} \beta = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + \varpi^{n+1}a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + \varpi^n a_{12}b_{22} \\ \varpi a_{21}b_{11} + \varpi^{n+1}a_{22}b_{21} & \varpi a_{21}b_{12} + \varpi^n a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Modulo \mathfrak{m} betrachtet erhalten wir

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

wobei $a_{11}b_{11} \in \mathcal{O}^\times$ gilt. Insbesondere ist die rechte Seite von (4) bereits ein ganzer Vertreter. Damit folgt, dass jeder ganze Vertreter eines Elementes von $IA^{-1}I$ die obigen Bedingungen erfüllt.

Sei nun umgekehrt $x = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$ mit $x_{21}, x_{22} \in \mathfrak{m}$, $x_{12} \in \mathcal{O}$, $x_{11} \in \mathcal{O}^\times$ und $\det(x) \in \varpi^n \mathcal{O}^\times$ gegeben. Wählen wir in (4) $a_{11} = a_{22} = 1$ und $a_{12} = b_{21} = 0$, dann erhalten wir für das Produkt

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ \varpi a_{21}b_{11} & \varpi a_{21}b_{12} + \varpi^n b_{22} \end{bmatrix}.$$

Nun setzen wir

$$b_{11} = x_{11}, b_{12} = x_{12}, a_{21} = \frac{x_{21}}{\varpi x_{11}}, b_{22} = \frac{x_{22} - \varpi a_{21}b_{12}}{\varpi^n} = \frac{\det(X)}{x_{11}\varpi^n}.$$

Aufgrund der Bedingungen die x erfüllt, sind alle diese Einträge tatsächlich in \mathcal{O} und wir erhalten, dass $x \in IA^{-1}I$ liegt. \square

4.3.3 Lemma.

Für $\gamma \in \Gamma$ gilt $[\gamma : IA^{-1}I] = 1$. Ferner gilt für $\gamma \neq 1$

$$|G_\gamma^a : \Gamma_\gamma^a| = l(\gamma_0),$$

wobei γ_0 wie in Korollar 2.5.7 definiert ist.

Beweis: Die zweite Aussage folgt aus Korollar 2.5.7, denn Γ_γ^a ist die von γ_0 erzeugte Gruppe.

Für die erste Aussage können wir nach Lemma 2.5.4 ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass γ von der Form

$$\gamma = \begin{bmatrix} 1 & \\ & \varepsilon\varpi^l \end{bmatrix}$$

ist, wobei $\varepsilon \in \mathcal{O}^\times$ und $l > 0$. G_γ ist dann die Menge A der Diagonalmatrizen in G und wir erhalten

$$[\gamma : IA^{-1}I] = \text{vol}(\{x \in A \setminus G : x^{-1}\gamma x \in IA^{-1}I\}).$$

Beachte, dass wir mit der Iwasawa-Zerlegung $A \setminus G$ mit $(A \cap NK) \setminus NK$ identifizieren können. Der Schnitt $A \cap NK$ besteht aus allen Diagonalmatrizen mit Einträgen in \mathcal{O}^\times , ist also isomorph zu \mathcal{O}^\times . Wir können x als Produkt eines Elementes aus N und aus K schreiben. Offenbar hängt die Eigenschaft $x^{-1}\gamma x \in IA^{-1}I$ nur von der I -Nebenklasse von x ab, d. h. wir können annehmen, dass x von der Form nk ist, wobei $n \in N$ und $k \in K/I$. Mit Korollar 4.2.11 können wir $k = \begin{bmatrix} y & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}$ für ein $y \in \mathcal{O}/\varpi\mathcal{O}$ oder $k = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$ annehmen.

Weiter wählen wir für n den ganzen Vertreter $\begin{bmatrix} \varpi^a & z \\ & \varpi^a \end{bmatrix}$, wobei $z \in \mathcal{O}$ und $a \in \mathbb{N}_0$ mit der Bedingung, dass a nur dann positiv ist, wenn $z \in \mathcal{O}^\times$ ist.

1. Fall $k = \begin{bmatrix} y & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}$ mit $y \in \mathcal{O}/\varpi\mathcal{O}$: Wir berechnen

$$\begin{aligned} x^{-1}\gamma x &= \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & -y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varpi^a & -z \\ & \varpi^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & \varepsilon\varpi^l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varpi^a & z \\ & \varpi^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \varepsilon\varpi^{a+l} & 0 \\ (1 - \varepsilon\varpi^l)(z + \varpi^a y) & \varpi^a \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dies ist nicht zwangsläufig ein ganzer Vertreter, jedoch gilt $\nu(\varepsilon\varpi^{l+a}) \geq \nu(\varpi^a)$. Nach Lemma 4.3.2 liegt $x^{-1}\gamma x$ nicht in $IA^{-1}I$.

2. Fall $k = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$: Wir berechnen wie zuvor

$$x^{-1}\gamma x = \begin{bmatrix} \varpi^a & (1 - \varepsilon\varpi^l)z \\ & \varepsilon\varpi^{l+a} \end{bmatrix}.$$

Dies ist ein ganzer Vertreter, denn für $a = 0$ liegt der obere linke Eintrag in \mathcal{O}^\times und für $a > 0$ ist der rechte obere Eintrag eine Einheit, da $z \in \mathcal{O}^\times$.

Nach Lemma 4.3.2 liegt dieses Element genau dann in $IA^{-1}I$, wenn $a = 0$, d. h. $n \in I$.

Insgesamt erhalten wir also

$$\{x \in A \setminus G : x^{-1}\gamma x \in IA^{-1}I\} = A \setminus AI,$$

d. h. $[\gamma : IA^{-1}I] = 1$. □

4.3.4 Korollar.

Es gilt

$$S(u) = \sum_{[\gamma] \neq 1} l(\gamma_0) u^{l(\gamma)},$$

wobei sich die Summe über alle nichttrivialen Konjugationsklassen in Γ erstreckt.

4.3.5 Satz.

Sei Γ ein torsionsfreies, kokompaktes, uniformes Gitter in G , X der Quotientengraph $\Gamma \backslash \mathfrak{X}$ und $\zeta(X, u)$ die Zetafunktion von X . Dann gilt

$$\frac{S(u)}{u} = \frac{\zeta'}{\zeta}(X, u).$$

Beweis: Wir schreiben logderiv für die logarithmische Ableitung und berechnen

$$\begin{aligned} \logderiv \zeta(X, u) &= \logderiv \prod_{[\gamma_0]} (1 - u^{l(\gamma_0)})^{-1} \\ &= - \sum_{[\gamma_0]} \logderiv(1 - u^{l(\gamma_0)}) \\ &= - \sum_{[\gamma_0]} \frac{-l(\gamma_0) u^{l(\gamma_0)-1}}{1 - u^{l(\gamma_0)}} \\ &= \frac{1}{u} \sum_{[\gamma_0]} l(\gamma_0) \frac{u^{l(\gamma_0)}}{1 - u^{l(\gamma_0)}} \\ &= \frac{1}{u} \sum_{[\gamma_0]} l(\gamma_0) \sum_{k=1}^{\infty} u^{l(\gamma_0)k} \\ &= \frac{1}{u} \sum_{[\gamma]} l(\gamma_0) u^{l(\gamma)}. \end{aligned}$$

Hierbei durchläuft $[\gamma_0]$ alle primitiven, geschlossenen Wege ohne Backtracking modulo Start- bzw. Endpunkt und $[\gamma]$ entsprechend alle geschlossenen Wege ohne Backtracking modulo Start- bzw. Endpunkt.

Da Γ torsionsfrei ist, ist \mathfrak{X} die universelle Überlagerung von X und Γ die Fundamentalgruppe von X . Die Konjugationsklassen der Fundamentalgruppe Γ stehen in Bijektion zu den geschlossenen Wegen in X modulo freier Homotopie (siehe [Spa81, 1.8.3]). Diese entsprechen genau den geschlossenen Wegen ohne Backtracking. □

$S_\pi(u)$ in den verschiedenen Fällen

Wir berechnen nun $S_\pi(u)$ für alle zulässigen, irreduziblen Darstellungen π von $\mathrm{PGL}_2(F)$. Wenn $V_\pi^I = 0$, dann ist auch $S_\pi(u) = 0$. Sei nun π , sodass $V_\pi^I \neq 0$. Dann ist π eine Unterdarstellung einer unverzweigten Hauptseriendarstellung. Dies führt zu den folgenden Fällen (siehe 2.7.3):

- π ist eine unverzweigte, irreduzible Hauptseriendarstellung.
- π ist eine unverzweigte, eindimensionale Darstellung.
- π ist eine spezielle Darstellung der Form $\chi \otimes \mathrm{St}$, wobei χ ein unverzweigter Quasicharakter mit $\chi^2 = 1$ ist.

4.3.6 Satz.

Sei π eine irreduzible, zulässige Darstellung der Gruppe $\mathrm{PGL}_2(F)$.

1. Ist π eine irreduzible, unverzweigte Hauptseriendarstellung mit zugehörigen Satake-Parametern $|\varpi|^\lambda, |\varpi|^{-\lambda}$, so gilt

$$S_\pi(u) = \frac{q^{\frac{1}{2}+\lambda}u}{1 - q^{\frac{1}{2}+\lambda}u} + \frac{q^{\frac{1}{2}-\lambda}u}{1 - q^{\frac{1}{2}-\lambda}u}.$$

2. Ist $\pi = \chi \circ \det$ eine unverzweigte eindimensionale Darstellung, so gilt

$$S_\pi(u) = \frac{\chi(\varpi)qu}{1 - \chi(\varpi)qu}.$$

3. Ist π ein Twist der Steinberg-Darstellung mit einem unverzweigten Charakter, d. h. $\pi = \chi \otimes \mathrm{St}$ mit einem unverzweigten Charakter χ , so gilt

$$S_\pi(u) = \frac{\chi(\varpi)u}{1 - \chi(\varpi)u}.$$

4. In allen anderen Fällen ist $S_\pi(u) = 0$.

Beweis: Für die ersten beiden Fälle haben wir S_π in 4.2 bestimmt. Der letzte Fall ist klar. Betrachte also den Fall $\pi = \chi \otimes \mathrm{St}$ für einen unverzweigten Charakter χ von F^\times mit $\chi^2 = 1$.

Die Steinberg-Darstellung ist die irreduzible Unterdarstellung der Hauptseriendarstellung $\Pi = \pi(| \cdot |^{\frac{1}{2}}, | \cdot |^{-\frac{1}{2}})$. Mit einer analogen Rechnung wie in [KLW10, 2.4] sieht man, dass V_{St}^I eindimensional ist und von der Funktion $q \cdot f_{\mathrm{id}} - f_{(12)}$ erzeugt wird. Eine kurze Rechnung zeigt, dass

$$\Pi_I\left(\begin{pmatrix} 1 & \\ & \varpi \end{pmatrix}\right)(qf_{\mathrm{id}} - f_{(12)}) = qf_{\mathrm{id}} - f_{(12)}.$$

Da $\Pi_I(a)$ für $a \in A^-$ multiplikativ ist, operiert $\Pi_I(a)$ für $a \in A^-$ trivial auf V_{St}^I . Für die Darstellung $\pi = \chi \otimes \text{St}$ erhalten wir mit einer analogen Rechnung, dass $\pi_I(a)$ für $a \in A^-$ als Skalar $\chi(\det(a))$ operiert.

Damit folgt

$$S_\pi(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi(\varpi)^k u^k = \frac{\chi(\varpi)u}{1 - \chi(\varpi)u}. \quad \square$$

Vergleich von S_π mit der Langlands- L -Funktion

In Satz 4.3.5 haben wir einen Zusammenhang zwischen $S(u)$ und der logarithmischen Ableitung der Graph-Zetafunktion gezeigt. Wir zeigen nun einen analogen Zusammenhang zwischen S_π und der Langlands- L -Funktion nach Godement und Jacquet (siehe 2.8) besteht. Damit erhalten wir neben Satz 3.1.4 einen weiteren Zusammenhang zwischen Graph-Zetafunktion und der L -Funktion der Rechtsdarstellung.

4.3.7 Notation.

Wir setzen $u = q^{-s-\frac{1}{2}}$ und schreiben auch $L(\pi, u)$ statt $L(\pi, s)$, wenn keine Verwechslungen zu Befürchten sind.

4.3.8 Proposition.

Sei π eine irreduzible, zulässige Darstellung von $\text{PGL}_2(F)$. Wir fassen die $L(\pi, s)$ als Funktion in der Variablen $u = q^{-s-\frac{1}{2}}$ auf.

Ist $\pi = \chi \circ \det$ eine eindimensionale, unverzweigte Darstellung, so gilt

$$\frac{L'}{L}(\pi, u) = \frac{S_\pi(u)}{u} + \frac{\chi(\varpi)}{1 - \chi(\varpi)u}.$$

Anderenfalls gilt

$$\frac{L'}{L}(\pi, u) = \frac{S_\pi(u)}{u}.$$

Beweis: Nach [GH11a, 11.9, 11.12, 11.13] haben wir nur in den folgenden Fällen eine nicht-triviale Langlands- L -Funktion:

1. $\pi = \pi(\chi, \chi^{-1})$ irreduzible, unverzweigte Hauptseriendarstellung und χ ein Charakter von F^\times .
2. $\pi = \chi \otimes \text{St}$, wobei χ ein unverzweigter Charakter von F^\times mit $\chi^2 = 1$ ist.
3. $\pi = \chi \circ \det$ unverzweigte, eindimensionale Darstellung.

Nach 2.7 sind dies genau die Darstellungen, mit $V_\pi^I \neq 0$, d. h. $S_\pi(u) \neq 0$. Im Fall $\pi = \chi \otimes \text{St}$, χ unverzweigt und $\chi^2 = 1$, ist die L -Funktion nach [GH11a, 11.12] gegeben durch

$$L(\pi, s) = \frac{1}{1 - \chi(\varpi)q^{-s-\frac{1}{2}}}.$$

Die Aussage folgt nun aus Satz 4.3.6 durch eine leichte Rechnung. \square

4.3.9 Theorem.

Sei R die Rechtsdarstellung auf dem Raum $L^2(\Gamma \backslash G)$ und X der Graph $\Gamma \backslash \mathfrak{X}$. Falls X nicht bipartit ist, gilt mit $u = q^{-s-\frac{1}{2}}$

$$L(R, s) = \frac{\zeta(X, u)}{1 - u}$$

und falls X bipartit ist,

$$L(R, s) = \frac{\zeta(X, u)}{1 - u^2}$$

Für den Beweis benötigen wir ein einfaches Lemma.

4.3.10 Lemma.

Sei X der endliche Graph $\Gamma \backslash \mathfrak{X}$. In $L^2(\Gamma \backslash G)$ können nur zwei unverzweigte, eindimensionale Darstellungen auftreten. Die triviale Darstellung tritt mit der Multiplizität 1 auf. Sei χ der unverzweigte Charakter mit $\chi(\varpi) = -1$. Dann tritt die Darstellung $\pi = \chi \circ \det$ genau dann auf, wenn X ein bipartiter Graph ist. In diesem Fall ist die Multiplizität 1.

Beweis: Wir müssen nur den zweiten Teil der Aussage zeigen, denn die triviale Darstellung tritt immer mit der Multiplizität 1 auf.

Beachte, dass X genau dann bipartit ist, wenn X keinen Kreis ungerader Länge besitzt. Da Γ die Fundamentalgruppe von X ist, ist X genau dann bipartit, wenn für jedes $\gamma \in \Gamma$ der Abstand $d(\gamma K, K)$ von γK zu K im Bruhat-Tits-Baum eine gerade Zahl ist. Somit ist X genau dann bipartit, wenn für jedes $\gamma \in \Gamma$ der Term $\det(\gamma)$ ein Quadrat in F^\times ist.

Beachte nun, dass die Darstellung $\chi \circ \det$ genau dann auftritt, wenn χ auf $\det(\Gamma)$ trivial ist. \square

Beweis des Theorems: Sei $\bigoplus_i \pi_i$ die direkte Zerlegung der Rechtsdarstellung auf $L^2(\Gamma \backslash G)$ in irreduzible Unterdarstellungen. Dann folgt aus Satz 4.3.5 und Lemma 4.1.3

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(X, u) = \frac{S(u)}{u} = \sum_i \frac{S_{\pi_i}(u)}{u}.$$

Die Diskrepanz zwischen $\frac{\zeta'}{\zeta}(X, u)$ und $\frac{L'}{L}(R, s - \frac{1}{2})$ hängt nur von den Vielfachheiten der unverzweigten, eindimensionalen Darstellungen ab. Wir betrachten nun den Fall, dass X bipartit ist, der andere Fall geht analog.

Wir schreiben logderiv für die logarithmische Ableitung und erhalten mit dem Lemma:

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(X, u) = \sum_{\pi} \frac{L'}{L}(\pi, u) - \frac{1}{1 - u} - \frac{-1}{1 + u} = \logderiv \left(L(R, u)(1 - u)(1 + u) \right).$$

Somit gibt es eine Konstante C , sodass $C \cdot \zeta(X, u) = L(R, u)(1 - u^2)$. Setzt man $u = 0$, dann folgt $C = 1$. \square

4.4 Für die $\mathrm{PGL}_3(F)$

In diesem Abschnitt bestimmen wir S_π für alle irreduziblen, zulässigen, unitären Darstellungen von $\mathrm{PGL}_3(F)$. Es genügt hierzu die Darstellungen π mit $V_\pi^I \neq 0$ zu betrachten. Nach 2.7 sind dies die irreduziblen Unterdarstellungen von unverzweigten Hauptseriendarstellungen. Die Arbeit von [Tad86] klärt, wann diese Unterdarstellung unitär ist. Kang, Li und Wang bestimmen in [KLW10, 2.4] die möglichen Fälle und geben jeweils eine Basis von V_π^I an:

1. π ist eine irreduzible, unitäre Hauptseriendarstellung.
2. π ist eine eindimensionale, unverzweigte Darstellung.
3. π ist die irreduzible Unterdarstellung von $\pi(\chi | \cdot, \chi, \chi | \cdot^{-1})$, wobei χ ein unverzweigter Charakter von F^\times mit $\chi^3 = 1$ ist.
4. π ist die irreduzible Unterdarstellung von $\pi(\chi | \cdot^{-\frac{1}{2}}, \chi | \cdot^{\frac{1}{2}}, \chi^{-2})$, wobei χ ein Charakter von F^\times ist.
5. π ist die irreduzible Unterdarstellung von $\pi(\chi | \cdot^{\frac{1}{2}}, \chi | \cdot^{-\frac{1}{2}}, \chi^{-2})$, wobei χ ein Charakter von F^\times ist.

4.4.1 Satz.

Sei π eine irreduzible, zulässige, unitäre Darstellung der Gruppe $\mathrm{PGL}_3(F)$.

1. Ist π eine irreduzible, unverzweigte Hauptseriendarstellung mit zugehörigen Satake-Parametern $|\varpi|^{\lambda_1}, |\varpi|^{\lambda_2}, |\varpi|^{\lambda_3}$, dann gilt

$$S_\pi(u_1, u_2) = \sum_{i \neq j} \frac{q^{1-\lambda_i} u_1}{1 - q^{1-\lambda_i} u_1} \cdot \frac{q^{1+\lambda_j} u_2}{1 - q^{1+\lambda_j} u_2}.$$

2. Ist $\pi = \chi \circ \det$ eine unverzweigte eindimensionale Darstellung, dann gilt

$$S_\pi(u_1, u_2) = \frac{q^2 \chi(\varpi) u_1}{1 - q^2 \chi(\varpi) u_1} \cdot \frac{q^2 \chi(\varpi)^2 u_2}{1 - q^2 \chi(\varpi)^2 u_2}.$$

3. Ist χ ein unverzweigter Charakter von F^\times mit $\chi^3 = 1$ und π die irreduzible Unterdarstellung von $\pi(\chi | \cdot, \chi, \chi | \cdot^{-1})$, dann gilt

$$S_\pi(u_1, u_2) = \frac{\chi(\varpi) u_1}{1 - \chi(\varpi) u_1} \cdot \frac{\chi(\varpi)^2 u_2}{1 - \chi(\varpi)^2 u_2}.$$

4. Ist χ ein unverzweigter Charakter von F^\times und π die irreduzible Unterdarstellung von $\pi(\chi | \cdot |^{-\frac{1}{2}}, \chi | \cdot |^{\frac{1}{2}}, \chi^{-2})$, dann gilt

$$\begin{aligned} S_\pi(u_1, u_2) &= \frac{\chi(\varpi)^{-2}qu_1}{1 - \chi(\varpi)^{-2}qu_1} \cdot \frac{\chi(\varpi)^{-1}q^{\frac{3}{2}}u_2}{1 - \chi(\varpi)^{-1}q^{\frac{3}{2}}u_2} \\ &+ \frac{\chi(\varpi)q^{\frac{3}{2}}u_1}{1 - \chi(\varpi)q^{\frac{3}{2}}u_1} \cdot \frac{\chi(\varpi)^{-1}q^{\frac{3}{2}}u_2}{1 - \chi(\varpi)^{-1}q^{\frac{3}{2}}u_2} \\ &+ \frac{\chi(\varpi)q^{\frac{3}{2}}u_1}{1 - \chi(\varpi)q^{\frac{3}{2}}u_1} \cdot \frac{\chi(\varpi)^2qu_2}{1 - \chi(\varpi)^2qu_2}. \end{aligned}$$

5. Ist χ ein unverzweigter Charakter von F^\times und π die irreduzible Unterdarstellung von $\pi(\chi | \cdot |^{\frac{1}{2}}, \chi | \cdot |^{-\frac{1}{2}}, \chi^{-2})$, dann gilt

$$\begin{aligned} S_\pi(u_1, u_2) &= \frac{\chi(\varpi)^{-2}qu_1}{1 - \chi(\varpi)^{-2}qu_1} \cdot \frac{\chi(\varpi)^{-1}q^{\frac{1}{2}}u_2}{1 - \chi(\varpi)^{-1}q^{\frac{1}{2}}u_2} \\ &+ \frac{\chi(\varpi)q^{\frac{1}{2}}u_1}{1 - \chi(\varpi)q^{\frac{1}{2}}u_1} \cdot \frac{\chi(\varpi)^2qu_2}{1 - \chi(\varpi)^2qu_2} \\ &+ \frac{\chi(\varpi)q^{\frac{1}{2}}u_1}{1 - \chi(\varpi)q^{\frac{1}{2}}u_1} \cdot \frac{\chi(\varpi)^{-1}q^{\frac{1}{2}}u_2}{1 - \chi(\varpi)^{-1}q^{\frac{1}{2}}u_2}. \end{aligned}$$

6. In allen anderen Fällen ist $V_\pi^I = 0$, d. h.

$$S_\pi(u_1, u_2) = 0.$$

Beweis: Die ersten beiden Fälle sind das Resultat von Lemma 4.2.4 und Satz 4.2.12. Wir skizzieren am vierten Fall, wie man S_π im Allgemeinen berechnen kann. Sei also χ ein unverzweigter Charakter von F^\times , Π die reduzible Hauptseriendarstellung $\pi(\chi | \cdot |^{-\frac{1}{2}}, \chi | \cdot |^{\frac{1}{2}}, \chi^{-2})$ und π die irreduzible Unterdarstellung von Π . Nach [KLW10, 2.4] hat V_π^I die Basis $f_{\text{id}} + f_{(12)}$, $f_{(23)} + f_{(132)}$, $f_{(13)} + f_{(123)}$. Um die Rechnungen zu vereinfachen, verwenden wir Proposition 4.5.5, die wir erst im nächsten Abschnitt beweisen. Demnach ist die Darstellungsmatrix von $\Pi_I(\text{diag}(1, \varpi^a, \varpi^{a+b}))$ für $a, b > 0$ bezüglich der Basis $f_\sigma, f_{(12)}, f_{(23)}, f_{(123)}, f_{(132)}, f_{(13)}$ durch eine obere Dreiecksmatrix gegeben. Die Diagonaleinträge dieser Matrix können wir mit 4.2.13 bestimmen. So ist zum Beispiel die Darstellungsmatrix von $\Pi_I(\text{diag}(1, 1, \varpi))$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} q\chi^{-2}(\varpi) & * & * & * & * & * \\ 0 & q\chi^{-2}(\varpi) & * & * & * & * \\ 0 & 0 & q^{\frac{1}{2}}\chi(\varpi) & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & q^{\frac{1}{2}}\chi(\varpi) & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q^{\frac{3}{2}}\chi(\varpi) & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q^{\frac{3}{2}}\chi(\varpi) \end{pmatrix}.$$

Es ist leicht zu sehen, dass die Darstellungsmatrix von $\pi_I(\text{diag}(1, 1, \varpi))$ bezüglich der Basis $f_{\text{id}} + f_{(12)}, f_{(23)} + f_{(132)}, f_{(13)} + f_{(123)}$ durch

$$\begin{pmatrix} q\chi^{-2}(\varpi) & * & * \\ 0 & q^{\frac{1}{2}}\chi(\varpi) & * \\ 0 & 0 & q^{\frac{3}{2}}\chi(\varpi) \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Analog erhält man die Darstellungsmatrix von $\pi_I(\text{diag}(1, \varpi, \varpi))$ und kann dann S_π berechnen. \square

4.5 Translationsoperatoren

In diesem Abschnitt verfolgen wir den geometrischen Ansatz von Deitmar, Kang und McCallum aus [DKM20]. Wir betrachten hierzu die Verallgemeinerung des Translationsoperators T aus 2.1. Da wir eine Kammer in mehrere Richtungen translatieren können, erhalten wir mehrere Operatoren T_1, \dots, T_{n-1} . Wir zeigen dann, dass der Term $\det(1 - uT_k)^{-1}$ eine Interpretation als Langlands- L -Funktion hat.

Sei $\text{PC}(\mathfrak{X})$ die Menge aller punktierten Kammern des Bruhat-Tits-Gebäudes \mathfrak{X} , d. h. aller Paare (C, x) , wobei C eine Kammer von \mathfrak{X} und x eine Ecke von C ist. Die punktierten Kammern entsprechen den Nebenklassen G/I .

Wir betrachten den Hilbertraum

$$l^2(\text{PC}(\mathfrak{X})) = \left\{ \sum_{C \in \text{PC}(\mathfrak{X})} \lambda_C C \mid \sum_{C \in \text{PC}(\mathfrak{X})} |\lambda_C|^2 < \infty \right\}$$

und definieren für $a \in G$ den Operator $T(a)$ auf $l^2(\text{PC}(\mathfrak{X}))$ als

$$T(a): l^2(\text{PC}(\mathfrak{X})) \rightarrow l^2(\text{PC}(\mathfrak{X})), \quad xI \mapsto \sum_{yI \in IaI} xyI.$$

Nach [DKM20, 3.1.2] ist der Operator T auf $A^{\leq 0}$ multiplikativ, d. h. für $a, a' \in A^{\leq 0}$ gilt

$$T(aa') = T(a)T(a').$$

$T(a)$ definiert durch die Vorschrift

$$(T(a)f)(x) = \sum_{yI \in T(a)(xI)} f(yI) = \sum_{yI \in IaI} f(xyI) = \int_G \mathbf{1}_{IaI}(y) f(xy) dy$$

einen Operator auf $L^2(\Gamma \backslash G)$, den wir ebenfalls mit $T(a)$ bezeichnen. $T(a)$ lässt den Raum $L^2(\Gamma \backslash G)^I$ invariant.

4.5.1 Lemma.

Sei π eine Unterdarstellung von $L^2(\Gamma \backslash G)$. Dann ist V_π^I unter $T(a)$ invariant. Wir schreiben $T_\pi(a)$ für die Einschränkung von $T(a)$ auf V_π^I . Für alle $f \in V_\pi^I$, $a \in A^{\leq 0}$ gilt

$$T(a)f = \pi_I(a)f.$$

Beweis: Die zweite Eigenschaft ist klar, da die Definition von $\pi_I(a)f$ mit der Definition von $T(a)f$ übereinstimmt. Die erste Eigenschaft folgt nun hieraus. \square

4.5.2 Satz (Zusammenhang mit Langlands- L -Funktionen).

Sei π eine irreduzible, unverzweigte Hauptseriendarstellung und $a \in A^{\leq 0}$. Wir bezeichnen für $k \in \{1, \dots, n\}$ mit T_k den Operator $T(\text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n-k}, \underbrace{\varpi, \dots, \varpi}_k))$.

Wir schreiben $T_{k,\pi}$ für die Einschränkung von T_k auf V_π^I . Dann gilt mit $u = q^{-s}$

$$\det(1 - uT_{k,\pi})^{-1} = L(\pi, \wedge^k, s - \frac{k(n-k)}{2})^{k!(n-k)!}.$$

Für den Beweis zeigen wir, dass die Operatoren $T_{k,\pi}$ bezüglich einer geeigneten Reihenfolge der Basis f_σ , $\sigma \in S_n$, durch obere Dreiecksmatrizen dargestellt werden. Wir können dann die Determinante mit Proposition 4.2.13 berechnen. Um die Reihenfolge zu definieren, fassen wir S_n als Coxeter-Gruppe auf (siehe [BB05, 1.2.3]), die von den Transpositionen $(i, i+1)$, $i = 1, \dots, n-1$ erzeugt wird. Mit $l(\sigma)$ bezeichnen wir die Anzahl Fehlstände von σ . Dies stimmt mit der üblichen Definition von l überein, wenn man S_n als Coxeter-Gruppe auffasst (siehe [BB05, 1.5.2]).

4.5.3 Definition (Bruhat-Ordnung, [BB05, 2.1.1]).

Seien $\sigma, \tau \in S_n$ und \mathcal{T} die Menge der Transpositionen in S_n . Wir schreiben

$$\sigma \rightarrow \tau,$$

falls $\sigma^{-1}\tau \in \mathcal{T}$ und $l(\sigma) < l(\tau)$. Dann definieren wir $\sigma \leq \tau$, falls es Elemente $\pi_0, \dots, \pi_k \in S_n$ gibt, sodass

$$\sigma = \pi_0 \rightarrow \pi_1 \rightarrow \dots \rightarrow \pi_k = \tau.$$

Die so definierte partielle Ordnung nennt man die *Bruhat-Ordnung*.

4.5.4 Lemma.

Sei $\sigma_0 \in S_n$ die Transposition, die j und $n-j$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ vertauscht. Seien $\sigma, \tau \in S_n$. Dann sind äquivalent:

1. $\sigma \leq \tau$.
2. $\sigma\sigma_0 \geq \tau\sigma_0$.

Beweis: Seien zuerst $\sigma, \tau \in S_n$ mit $\sigma \rightarrow \tau$. Da die Transpositionen \mathcal{T} unter Konjugation invariant sind, gilt

$$(\tau\sigma_0)^{-1}\sigma\sigma_0 = \sigma_0^{-1}\sigma^{-1}\tau\sigma \in \mathcal{T},$$

und aus $l(\tau\sigma_0) = l(\sigma_0) - l(\tau)$ (siehe [Hum90, 1.8]) erhalten wir

$$l(\tau\sigma_0) = l(\sigma_0) - l(\tau) < l(\sigma_0) - l(\sigma) = l(\sigma\sigma_0).$$

Sei nun $\sigma \leq \tau$. Dann gibt es $\pi_1, \dots, \pi_k \in S_n$ mit

$$\sigma = \pi_0 \rightarrow \pi_1 \rightarrow \dots \rightarrow \pi_k = \tau.$$

Dann gilt

$$\tau\sigma_0 = \pi_k\sigma_0 \rightarrow \pi_{k-1}\sigma_0 \rightarrow \dots \rightarrow \pi_1\sigma_0 \rightarrow \pi_0\sigma_0 = \sigma\sigma_0,$$

d. h. $\tau\sigma_0 \leq \sigma\sigma_0$. Also folgt: $\sigma \leq \tau \implies \sigma\sigma_0 \geq \tau\sigma_0$. Ersetzt man σ und τ durch $\sigma\sigma_0$ und $\tau\sigma_0$, dann folgt die Rückrichtung. \square

Um $\sigma \leq \tau$ zu prüfen, verwenden wir das sogenannte *Tableau-Kriterium* (siehe [BB05, Theorem 2.6.3]):

Seien $\sigma, \tau \in S_n$. Für $1 \leq i \leq k \leq n$ seien $\sigma_{1,k} < \dots < \sigma_{k,k}$ so, dass

$$\{\sigma(1), \dots, \sigma(k)\} = \{\sigma_{1,k}, \dots, \sigma_{k,k}\},$$

d. h. $\sigma_{i,k}$ bezeichnet das i -te Element von $\{\sigma(1), \dots, \sigma(k)\}$, wenn man der Größe nach aufsteigend sortiert. Analog definiert man $\tau_{i,k}$. Dann sind äquivalent:

1. $\sigma \leq \tau$.
2. $\sigma_{i,k} \leq \tau_{i,k}$ für alle $1 \leq i \leq k \leq n$.

4.5.5 Proposition.

Für alle $a \in A^{\leq 0}$ und $\tau < \sigma \in S_n$ gilt:

$$\langle T_\pi(a)f_\tau, f_\sigma \rangle = 0.$$

Insbesondere kann man die Orthogonalbasis f_σ , $\sigma \in S_n$ so sortieren, dass jedes $T_\pi(a)$ simultan durch eine obere Dreiecksmatrix dargestellt wird.

Beweis: Sei $a \in A^{\leq 0}$ und $\sigma, \tau \in S_n$ mit $\langle T_\pi(a)f_\tau, f_\sigma \rangle \neq 0$. Dann folgt

$$\begin{aligned} 0 &\neq \int_K (T_\pi(a)f_\tau)(k) \overline{f_\sigma(k)} \, dk \\ &= \int_{K_\sigma} \sum_{yI \in IaI} f_\tau(kyI) \, dk \\ &= \text{vol}(K_\sigma) \sum_{yI \in IaI} f_\tau(\sigma yI). \end{aligned}$$

Somit existiert ein $yI \in IaI$, sodass $\sigma y \in AN\tau I$ und damit

$$\sigma y \tau^{-1} \in AN\tau I \tau^{-1}.$$

Wegen Lemma 4.2.3 können wir annehmen, dass y eine untere Dreiecksmatrix ist.

Für $x = b\tau i\tau^{-1} \in AN\tau I\tau^{-1}$ mit $b \in AN, i \in I$ sind alle unteren rechten Hauptminoren invertierbar, denn b ist eine obere Dreiecksmatrix. Somit gilt für $1 \leq k \leq n$ (Notation wie in 4.2.8)

$$\begin{aligned} \det(x_{\{k, \dots, n\}, \{k, \dots, n\}}) &= \det(b_{\{k, \dots, n\}, \{k, \dots, n\}}) \det((\tau i \tau^{-1})_{\{k, \dots, n\}, \{k, \dots, n\}}) \\ &= \underbrace{\det(b_{\{k, \dots, n\}, \{k, \dots, n\}})}_{\neq 0} \underbrace{\det(i_{\{\tau(k), \dots, \tau(n)\}, \{\tau(k), \dots, \tau(n)\}})}_{\in \mathcal{O}^\times}. \end{aligned}$$

Damit folgt, dass auch die unteren rechten Hauptminoren von $\sigma y \tau^{-1}$ invertierbar sind. Betrachte den ersten unteren rechten Hauptminor

$$(\sigma y \tau^{-1})_{n, n} = y_{\sigma(n), \tau(n)} \neq 0.$$

Weil y eine untere Dreiecksmatrix ist, folgt $\sigma(n) \geq \tau(n)$. Für den zweiten unteren rechten Hauptminor

$$\begin{aligned} 0 &\neq \det((\sigma y \tau^{-1})_{\{n-1, n\}, \{n-1, n\}}) \\ &= y_{\sigma(n-1)\tau(n-1)} \cdot y_{\sigma(n)\tau(n)} - y_{\sigma(n-1)\tau(n)} \cdot y_{\sigma(n)\tau(n-1)} \end{aligned}$$

folgt

$$\sigma(n-1) \geq \tau(n-1) \text{ und } \sigma(n) \geq \tau(n)$$

oder

$$\sigma(n-1) \geq \tau(n) \text{ und } \sigma(n) \geq \tau(n-1).$$

Für den $k+1$ -ten unteren rechten Hauptminor folgt aus

$$\begin{aligned} 0 &\neq \det((\sigma y \tau^{-1})_{\{n-k, \dots, n\}, \{n-k, \dots, n\}}) \\ &= \sum_{\varrho \in \text{Per}(\{n-k, \dots, n\})} \text{sgn}(\varrho) y_{\sigma(n-k), \tau(\varrho(n-k))} \cdot \dots \cdot y_{\sigma(n), \tau(\varrho(n))}, \end{aligned}$$

dass es eine Permutation ϱ_k der Menge $\{n-k, \dots, n\}$ gibt, sodass

$$y_{\sigma(n-k), \tau(\varrho_k(n-k))} \cdot \dots \cdot y_{\sigma(n), \tau(\varrho_k(n))} \neq 0,$$

d. h.

$$\sigma(n-j) \geq \tau(\varrho_k(n-j))$$

gilt für jedes $0 \leq j \leq k$. Sei $\sigma_0 \in S_n$ die Transposition, die j und $n-j$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ vertauscht. Dann folgt aus dem Tableau-Kriterium, dass $\tau\sigma_0 \leq \sigma\sigma_0$, und wegen Lemma 4.5.4 folgt $\sigma \leq \tau$. \square

4.5.6 Korollar.

Für $a \in A^{\leq 0}$ gilt

$$\det(1 - uT_\pi(a)) = \prod_{\sigma \in S_n} 1 - u \frac{\langle T_\pi(a)f_\sigma, f_\sigma \rangle}{\|f_\sigma\|^2}.$$

Beweis von Satz 4.5.2: Sei $a = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n-k}, \underbrace{\varpi, \dots, \varpi}_k)$.

Aus Korollar 4.5.6 und Lemma 4.5.1 folgt

$$\det(1 - uT_{k,\pi}) = \prod_{\sigma \in S_n} 1 - u \frac{\langle T_\pi(a)f_\sigma, f_\sigma \rangle}{\|f_\sigma\|^2} = \prod_{\sigma \in S_n} 1 - u \frac{\langle \pi_I(a)f_\sigma, f_\sigma \rangle}{\|f_\sigma\|^2}.$$

Mit Proposition 4.2.13 und Lemma 4.2.21 folgt

$$\det(1 - uT_{k,\pi}) = \prod_{\sigma \in S_n} 1 - u \cdot a^\varrho(\sigma a \sigma^{-1})^\lambda = \prod_{\sigma \in S_n} 1 - u \cdot q^{\frac{(n-k)k}{2}}(\sigma a \sigma^{-1})^\lambda.$$

S_n operiert via Konjugation auf der Menge der Diagonalmatrizen. Dabei ist

$$\text{Stab}(a) = \text{Per}(\{1, \dots, n-k\}) \times \text{Per}(\{n-k+1, \dots, n\}),$$

d. h. $|\text{Stab}(a)| = k!(n-k)!$. Der Orbit von a besteht aus allen Diagonalmatrizen, die an genau k Stellen den Eintrag ϖ und an allen anderen Stellen den Eintrag 1 haben. Die Elemente des Orbits von a entsprechen damit bijektiv k -elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$. Insgesamt erhalten wir

$$\det(1 - uT_{k,\pi}) = \prod_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I|=k}} \left(1 - q^{\frac{(n-k)k}{2}} u \cdot \prod_{i \in I} q^{-\lambda_i} \right)^{(n-k)!k!}.$$

Mit Lemma 2.8.2 folgt die Behauptung. \square

Für andere Darstellungen

In Satz 4.5.2 haben wir gezeigt, dass für irreduzible, unverzweigte Hauptseriendarstellungen π der Ausdruck $\det(1 - uT_{k,\pi})^{-1}$ eine Langlands- L -Funktion ist. Ausgehend davon bestimmen wir nun $\det(1 - uT_{k,\pi})$ für beliebige irreduzible, zulässige, unitäre Darstellungen von $\text{PGL}_2(F)$ und $\text{PGL}_3(F)$.

4.5.7 Satz.

Sei π eine irreduzible, zulässige Darstellung von $\text{PGL}_2(F)$. Wir schreiben T_π für $T_{1,\pi}$. Dann gilt

1. Ist π eine unverzweigte Hauptseriendarstellung mit Satake-Parametern $|\varpi|^\lambda$, $|\varpi|^{-\lambda}$, so gilt

$$\det(1 - uT_\pi) = (1 - uq^{\lambda+\frac{1}{2}})(1 - uq^{-\lambda+\frac{1}{2}}).$$

2. Ist $\pi = \chi \circ \det$ eine unverzweigte, eindimensionale Darstellung, so gilt

$$\det(1 - uT_\pi) = 1 - uq\chi(\varpi).$$

3. Ist π ein unverzweigter Twist der Steinberg-Darstellung, d. h. $\pi = \chi \otimes \text{St}$ mit einem unverzweigten Charakter χ , so gilt

$$\det(1 - uT_\pi) = 1 - u\chi(\varpi).$$

4. In allen anderen Fällen ist $\det(1 - uT_\pi) = 1$.

Beweis: Der Beweis verläuft analog wie die Berechnung von S_π in 4.3. \square

4.5.8 Satz.

Sei π eine irreduzible, unitäre Darstellung der Gruppe $\text{PGL}_3(F)$.

1. Ist π eine irreduzible, unverzweigte Hauptseriendarstellung mit zugehörigen Satake-Parametern $|\varpi|^{\lambda_1}, |\varpi|^{\lambda_2}, |\varpi|^{\lambda_3}$, so gilt

$$\begin{aligned}\det(1 - uT_{1,\pi}) &= (1 - uq^{1-\lambda_1})^2(1 - uq^{1-\lambda_2})^2(1 - uq^{1-\lambda_3})^2, \\ \det(1 - uT_{2,\pi}) &= (1 - uq^{1+\lambda_1})^2(1 - uq^{1+\lambda_2})^2(1 - uq^{1+\lambda_3})^2.\end{aligned}$$

2. Ist $\pi = \chi \circ \det$ eine unverzweigte eindimensionale Darstellung, so gilt

$$\begin{aligned}\det(1 - uT_{1,\pi}) &= 1 - \chi(\varpi)q^2u, \\ \det(1 - uT_{2,\pi}) &= 1 - \chi(\varpi)^2q^2u.\end{aligned}$$

3. Ist χ ein unverzweigter Charakter von F^\times mit $\chi^3 = 1$ und π die irreduzible Unterdarstellung von $\pi(\chi | \cdot, \chi, \chi | \cdot^{-1})$, so gilt

$$\begin{aligned}\det(1 - uT_{1,\pi}) &= 1 - \chi(\varpi)u, \\ \det(1 - uT_{2,\pi}) &= 1 - \chi^2(\varpi)u.\end{aligned}$$

4. Ist χ ein unverzweigter Charakter von F^\times und π die irreduzible Unterdarstellung von $\pi(\chi | \cdot^{-\frac{1}{2}}, \chi | \cdot^{\frac{1}{2}}, \chi^{-2})$, so gilt

$$\begin{aligned}\det(1 - uT_{1,\pi}) &= (1 - \chi^{-2}(\varpi)qu)(1 - \chi(\varpi)q^{\frac{3}{2}}u)^2, \\ \det(1 - uT_{2,\pi}) &= (1 - \chi^2(\varpi)qu)(1 - \chi(\varpi)^{-1}q^{\frac{3}{2}}u)^2.\end{aligned}$$

5. Ist χ ein unverzweigter Charakter von F^\times und π die irreduzible Unterdarstellung von $\pi(\chi | \cdot^{\frac{1}{2}}, \chi | \cdot^{-\frac{1}{2}}, \chi^{-2})$, so gilt

$$\begin{aligned}\det(1 - uT_{1,\pi}) &= (1 - \chi^{-2}(\varpi)qu)(1 - \chi(\varpi)q^{\frac{1}{2}}u)^2, \\ \det(1 - uT_{2,\pi}) &= (1 - \chi^2(\varpi)qu)(1 - \chi(\varpi)^{-1}q^{\frac{1}{2}}u)^2.\end{aligned}$$

6. In allen anderen Fällen ist $V_\pi^I = 0$, d. h.

$$\det(1 - uT_{1,\pi}) = \det(1 - uT_{2,\pi}) = 1.$$

Beweis: Der Beweis verläuft analog wie der Beweis von Satz 4.4.1. □

4.5.9 Bemerkung.

Die irreduzible Unterdarstellung von $\pi(\chi | \cdot |^{-\frac{1}{2}}, \chi | \cdot |^{\frac{1}{2}}, \chi^{-2})$ aus dem vierten Fall ist nach [KLW10, p. 345] unverzweigt. Insbesondere gilt Satz 4.5.2 nicht für alle irreduziblen, unverzweigten, unitären Darstellungen.

5 Globale Zetafunktionen von Quaternionenalgebren

Sei M eine Quaternionenalgebra über einem total reellen Zahlkörper F . In 5.1 zeigen wir, wie man für fast alle Primstellen ν von F lokale Gitter Γ_ν in $\mathrm{PGL}_2(F_\nu)$ konstruieren kann. Diese Gitter operieren im Allgemeinen mit Kanteninversion auf dem Bruhat-Tits-Baum \mathfrak{X}_ν . In 5.2 konstruieren wir ausgehend von den lokalen Gittern Γ_ν endliche Graphen X_ν . Damit können wir eine globale Zetafunktion als Euler-Produkt der Graph-Zetafunktionen (bzw. Bass-Ihara-Zetafunktionen) über diese Primstellen definieren:

$$\zeta(M, s) = \prod_{\nu} \zeta(X_\nu, q^{-s}).$$

In 5.3 untersuchen wir diese globale Zetafunktion auf ihre analytischen Eigenschaften. Wir zeigen, dass das Produkt für $\mathrm{Re}(s)$ hinreichend groß konvergiert und eine holomorphe Funktion darstellt. Wir zeigen, dass sie sich unter gewissen Umständen nicht über die Gerade $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ hinaus fortgesetzt lässt. Ferner zeigen wir, dass das entsprechende Euler-Produkt über die Determinantenterme aus der Ihara-Formel immer eine meromorphe Fortsetzung auf \mathbb{C} besitzt und eine Funktionalgleichung erfüllt.

In 5.4 skizzieren wir, wie sich diese Konstruktion für eine zentrale, einfache Algebra über F verallgemeinert, und zeigen die auftretenden Probleme in höherem Rang auf.

5.1 Lokale Gitter

In diesem Abschnitt zeigen wir, wie man aus einer Quaternionenalgebra über einem total reellen Zahlkörper für fast alle Primstellen ν lokale Gitter Γ_ν in $\mathrm{PGL}_2(F_\nu)$ konstruieren kann. Diese Konstruktion stammt von Lubotzky, Phillips und Sarnak [LPS88] und spielt in der Theorie der Ramanujan-Graphen eine wichtige Rolle (siehe zum Beispiel [Li95, § 2]).

Alle Resultate in diesem Abschnitt sind wohlbekannt. Wir folgen der Darstellung in [CFL⁺19].

Sei F ein Zahlkörper, d. h. eine endliche Erweiterung von \mathbb{Q} , und \mathcal{O} der Ganzheitsring von F . Wir betrachten eine Quaternionenalgebra M über F . Nach Theorem 2.9.1 gibt es eine endliche Primstellenmenge S von F , sodass M genau dann über F_ν verzweigt, wenn $\nu \in S$. Wir setzen im Folgenden immer voraus, dass M an den unendlichen Primstellen verzweigt, d. h. F ein total reeller Zahlkörper ist, und M über \mathbb{R} eine Divisionsalgebra ist. Weiter fordern wir, dass F die enge Klassenzahl 1 hat.

Eine *Ordnung* von M ist ein \mathcal{O} -Gitter in M , welches zugleich ein Unterring von M ist. Eine Ordnung L heißt *maximal*, wenn es keine größere Ordnung gibt, die L enthält.

Wir fixieren eine maximale Ordnung L von M . Für einen Ring R , der \mathcal{O} enthält, definieren wir die R -wertigen Punkte von M als

$$M(R) = L \otimes_{\mathcal{O}} R$$

und setzen

$$G(R) = M(R)^{\times} / R^{\times}.$$

Dann gilt $M(\mathcal{O}) = L$ und $M(F) = M$. Für eine Primstelle ν sei $G_{\nu} = G(F_{\nu})$ und $K_{\nu} = G(\mathcal{O}_{\nu})$. Für alle $\nu \notin S$ gilt

$$M(F_{\nu}) \cong M_2(F_{\nu}).$$

Wir können diesen Isomorphismus ferner so wählen, dass

$$M(\mathcal{O}_{\nu}) \cong M_2(\mathcal{O}_{\nu}).$$

Dann gilt für alle $\nu \notin S$: G_{ν} ist isomorph zu $\mathrm{PGL}_2(F_{\nu})$ und K_{ν} entspricht der maximal kompakten Untergruppe $\mathrm{PGL}_2(\mathcal{O}_{\nu})$.

Wir betrachten den Adele-Ring des Zahlkörpers F

$$\mathbb{A} = \prod_{\nu < \infty}^{\widehat{\mathcal{O}_{\nu}}} F_{\nu} \times \prod_{\nu | \infty} F_{\nu}$$

und die Gruppe

$$G(\mathbb{A}) = \prod_{\nu < \infty}^{\widehat{G(\mathcal{O}_{\nu})}} G(F_{\nu}) \times \prod_{\nu | \infty} G(F_{\nu}).$$

Da M über \mathbb{R} verzweigt, ist $G(\mathbb{R})$ kompakt (siehe [Lub10, S. 82]) und aus [PR94, 5.3] folgt, dass $G(F)$ eine diskrete, kokompakte Untergruppe von $G(\mathbb{A})$ ist. Beachte jedoch, dass $G(F)$ nicht torsionsfrei ist, denn jedes $x \in G(F)$ mit $\mathrm{tr}(x) = 0$ ist ein Torsionselement der Ordnung 2.

Wir betrachten die kompakte Untergruppe

$$K = \prod_{\nu < \infty} G(\mathcal{O}_{\nu}) \times \prod_{\nu | \infty} G(F_{\nu}) \tag{5}$$

von $G(\mathbb{A})$. Aus der starken Approximation folgt nun (siehe [CFL⁺19, § 7]):

Für jedes $\nu \notin S$ gilt

$$G(\mathbb{A}) = G(F)G(F_{\nu})K^{\nu},$$

wobei

$$K^{\nu} = \prod_{\substack{\nu' < \infty \\ \nu' \neq \nu}} G(\mathcal{O}_{\nu'}) \times \prod_{\nu' | \infty} G(K_{\nu'}).$$

Insbesondere gilt für jedes $\nu \notin S$

$$G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / K^{\nu} \cong \Gamma_{\nu} \backslash G(F_{\nu}),$$

wobei

$$\Gamma_\nu = G(F) \cap \prod_{\substack{\nu' < \infty \\ \nu' \neq \nu}} G(\mathcal{O}_{\nu'}).$$

Da F die enge Klassenzahl 1 hat, gilt nach [CGL09, 5.3.1]

$$\Gamma_\nu = G(\mathcal{O}[\frac{1}{\varpi}]). \quad (6)$$

Wenn Γ_ν ohne Kanteninversion auf dem Bruhat-Tits-Baum \mathfrak{X}_ν von $\mathrm{PGL}_2(F_\nu)$ operiert, kann man den Quotientengraph $\Gamma_\nu \backslash \mathfrak{X}_\nu$ bilden und die Bass-Ihara-Zetafunktion betrachten. Leider ist kein Kriterium bekannt, das sicherstellt, dass Γ_ν für fast alle ν ohne Kanteninversion operiert (oder sogar torsionsfrei ist). Wir ersetzen daher Γ_ν durch eine Untergruppe Γ_ν^1 vom Index 2, die ohne Kanteninversion auf dem Bruhat-Tits-Baum operiert. Durch geeignete Wahl von M können wir dann sicherstellen, dass Γ_ν^1 torsionsfrei ist.

5.2 Lokale Graphen

Sei $\nu \notin S$ und $\Gamma_\nu = G(\mathcal{O}[\frac{1}{\varpi}])$ wie in (6). Wir betrachten den Gruppenhomomorphismus

$$M(\mathcal{O}[\frac{1}{\varpi}])^\times \rightarrow \mathbb{Z}, \quad x \mapsto \nu(N(x)).$$

Dieser setzt zu einem Gruppenhomomorphismus $\phi: \Gamma_\nu \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ fort. Wir definieren Γ_ν^1 als den Kern von ϕ .

5.2.1 Lemma.

Sei $\nu \notin S$.

1. Γ_ν^1 operiert ohne Kanteninversion auf dem Bruhat-Tits-Baum \mathfrak{X}_ν von F_ν .
2. Der Index von Γ_ν^1 in Γ_ν hängt nicht von ν ab.
3. $[\Gamma_\nu : \Gamma_\nu^1] = 2$.

Beweis:

1. Die Bewertung der Norm jedes $\gamma \in \Gamma_\nu^1$ ist nach Definition von Γ_ν^1 gerade. Damit erhält Γ_ν^1 die Typen des Bruhat-Tits-Baumes und enthält insbesondere keine Kanteninversion.
2. Nach Definition ist $[\Gamma_\nu : \Gamma_\nu^1] \leq 2$. Angenommen, es gibt eine Stelle $\nu \notin S$, sodass $\Gamma_\nu = \Gamma_\nu^1$. Dann tritt in $L^2(\Gamma_\nu \backslash G_\nu)^{K_\nu}$ die nichttriviale eindimensionale Darstellung

$$\pi_\nu: G(F_\nu) \rightarrow \mathbb{C}^\times, \quad x \mapsto (-1)^{\nu(N(x))}$$

auf. Mit der starken Approximation können wir π_ν zu einer Darstellung π auf $L^2(G(F) \backslash G(\mathbb{A}))^K$ fortsetzen. Nach Proposition 3.6 in [LSV05] ist π eindimensional, d. h. in $L^2(G(F) \backslash G(\mathbb{A}))$ treten zwei eindimensionale Darstellungen auf.

Da sich diese jeweils als Tensorprodukt zerlegen, treten auch an jeder anderen Stelle zwei eindimensionale, unverzweigte Darstellungen auf. Damit gilt $\Gamma_\nu^1 = \Gamma_\nu$ an jeder Stelle $\nu \notin S$.

3. Es genügt zu zeigen, dass es eine Stelle ν gibt, für die $\Gamma_\nu^1 \neq \Gamma_\nu$ gilt. Sei p eine Primzahl, die in der Körpererweiterung F/\mathbb{Q} unverzweigt ist, und ν eine Bewertung über p . Nach Theorem 1 in [Rou19] gibt es ein ungerades $k \in \mathbb{N}$ und ein γ in der maximalen Ordnung L mit $N(\gamma) = p^k$, d. h. $N(\gamma)$ hat eine ungerade Bewertung bezüglich ν . Damit liegt $\gamma \in \Gamma_\nu$, aber nicht in Γ_ν^1 . \square

5.2.2 Definition.

Sei $\nu \notin S$ und \mathfrak{X}_ν der zu F_ν gehörige Bruhat-Tits-Baum. Wir definieren den Graphen X_ν als den Quotientengraphen $\Gamma_\nu^1 \backslash \mathfrak{X}_\nu$. Die Ecken von X_ν entsprechen den Doppelnebenklassen

$$\Gamma_\nu^1 \backslash G_\nu / K_\nu$$

und die orientierten Kanten

$$\Gamma_\nu^1 \backslash G_\nu / I_\nu,$$

wobei I_ν die Iwahori-Gruppe von $\mathrm{PGL}_2(F)$ bezeichnet.

X_ν ist dann ein zusammenhängender, bipartiter Graph. Beachte, dass Γ_ν^1 im Allgemeinen nicht torsionsfrei ist und X_ν daher nicht $q + 1$ -regulär sein muss. Durch geeignete Wahl der Quaternionenalgebra M können wir jedoch erreichen, dass Γ_ν^1 torsionsfrei ist.

5.2.3 Proposition.

Sei $\nu \notin S$. Dann gilt:

- Wenn M^\times nur die trivialen Torsionselemente ± 1 enthält, dann ist Γ_ν^1 torsionsfrei. X_ν ist dann ein $q + 1$ -regulärer Graph.
- Die Anzahl der Ecken von X_ν ist unabhängig von ν . Beide Bipartititätsklassen haben gleich viele Ecken.

Beweis: Sei $\gamma \in \Gamma_\nu^1$ ein Torsionselement. Wir wählen einen ganzen Vertreter für γ und bezeichnen diesen ebenfalls mit γ . Da Γ_ν^1 keine Kanteninversion enthält, fixiert γ eine Ecke (siehe 2.5). Weiter gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$, sodass $N(\gamma) = \varpi^{2k}$. Das Element $\varpi^{-k}\gamma \in M^\times$ hat dann die Norm 1 und eine geeignete Potenz von $\varpi^{-k}\gamma$ operiert trivial auf dem Bruhat-Tits-Baum. Diese Potenz ist somit ein Skalar der Norm 1, also ± 1 , denn F ist total reell. Da M^\times nur die trivialen Torsionselemente ± 1 enthält, sind auch $\varpi^{-k}\gamma$ und γ Skalare.

Wegen der starken Approximation entsprechen die Doppelnebenklassen $\Gamma_\nu \backslash G_\nu / K_\nu$ den Doppelnebenklassen $G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / K$. Nach Konstruktion und Lemma 5.2.1 ist jede Doppelnebenklasse $\Gamma_\nu \backslash G_\nu / K_\nu$ die disjunkte Vereinigung zweier Doppelnebenklassen $\Gamma_\nu^1 \backslash G_\nu / K_\nu$. Damit hat jede Bipartititätsklasse $|G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / K|$ viele Ecken. \square

Wir geben nun noch für $F = \mathbb{Q}$ und $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ jeweils ein Kriterium, das sicherstellt, dass eine Quaternionenalgebra M über F keine nichttrivialen Torsionselemente enthält. Insbesondere sind dann für M alle lokalen Graphen regulär und bipartit. Das erste Kriterium ist wohlbekannt (siehe zum Beispiel [Dei14]), das zweite eine direkte Verallgemeinerung hiervon.

5.2.4 Lemma.

- Sei $F = \mathbb{Q}$, M eine rationale Quaternionenalgebra, die über \mathbb{R} eine Divisionsalgebra ist, und S die Menge aller Stellen, an denen M verzweigt. Gibt es Primzahlen $p, q \in S$ (nicht notwendigerweise verschieden), sodass $p \equiv 1 \pmod{3}$ und $q \equiv 1 \pmod{4}$, dann besitzt M^\times nur die trivialen Torsionselemente ± 1 .
- Sei $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und S die Menge der Primstellen, an denen M verzweigt. Gibt es Primzahlen $p, q \in S$ (nicht notwendigerweise verschieden), sodass $p \equiv 13 \pmod{24}$ oder $p \equiv 19 \pmod{24}$ und $q \equiv 5 \pmod{8}$, dann besitzt M^\times nur die trivialen Torsionselemente ± 1 .

Beweis: Für die erste Aussage siehe Lemma 2.2 in [Dei14].

Sei $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $x \in M^\times$ ein Torsionselement, d. h. es gibt ein n mit $x^n = 1$. Wir wählen n minimal mit dieser Eigenschaft. $K = F(x)$ ist eine Körpererweiterung von $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ vom Grad ≤ 2 . Da x eine primitive n -te Einheitswurzel ist, enthält K den n -ten Kreisteilungskörper ζ_n . Wir erhalten also das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 & K & \\
 \subset & & \supset \\
 \zeta_n & & \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \\
 \supset & & \subset \\
 & \mathbb{Q} &
 \end{array}$$

Fall $[\zeta_n : \mathbb{Q}] = 4$: Dann folgt $\zeta_n = K$ und $n = 8$, denn ζ_5, ζ_{10} und ζ_{12} enthalten $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ nicht als Unterkörper. Nach [Neu92, Satz I.10.3] zerfällt in ζ_8 jede ungerade Primzahl in ein Produkt von verschiedenen Primidealen. Nach [Rei03, § 32] verzweigt jedoch jede Primzahl in S träge in der Körpererweiterung K/F . Dies ist ein Widerspruch.

Fall $[\zeta_n : \mathbb{Q}] = 2$: Dann folgt $n \in \{3, 4, 6\}$. Da $p \equiv 1 \pmod{3}$ zerfällt p nach [Neu92, I.10.4] in $\zeta_3 = \zeta_6$ in ein Produkt von zwei Primidealen. Ebenso zerfällt q in ζ_4 in zwei Primideale. Da p und q modulo 8 kongruent zu 3 oder 5 sind, sind sie in der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ träge (siehe [Wei98, 6-2-4]). In der Körpererweiterung K/F sind p, q ebenfalls träge, denn $p, q \in S$. Dies ist ein Widerspruch.

Somit folgt $\zeta_n = \mathbb{Q}$ und $x = \pm 1$. □

5.3 Die globale Situation

Sei M eine Quaternionenalgebra, sodass M an jeder unendlichen Stelle von F zerfällt. Wir fixieren eine maximale Ordnung L von M . Sei S die Menge der Primstellen, an denen M verzweigt. Für $\nu \notin S$ sei X_ν der Graph aus Definition 5.2.2, $\zeta(X_\nu, u)$ die Bass-Ihara-Zetafunktion von X_ν und $\xi(X_\nu, u)^{-1}$ der Determinantenterm aus der Ihara-Formel 2.6.5. Wir definieren

$$\zeta(M, s) = \prod_{\nu \notin S} \zeta(X_\nu, q^{-s})$$

und

$$\xi(M, s) = \prod_{\nu \notin S} \xi(X_\nu, q^{-s}).$$

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass das Euler-Produkt der Determinantenterme aus der Ihara-Formel eine analytische Fortsetzung besitzt und eine Funktionalgleichung erfüllt. In 3.1 haben wir bewiesen, dass die L -Funktion des unverzweigten Teils der Rechtsdarstellungen R_ν^1 auf $L^2(\Gamma_\nu^1 \backslash G_\nu)$ in Relation zur Graph-Zetafunktion steht:

$$L((R_\nu^1)^{\text{uv}}, s - \frac{1}{2}) = \xi(X_\nu, q^{-s})^{-1}.$$

Wir zeigen, dass

$$\frac{L((R_\nu^1)^{\text{uv}}, s)}{(1 - q^{-2s})^{2n}} = L(R_\nu^{\text{uv}}, \otimes^2, 2s),$$

wobei R_ν die Rechtsdarstellung auf $L^2(\Gamma_\nu \backslash G_\nu)$ ist. Die rechte Seite der Gleichung können wir dann global als Rankin-Selberg-Integral interpretieren und erhalten die analytische Fortsetzung.

Durch Analyse der Kantenzahl beweisen wir, dass im rationalen, torsionsfreien Fall das entsprechende Euler-Produkt der Graph-Zetafunktionen nicht über die Gerade $\text{Re}(s) = \frac{1}{2}$ hinaus fortgesetzt werden kann. Die Aussage verallgemeinern wir anschließend für die Hamilton-Quaternionen.

5.3.1 Theorem.

1. $\zeta(M, s)$ und $\xi(M, s)$ konvergieren für $\text{Re}(s)$ hinreichend groß und stellen dort holomorphe Funktionen dar.
2. $\xi(M, s)$ besitzt eine meromorphe Fortsetzung auf \mathbb{C} und erfüllt eine Funktionalgleichung, die $\xi(M, s)$ mit $\xi(M, \frac{3}{2} - s)$ in Beziehung setzt.
3. Ist M eine rationale Quaternionenalgebra und besitzt M^\times nur die trivialen Torsionselemente ± 1 , dann kann $\zeta(M, s)$ nicht meromorph über die Gerade $\text{Re}(s) = \frac{1}{2}$ hinaus fortgesetzt werden.

Die Bedingung, dass M^\times keine nichttrivialen Torsionselemente enthält, ist nicht notwendig für die Nichtfortsetzbarkeit von $\zeta(M, s)$. Die genaue Bestimmung der Kantenzahl ist in diesem Fall jedoch deutlich aufwendiger. Wir führen dies exemplarisch am Beispiel der Hamilton-Quaternionen vor.

5.3.2 Satz.

Seien M die Hamilton-Quaternionen über \mathbb{Q} und L die Hurwitz-Quaternionen

$$L = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i + \mathbb{Z}j + \mathbb{Z}\frac{1+i+j+k}{2}.$$

Die Funktion $\zeta(M, s)$ kann nicht über die Gerade $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$ hinaus meromorph fortgesetzt werden.

Zum Beweis von Theorem 5.3.1

Wir zeigen zuerst die Konvergenz des Euler-Produktes für $\operatorname{Re}(s)$ hinreichend groß. Nach Proposition 5.2.3 hängt die Anzahl Ecken von X_ν nicht von ν ab. Wir bezeichnen sie mit $2n$. Die Determinantenformel 2.6.7 besagt: $\zeta(X_\nu, u)^{-1} = \det(1 - uT_\nu)$. Hierbei ist T_ν eine $l \times l$ -Matrix, wobei l die Anzahl orientierter Kanten von X_ν ist. X_ν besitzt höchstens $2n(q+1)$ viele orientierte Kanten. Da sich die Einträge in jeder Zeile von T_ν zu q aufsummieren, sind die Eigenwerte von T_ν betragsmäßig durch q beschränkt. Wir berechnen für $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$:

$$\log(\det(1 - q^{-s}T_\nu)^{-1}) = \sum_{\lambda} \log((1 - \lambda q^{-s})^{-1}) = \sum_{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda q^{-s})^k}{k},$$

wobei sich die Summe über alle Eigenwerte von T_ν erstreckt. Wir erhalten

$$|\log(\det(1 - q^{-s}T_\nu)^{-1})| \leq \sum_{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} (q^{1-s})^k \leq 2n(q+1) \cdot \frac{q^{1-s}}{1 - q^{1-s}}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{\nu \notin S} |\log(\det(1 - q^{-s}T_\nu)^{-1})| &\leq 2n \sum_{\nu \notin S} (q+1) \cdot \frac{q^{1-s}}{1 - q^{1-s}} \\ &\leq 2n \sum_{\nu \notin S} q^2 \cdot \frac{q^{1-s}}{1 - 2^{1-s}} \\ &\leq \frac{2n}{1 - 2^{1-s}} \sum_{\nu \notin S} q^{3-s}. \end{aligned}$$

Die Reihe $\sum_{\nu} q^{-s}$ konvergiert für $s > 1$, d. h. die Reihe der Logarithmen konvergiert für $\operatorname{Re}(s) > 4$ absolut. Dann konvergiert das Euler-Produkt dort lokal gleichmäßig absolut und stellt eine holomorphe Funktion dar.

Um zu zeigen, dass $\xi(M, s)$ für $\operatorname{Re}(s)$ hinreichend groß konvergiert ist, genügt es wegen der Ihara-Formel 2.6.5 zu zeigen, dass

$$\prod_{\nu \notin S} \left(\frac{1}{(1 - (q^{-s})^2)} \right)^{|E(X_\nu)| - |V(X_\nu)|}$$

für $\operatorname{Re}(s)$ hinreichend groß holomorph und nullstellenfrei ist. Wir betrachten wieder die Reihe der Absolutbeträge der Logarithmen und erhalten für $s \in \mathbb{R}$, $s > \frac{1}{2}$ wie oben

$$\begin{aligned} \sum_{\nu \notin S} \left| (|E(X_\nu)| - |V(X_\nu)|) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{-2ks}}{k} \right| &\leq \sum_{\nu \notin S} 2nq \sum_{k=1}^{\infty} q^{-2ks} \\ &\leq 2n \sum_{\nu \notin S} q \frac{q^{-2s}}{1 - q^{-2s}} \\ &\leq \frac{2n}{1 - 2^{-2s}} \sum_{\nu \notin S} q^{1-2s}. \end{aligned}$$

Somit konvergiert die Reihe der Logarithmen für $\operatorname{Re}(s) > 1$ absolut und das Produkt ist auf diesem Gebiet holomorph und nullstellenfrei.

Zur analytischen Fortsetzbarkeit von $\xi(M, s)$: Korollar 3.2.2 gibt uns eine Verbindung von $\xi(X_\nu, q^{-s})$ und der Langlands- L -Funktion des unverzweigten Teils der Rechtsdarstellung auf $L^2(\Gamma_\nu^1 \backslash G_\nu)$. Der Quotient $\Gamma_\nu^1 \backslash G_\nu / K_\nu$ hat im Gegensatz zu $\Gamma_\nu \backslash G_\nu / K_\nu$ keine globale Interpretation. Jedoch können wir mit der folgenden Proposition die Rechtsdarstellung bezüglich Γ_ν^1 und Γ_ν in Beziehung setzen.

5.3.3 Proposition.

Sei $\nu \notin S$ und χ_ν der nichttriviale, unverzweigte Charakter der Ordnung 2 von F_ν^\times

$$\chi_\nu(x) = (-1)^{\nu(x) \bmod 2}.$$

Dann gilt:

1. Ist $R_\nu^{\text{uv}} = \bigoplus_{i=1}^n \pi_i$ die Zerlegung des unverzweigten Teils der Rechtsdarstellung auf $L^2(\Gamma_\nu \backslash G_\nu)$ in irreduzible Darstellungen, so ist

$$\bigoplus_{i=1}^n \pi_i \oplus \bigoplus_{i=1}^n \chi_\nu \otimes \pi_i$$

die Zerlegung des unverzweigten Teils der Rechtsdarstellung auf $L^2(\Gamma_\nu^1 \backslash G_\nu)$ in irreduzible Darstellungen.

2. Ist π eine irreduzible, unverzweigte Darstellung von G_ν mit Satake-Parametern $q^\lambda, q^{-\lambda}$, so hat $\chi_\nu \otimes \pi$ die Satake-Parameter $-q^\lambda, -q^{-\lambda}$ und es gilt:

$$L(\pi, s)L(\chi_\nu \otimes \pi, s) = \frac{1}{(1 - q^{2\lambda-2s})(1 - q^{-2\lambda-2s})}.$$

3. $\xi(X_\nu, q^{-s})^{-1} = (1 - q^{-2s+1})^{2n} \cdot \prod_{i=1}^n L(\pi_i, \otimes^2, 2s - 1)$.

Beweis: Die getwistete Darstellung $\chi_\nu \otimes \pi_i$ ist eine irreduzible, unverzweigte Unterdarstellung von $L^2(\Gamma_\nu^1 \backslash G_\nu)^{K_\nu}$, aber nicht von $L^2(\Gamma_\nu \backslash G_\nu)^{K_\nu}$. Aus Lemma 5.2.1 folgt $|\Gamma_\nu^1 \backslash G_\nu / K_\nu| = 2 \cdot |\Gamma_\nu \backslash G_\nu / K_\nu|$ und damit

$$L^2(\Gamma_\nu^1 \backslash G_\nu)^{K_\nu} = \bigoplus_{i=1}^n \pi_i \oplus (\chi_\nu \otimes \pi_i).$$

Hat π_i die Satake-Parameter $|\varpi|^\lambda, |\varpi|^{-\lambda}$, dann hat $\chi_\nu \otimes \pi_i$ die Satake-Parameter $-|\varpi|^\lambda, -|\varpi|^{-\lambda}$, d. h.

$$\begin{aligned} L(\pi_i, s)^{-1} L(\chi_\nu \otimes \pi_i, s)^{-1} &= (1 - q^{-s-\lambda})(1 - q^{-s+\lambda})(1 + q^{-s-\lambda})(1 + q^{-s+\lambda}) \\ &= (1 - q^{-2s-2\lambda})(1 - q^{-2s+2\lambda}). \end{aligned}$$

Die L -Funktion $L(\pi, \otimes^2, s)$ ist nach 2.8.1 gegeben durch

$$L(\pi, \otimes^2, s)^{-1} = (1 - q^{-s-2\lambda})(1 - q^{-s+2\lambda})(1 - q^{-s})^2.$$

Wir wenden Satz 3.1.4 an und erhalten

$$\begin{aligned} \xi(X_\nu, q^{-s})^{-1} &= \prod_{i=1}^n L(\pi_i, s - \frac{1}{2}) \cdot L(\chi_\nu \otimes \pi_i, s - \frac{1}{2}) \\ &= \prod_{i=1}^n \left(L(\pi_i, \otimes^2, 2s - 1)(1 - q^{-2s+1})^2 \right). \end{aligned}$$

Nun folgt die Behauptung. □

Wir nutzen nun die starke Approximation und können damit das Euler-Produkt global interpretieren. Sei K wie in (5), R^K die Rechtsdarstellung auf $L^2(G(F) \backslash G(\mathbb{A}))^K$ und

$$R^K = \bigoplus_{i=1}^n \pi_i$$

die direkte Zerlegung in irreduzible Unterdarstellungen. Jede solche Darstellung kann dann als Tensorprodukt über die Stellen von F geschrieben werden (siehe [Fla79])

$$\pi_i = \bigotimes_{\nu} \pi_{i,\nu},$$

wobei $\pi_{i,\nu}$ irreduzible Darstellungen von G_ν sind. Nach Wahl von K ist $\pi_{i,\nu}$ für $\nu \notin S$ eine unverzweigte Unterdarstellung der Rechtsdarstellung auf $L^2(\Gamma_\nu \backslash G_\nu)$. Umgekehrt kann man mit der starken Approximation jede irreduzible, unverzweigte Unterdarstellung der Rechtsdarstellung R_ν auf $L^2(\Gamma_\nu \backslash G_\nu)$ zu einer globalen Unterdarstellung auf $L^2(G(F) \backslash G(\mathbb{A}))^K$ fortsetzen.

Damit erhalten wir, dass sich die lokalen und globalen Darstellungen entsprechen (siehe auch [Lub10, 6.3, 7.1]):

$$R_\nu^{\text{uv}} = \bigoplus_{i=1}^n \pi_{i,\nu}.$$

Wir erhalten

$$\xi(M, s) = \prod_{\nu \notin S} (1 - q^{-2s+1})^{2n} \cdot \prod_{i=1}^n L^S(\pi_i, \otimes^2, 2s-1) = \zeta_F^S(2s-1)^{2n} \prod_{i=1}^n L^S(\pi, \otimes^2, 2s-1).$$

Hierbei bezeichnet $\zeta_F(s)$ die Dedekindsche Zetafunktion und $L(\pi, \otimes^2, s)$ die Rankin-Selberg- L -Funktion der automorphen Darstellung π mit sich selbst (siehe [Cog04]). $\zeta_F^S(s)$ und L^S sind entsprechend die unvollständigen Euler-Produkte über die Stellen $\nu \notin S$. Sowohl die Dedekindsche Zetafunktion als auch $L(\pi, \otimes^2, s)$ sind meromorph auf \mathbb{C} und erfüllen eine Funktionalgleichung, die s mit $1-s$ in Beziehung setzt (siehe [Neu92, VII.5], [Cog04, 9.4]). Beachte hierbei, dass jede unverzweigte Darstellung von $\text{PGL}_2(F_\nu)$ isomorph zu ihrer kontragredienten Darstellung ist. Ferner ist jede nicht eindimensionale Unterdarstellung von $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ automorph, denn $G(F)$ ist kokompakt (vgl. auch [Gel75, § 10]). Es tritt jedoch nur die triviale, eindimensionale Darstellung π_0 in $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))^K$ auf. π_0 hat an jeder Stelle die Satake-Parameter $q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}$ und damit gilt

$$L^S(\pi_0, \otimes^2, s) = \prod_{\nu \notin S} \frac{1}{(1 - q^{-s-1})(1 - q^{-s+1})}.$$

Dieses Produkt ist wieder ein unvollständiges Euler-Produkt für $\zeta_F(s+1)\zeta_F(s-1)$ und erfüllt damit auch eine Funktionalgleichung bezüglich $s \mapsto 1-s$.

Damit besitzt $\xi(M, s)$ eine Funktionalgleichung, die s mit $\frac{3}{2} - s$ in Beziehung setzt. Die genaue Funktionalgleichung hängt hierbei von den Stellen $\nu \in S$ ab.

Sei nun M eine rationale Quaternionenalgebra, sodass M^\times keine nichttrivialen Torsionselemente enthält. Wir verwenden die Ihara-Formel 2.1.2 und erhalten

$$\zeta(M, s) = \xi(M, s) \cdot \prod_{p \notin S} (1 - p^{-2s})^{np+1}.$$

Die Aussage folgt nun, sobald wir gezeigt haben, dass

$$\prod_{p \notin S} (1 - p^{-s})^{np}$$

nicht meromorph über die Gerade $\text{Re}(s) = 1$ hinaus fortgesetzt werden kann. Dies folgt aus dem folgenden Lemma, das auf den Antworten der Nutzer REUNS und GH FROM MATHOVERFLOW auf eine Frage¹ bei MathOverflow basiert. Ihnen sei an dieser Stelle herzlich gedankt.

¹<https://mathoverflow.net/questions/275706/>

5.3.4 Lemma.

Die Funktion

$$\eta(s) = \prod_p \frac{1}{(1 - p^{-s})^p}$$

konvergiert lokal gleichmäßig absolut für $\operatorname{Re}(s) > 2$ und stellt dort eine holomorphe Funktion ohne Nullstellen dar. Für $N \in \mathbb{N}$ besitzt $\eta(s)^{N!}$ eine meromorphe Fortsetzung auf das Gebiet $\operatorname{Re}(s) > 1 + \frac{1}{N+1}$. Jede analytische Fortsetzung von η hat unter anderem an den Stellen

$$\left\{ 1 + \frac{\varrho}{p} \mid \begin{array}{l} \varrho \text{ einfache Nullstelle der Riemannschen Zetafunktion mit } \operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}, \\ p \text{ Primzahl} \end{array} \right\}$$

Null- oder Polstellen. $\eta(s)$ kann nicht über die Gerade $\operatorname{Re}(s) = 1$ hinaus analytisch fortgesetzt werden.

Beweis: Zuerst zeigen wir die absolute Konvergenz des Produktes für $\operatorname{Re}(s) > 2$. Das Produkt

$$\prod_p \frac{1}{(1 - p^{-s})^p}$$

konvergiert genau dann, wenn die zugehörige Reihe der Logarithmen

$$- \sum_p p \log(1 - p^{-s})$$

konvergiert. Sei nun $s \in \mathbb{R}$ mit $s > 2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} - \sum_p p \log(1 - p^{-s}) &= \sum_p p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^{-ks}}{k} \leq \sum_p p \sum_{k=1}^{\infty} p^{-ks} = \sum_p p \frac{p^{-s}}{1 - p^{-s}} \\ &\leq \sum_p \frac{p^{1-s}}{1 - 2^{-s}} = \frac{1}{1 - 2^{-s}} \sum_p p^{1-s} \\ &\leq \frac{1}{1 - 2^{-s}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{1-s}. \end{aligned}$$

Damit konvergiert die Reihe für $\operatorname{Re}(s) > 2$ absolut und damit auch das Produkt. Insbesondere ist $\eta(s)$ für $\operatorname{Re}(s) > 2$ eine holomorphe Funktion.

Sei nun $N \in \mathbb{N}$ und μ die Möbius-Funktion. Wir definieren

$$f_N(s) = \prod_{n=1}^N \zeta(ns - n)^{\frac{\mu(n)}{n}}.$$

Ist $\operatorname{Re}(s) > 2$, dann ist $\operatorname{Re}(ns - n) > 1$. Da die Riemannsche Zetafunktion für $\operatorname{Re}(s) > 1$ weder Null- noch Polstellen hat, ist $f_N(s)$ für $\operatorname{Re}(s) > 2$ holomorph.

Wir wählen den Hauptzweig des Logarithmus und erhalten für $\operatorname{Re}(s) > 2$ wegen absoluter Konvergenz

$$\begin{aligned}\log(f_N(s)) &= \sum_{n=1}^N \frac{\mu(n)}{n} \log(\zeta(ns - n)) \\ &= \sum_p \sum_{n=1}^N \frac{\mu(n)}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^{(n-ns)k}}{k} \\ &= \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p^{m-ms}}{m} \left(\sum_{\substack{n|m \\ n \leq N}} \mu(n) \right).\end{aligned}$$

Mit der Möbius-Inversionsformel

$$\sum_{n|m} \mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } m = 1, \\ 0 & \text{falls } m > 1, \end{cases}$$

folgt

$$\log(f_N(s)) = \sum_p \left(p^{1-s} + \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{p^{m-ms}}{m} \sum_{\substack{n|m \\ n \leq N}} \mu(n) \right).$$

Wie oben gesehen, gilt für $\operatorname{Re}(s) > 2$

$$\log(\eta(s)) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p^{1-ms}}{m}.$$

Damit folgt für $\operatorname{Re}(s) > 2$

$$\log\left(\frac{\eta(s)}{f_N(s)}\right) = \sum_p \sum_{m=2}^{\infty} \frac{p^{1-ms}}{m} - \sum_p \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{p^{m-ms}}{m} \left(\sum_{\substack{n|m \\ n \leq N}} \mu(n) \right).$$

Es gilt für $s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\left| \sum_p \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{p^{m-ms}}{m} \sum_{\substack{n|m \\ n \leq N}} \mu(n) \right| &\leq \sum_p \sum_{m=N+1}^{\infty} p^{m-ms} = \sum_p \frac{p^{(N+1)(1-s)}}{1 - p^{1-s}} \\ &\leq \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \sum_p p^{(N+1)(1-s)}.\end{aligned}$$

Diese Reihe konvergiert also für $\operatorname{Re}(s) > 1 + \frac{1}{N+1}$ absolut. Durch eine analoge Rechnung erhält man, dass die Reihe

$$\sum_p \sum_{m=2}^{\infty} \frac{p^{1-ms}}{m}$$

für $\operatorname{Re}(s) > 1$ absolut konvergiert. Insbesondere konvergiert $\log\left(\frac{\eta(s)}{f_N(s)}\right)$ für $\operatorname{Re}(s) > 1 + \frac{1}{N+1}$ absolut und die Funktion $\frac{\eta(s)}{f_N(s)}$ ist dort holomorph und nullstellenfrei.

$f_N(s)$ ist aufgrund der rationalen Exponenten in der Definition a priori nur abseits von Null- und Polstellen holomorph. Jedoch ist $f_N^{N!}$ meromorph und wir erhalten, dass $\eta(s)^{N!}$ eine meromorphe Fortsetzung auf das Gebiet $\operatorname{Re}(s) > 1 + \frac{1}{N+1}$ besitzt.

Sei nun p eine Primzahl und ϱ eine einfache Nullstelle der Riemannschen Zetafunktion mit $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$. Dann hat der Faktor $\zeta(ps - p)$ für $s = 1 + \frac{\varrho}{p}$ eine Nullstelle. Jeder Faktor in $f_{2p}^{(2p)!}$ tritt mit einem Exponenten auf, der durch p^2 teilbar ist, außer die Faktoren, die zu p und zu $2p$ gehören. $\zeta(2ps - 2p)$ hat an der Stelle $s = 1 + \frac{\varrho}{p}$ weder eine Null- noch Polstelle, denn die Riemannsche Zetafunktion verschwindet auf der Gerade $\operatorname{Re}(s) = 1$ nicht und $\varrho \neq \frac{1}{2}$. Somit hat $f_{2p}^{(2p)!}$ an der Stelle $1 + \frac{\varrho}{p}$ eine Null- oder Polstelle. Da $\log\left(\frac{\eta(s)}{f_{2p}(s)}\right)$ für $\operatorname{Re}(s) > 1 + \frac{1}{2p+1}$ holomorph ist, muss η an der Stelle $1 + \frac{\varrho}{p}$ ebenfalls eine Null- oder Polstelle besitzen.

Da ein positiver Anteil der Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion einfach ist und auf der kritischen Geraden $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$ liegt [HB79] und aufgrund der asymptotischen Verteilung der Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion [Ten15, S. 252f] häufen sich die Null- oder Polstellen von $\eta(s)$ bei $\operatorname{Re}(s) = 1$. Insbesondere kann η nicht über die Gerade $\operatorname{Re}(s) = 1$ hinaus meromorph fortgesetzt werden. \square

Damit ist der Beweis des Theorems abgeschlossen.

Zum Beweis von Satz 5.3.2

Das wesentliche Werkzeug für den Beweis von Satz 5.3.2 ist die folgende Proposition, die für die rationalen Hamilton-Quaternionen die Anzahl Kanten des Quotientengraphen $X_p = \Gamma_p^1 \backslash \mathfrak{X}_p$ angibt.

5.3.5 Proposition.

Sei $p \neq 2, 3$. Dann ist die Anzahl Kanten von X_p gegeben durch

$$|E(X_p)| = \begin{cases} \frac{p+23}{12} & \text{falls } p \equiv 1 \pmod{12}, \\ \frac{p+7}{12} & \text{falls } p \equiv 5 \pmod{12}, \\ \frac{p+17}{12} & \text{falls } p \equiv 7 \pmod{12}, \\ \frac{p+1}{12} & \text{falls } p \equiv 11 \pmod{12}. \end{cases}$$

Der Beweis der Proposition erfordert einige Vorbereitungen. Zuerst bemerken wir, dass X_p ein bipartiter Graph mit zwei Ecken ist, denn die Klassenzahl der Hurwitz-Quaternionen ist 1 (siehe [Voi21, 25.4]). Wir betrachten daher, wie viele orientierte Kanten, die von \mathfrak{o} im Bruhat-Tits-Baum ausgehen, unter der Wirkung von Γ_p^1 miteinander identifiziert werden. Die orientierten Kanten, die von \mathfrak{o} ausgehen, entsprechen den Nebenklassen K_p/I_p , wobei I_p die Iwahori-Untergruppe bezeichnet. Es genügt also die Wirkung der Gruppe

$$\Gamma_0 := \Gamma_p^1 \cap K_p = \{x \in M(\mathbb{Z}) : N(x) = 1\} / \{\pm 1\}$$

auf K_p/I_p zu betrachten. Nach [Voi21, 11.2] sind die Elemente der Norm 1 in $M(\mathbb{Z})$ gegeben durch

$$\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} \cup \left\{ \frac{1}{2}(a + bi + cj + dk) \mid a, b, c, d \in \{-1, 1\} \right\},$$

insbesondere hat Γ_0 12 Elemente.

Die Wirkung von Γ_0 auf \mathfrak{X}_p ist dadurch definiert, dass wir G_p mit $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$ identifizieren. Wir wählen daher zuerst einen expliziten Isomorphismus zwischen den p -adischen Punkten der Quaternionenalgebra und den 2×2 -Matrizen über \mathbb{Q}_p . Dann zeigen wir, dass die von $\gamma \in \Gamma_0$ stabilisierten Kanten den Eigenvektoren von γ über dem Restklassenkörper $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ entsprechen. Wir berechnen die Eigenvektoren von $\gamma \in \Gamma_0$ in Abhängigkeit von p und können damit die Stabilisatorgruppen der Kanten bestimmen.

Das folgende Lemma ist im Fall $p \equiv 1 \pmod{4}$ wohlbekannt (siehe zum Beispiel [LSV05, 7.4]), der allgemeine Fall ist jedoch in der Literatur nicht so einfach zu finden.

5.3.6 Lemma (Expliziter Isomorphismus).

Sei $p \neq 2$ eine Primzahl.

1. Es gibt $u, v \in \mathbb{Z}_p$ mit

$$u^2 + v^2 = -1.$$

Ist $p \equiv 1 \pmod{4}$, dann können wir $v = 0$ wählen.

2. Für jedes solche Paar u, v ist die Abbildung

$$\phi: M(\mathbb{Q}_p) \rightarrow M_2(\mathbb{Q}_p), \quad a + bi + cj + dk \mapsto \begin{pmatrix} a + cu + dv & b + cv - du \\ -b + cv - du & a - cu - dv \end{pmatrix}$$

ein Isomorphismus assoziativer, nichtkommutativer Algebren, der $M(\mathbb{Z}_p)$ mit $M_2(\mathbb{Z}_p)$ identifiziert.

Es gilt für alle $x \in M(\mathbb{Q}_p)$

$$N(x) = \det(\phi(x)), \quad \mathrm{tr}(x) = \mathrm{tr}(\phi(x)).$$

Beweis: Die erste Aussage folgt aus [Lam73, XI.2.4] und die zweite folgt durch eine einfache Rechnung. \square

5.3.7 Lemma.

Sei $F = \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$. Die Abbildung

$$K_p/I_p \rightarrow \mathcal{P}^1(F), \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} I \mapsto \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} F^\times$$

ist eine Bijektion. Hierbei sei $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ als ganzer Vertreter gewählt.

Beweis: Wir wählen für alle Rechnungen ganze Vertreter.

- Wohldefiniertheit: Seien $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in K_p$ mit

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} I_p = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} I_p.$$

Dies ist äquivalent dazu, dass

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} d_2 & -b_2 \\ -c_2 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 d_2 - c_1 b_2 & b_1 d_2 - d_1 b_2 \\ -a_1 c_2 + a_2 c_1 & -b_1 c_2 + d_1 a_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

in I_p liegt, d. h. $-a_1 c_2 + a_2 c_1 \in p\mathbb{Z}_p$. Dann gilt jedoch auch

$$c_2 \begin{pmatrix} a_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \equiv c_1 \begin{pmatrix} a_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \pmod{p\mathbb{Z}_p}.$$

Sind $c_1, c_2 \not\equiv 0 \pmod{p}$, dann folgt die Wohldefiniertheit, d. h. wir können nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $c_1 \in p\mathbb{Z}_p$. Dann folgt $a_1 \notin p\mathbb{Z}_p$, denn sonst wäre $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ nicht in K . Wegen $-a_1 c_2 + a_2 c_1 \in p\mathbb{Z}_p$ folgt nun $c_2 \in p\mathbb{Z}_p$, d. h.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{a_2}{a_1} \begin{pmatrix} a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{a_2}{a_1} \begin{pmatrix} a_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \pmod{p}.$$

- Bijektivität: Nach Lemma 4.2.14 ist ein Vertretersystem für K_p/I_p gegeben durch

$$\left\{ \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} \mid x \in \{0, \dots, p-1\} \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Damit ist die Abbildung surjektiv. Da $|K_p/I_p| = p + 1 = |\mathcal{P}^1(F)|$ ist die Abbildung bijektiv. \square

5.3.8 Korollar.

Sei $p \neq 2$, $g \in \text{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ und pr die kanonische Projektion modulo p . Dann gilt:

1. g fixiert genau dann die Kante $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} I_p \in K_p/I_p$, wenn $\text{pr} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von $\text{pr}(g)$ ist. Hierbei sei $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ als ganzer Vertreter gewählt.
2. Hat g zwei Eigenwerte in \mathbb{Z}_p , die modulo p verschieden sind, dann fixiert g genau zwei Kanten in K_p/I_p .
3. Hat g keine Eigenwerte in \mathbb{Z}_p , dann hat $\text{pr}(g)$ auch keine Eigenwerte über $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Insbesondere fixiert g auch keine Kante in K_p/I_p .

Beweis: Die ersten beiden Aussagen folgen aus dem Lemma. Die dritte folgt aus dem Henselschen Lemma [Neu92, II.4.6]. \square

5.3.9 Lemma.

Sei $p \neq 2, 3$.

1. Sei $g \in \{i, j, k\}$. Dann hat $\phi(g)$ genau dann Eigenwerte in \mathbb{Q}_p , wenn -1 ein Quadrat in \mathbb{Q}_p ist. Dies ist äquivalent zu $p \equiv 1 \pmod{4}$.
2. Sei $g = \frac{a+bi+cj+dk}{2}$ mit $a, b, c, d \in \{-1, 1\}$. Dann hat $\phi(g)$ genau dann Eigenwerte in \mathbb{Q}_p , wenn -3 ein Quadrat in \mathbb{Q}_p ist. Dies ist äquivalent zu $p \equiv 1 \pmod{6}$.

Sofern die Eigenwerte in \mathbb{Q}_p liegen, liegen sie schon in \mathbb{Z}_p und sind modulo p verschieden.

Beweis: Wir zeigen nur die zweite Aussage, die erste folgt analog. Sei $g = \frac{a+bi+cj+dk}{2}$ mit $a, b, c, d \in \{-1, 1\}$. Dann ist $N(g) = 1$ und $\text{tr}(g) = a$, d. h. das charakteristische Polynom von $\phi(g)$ ist $t^2 - at + 1$. Die Diskriminante dieses Polynoms ist -3 , d. h. $\phi(g)$ hat genau dann Eigenwerte in \mathbb{Q}_p , wenn -3 ein Quadrat in \mathbb{Q}_p ist. Nach dem Henselschen Lemma ist dies für $p \neq 2$ äquivalent dazu, dass -3 ein quadratischer Rest modulo p ist. Aus den Rechenregeln für das Legendre-Symbol folgt, dass dies äquivalent zu $p \equiv 1 \pmod{6}$ ist.

Der Zusatz folgt nun wegen $p \neq 3$, denn dann ist die Diskriminante des charakteristischen Polynoms nicht durch p teilbar, d. h. modulo p sind die Eigenwerte verschieden. \square

5.3.10 Lemma.

Es gibt keine orientierte Kante $xI_p \in K_p/I_p$, die von mehr als einem der Elemente $\phi(i), \phi(j), \phi(k)$ stabilisiert wird.

Beweis: Nach Lemma 5.3.9 fixieren $\phi(i), \phi(j), \phi(k)$ für $p \not\equiv 1 \pmod{4}$ keine Kante, da ihre Projektionen modulo p keine Eigenwerte und damit auch keine Eigenvektoren besitzen. Es genügt also den Fall $p \equiv 1 \pmod{4}$ zu betrachten.

Sei $u \in \mathbb{Z}_p$ mit $u^2 = -1$. Die Bilder der Eigenvektoren von $\phi(i), \phi(j), \phi(k)$ unter der Abbildung aus Lemma 5.3.7 sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \phi(i): & \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ u \end{pmatrix} \\ \phi(j): & \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \phi(k): & \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wegen $u^2 = -1$ und $p \neq 2$ folgt $u \not\equiv -1, 0, 1 \pmod{p}$, d. h. die sechs obigen Punkte sind in $\mathcal{P}^1(\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p)$ paarweise verschieden. Aus Lemma 5.3.7 folgt, dass i, j und k jeweils genau zwei Kanten fixieren und diese paarweise verschieden sind. \square

5.3.11 Lemma.

Sei $g \in \Gamma_0$. Dann gilt

- $\text{ord}(g) = 2$ genau dann, wenn $g \in \{i, j, k\}$.
- $\text{ord}(g) = 3$ genau dann, wenn $g = \frac{a+bi+cj+dk}{2}$ für $a, b, c, d \in \{-1, 1\}$.

Inbesondere ist Γ_0 isomorph zur alternierenden Gruppe A_4 .

Beweis: Sei $x \in \{i, j, k\}$. Dann gilt $x^2 = \pm 1$. Es genügt zu zeigen, dass ein Element $g = \frac{a+bi+cj+dk}{2}$ für $a, b, c, d \in \{-1, 1\}$ Ordnung 3 besitzt. Hierzu berechnen wir

$$g^2 = \frac{a^2-b^2-c^2-d^2+2abi+2acj+2adk}{4} = \frac{-1+abi+acj+adk}{2} = \frac{1-abi-acj-adk}{2}$$

und

$$g^3 = \frac{-4a+(a^2b-b)i+(a^2c-c)j+(a^2d-d)k}{4} = -a \in \{\pm 1\}.$$

Die Isomorphie von Γ_0 und A_4 folgt nun aus der Klassifikation der Gruppen der Ordnung 12 (siehe zum Beispiel [Hum96, S. 238f]). \square

Beweis von Proposition 5.3.5:

1. Fall $p \equiv 11 \pmod{12}$:

Nach Korollar 5.3.8 und Lemma 5.3.9 stabilisiert kein $\gamma \in \Gamma_0$, $\gamma \neq 1$ eine orientierte Kante, d. h. für jede Kante $xI_p \in K_p/I_p$ gilt:

$$\text{Stab}(xI_p) = \{1\}.$$

Dann folgt $|\Gamma_0 xI_p| = |\Gamma_0| = 12$. Also besteht jeder Γ_0 -Orbit in K_p/I_p aus genau 12 Elementen, d. h.

$$|\Gamma_0 \backslash K_p/I_p| = \frac{|K_p/I_p|}{12} = \frac{p+1}{12}.$$

2. Fall $p \equiv 7 \pmod{12}$:

Sei $xI_p \in K_p/I_p$ eine orientierte Kante mit nichttrivialer Stabilisatorgruppe. Aus Lemma 5.3.9 folgt, dass $i, j, k \notin \text{Stab}(xI_p)$. Also wird xI_p von einem Element $g \in \Gamma_0 \setminus \{1, i, j, k\}$ fixiert. Nach Lemma 5.3.11 gilt $\text{ord}(g) = 3$, d. h. $|\text{Stab}(xI_p)| \in \{3, 6, 12\}$. Andererseits enthält $\text{Stab}(xI_p)$ nach Lemma 5.3.11 kein Element der Ordnung 2, d. h. $|\text{Stab}(xI_p)| = 3$ und $|\Gamma_0 xI_p| = 4$.

Jedes $g \in \Gamma_0 \setminus \{1, i, j, k\}$ stabilisiert genau zwei Kanten. Jede solche Kante wird dabei von genau zwei solchen Elementen stabilisiert, d. h. es gibt genau so viele Kanten mit nichttrivialem Stabilisator wie Elemente in $\Gamma_0 \setminus \{1, i, j, k\}$. Somit gibt es genau 2 Orbits mit 4 Elementen. Alle anderen Orbits haben 12 Elemente. Insgesamt erhalten wir

$$|\Gamma_0 \backslash K_p/I_p| = 2 + \frac{p+1-8}{12} = \frac{p+17}{12}.$$

3. Fall $p \equiv 5 \pmod{12}$:

Sei $xI_p \in K_p/I_p$ mit $\text{Stab}(xI_p) \neq \{1\}$. Aus Lemma 5.3.10 folgt $|\text{Stab}(xI_p)| = 2$. Analog zum Fall $p \equiv 7 \pmod{12}$ gibt es genau ein Orbit mit 6 Elementen und alle anderen Orbits haben 12 Elemente. Somit

$$|\Gamma_0 \backslash K_p/I_p| = 1 + \frac{p+1-6}{12} = \frac{p+7}{12}.$$

4. Fall $p \equiv 1 \pmod{12}$:

Wir zeigen zuerst, dass es kein $xI_p \in K_p/I_p$ gibt, dessen Stabilisatorgruppe mehr als drei Elemente enthält. Aus $|\text{Stab}(xI_p)| > 3$ folgt $|\text{Stab}(xI_p)| \in \{4, 6, 12\}$. Γ_0 ist nach Lemma 5.3.11 isomorph zur alternierenden Gruppe A_4 und besitzt daher keine Untergruppe der Ordnung 6. In den verbleibenden Fällen folgt aus Lemma 5.3.11, dass $i, j, k \in \text{Stab}(xI_p)$, was nach Lemma 5.3.10 nicht möglich ist.

Also gibt es wie oben einen Orbit mit 6 Elementen, der von i, j, k herrührt, und zwei Orbits mit 4 Elementen, die von den Elementen $\Gamma \setminus \{1, i, j, k\}$ herrühren. Alle anderen Orbits haben 12 Elemente. Dann erhalten wir

$$|\Gamma_0 \backslash K_p/I_p| = 3 + \frac{p+1-6-8}{12} = \frac{p+23}{12}. \quad \square$$

Wir definieren für $N, r \in \mathbb{N}$ mit $\text{ggT}(r, N) = 1$

$$\zeta_{N,r}(s) = \prod_{p \equiv r \pmod{N}} \frac{1}{1-p^{-s}}.$$

Der Faktor, der zu $p = 3$ gehört, ist eine rationale Funktion in 3^{-s} , also auf \mathbb{C} meromorph. Für die Frage der Fortsetzbarkeit kann dieser Term also vernachlässigt werden. Nach Theorem 5.3.1 besitzt $\xi(M, s)$ eine meromorphe Fortsetzung auf \mathbb{C} . Die Graphen X_p haben jeweils zwei Ecken. Mit der Ihara-Formel 2.6.5 und Proposition 5.3.5 folgt dann

$$\begin{aligned} & \prod_{p \neq 2,3} \frac{\zeta(X_p, p^{-s})}{\xi(X_p, p^{-s})} \\ &= \zeta_{12,1}(2s)^{\frac{-1}{12}} \cdot \zeta_{12,5}(2s)^{\frac{-17}{12}} \cdot \zeta_{12,7}(2s)^{\frac{-7}{12}} \cdot \zeta_{12,11}(2s)^{\frac{-23}{12}} \cdot \prod_{p \neq 2,3} \left(\frac{1}{1-p^{-2s}} \right)^{\frac{p}{12}} \\ &= \frac{\zeta_{4,1}(2s)^{\frac{1}{2}}}{\zeta_{3,1}(2s)^{\frac{7}{12}} \cdot \zeta_{3,2}(2s)^{\frac{23}{12}}} \cdot \prod_{p \neq 2,3} \left(\frac{1}{1-p^{-2s}} \right)^{\frac{p}{12}}. \end{aligned}$$

Wie in Lemma 5.3.4 gesehen, kann der Term

$$\prod_p \left(\frac{1}{1-p^{-2s}} \right)^p$$

nicht über die Gerade $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$ hinaus fortgesetzt werden. Es genügt also zu zeigen, dass die anderen Terme eine Fortsetzung über die Gerade $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$ hinaus besitzen. Dies klärt das folgende Lemma.

5.3.12 Lemma.

Sei $N \in \{3, 4\}$ und $r \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{ggT}(r, N) = 1$. Dann konvergiert

$$\zeta_{N,r}(s) = \prod_{p \equiv r \pmod{N}} (1 - p^{-s})^{-1}$$

für $\operatorname{Re}(s) > 1$ lokal gleichmäßig absolut und stellt dort eine nullstellenfreie, holomorphe Funktion dar. Die Funktion $\zeta_{N,r}^2(s)$ besitzt eine meromorphe Fortsetzung auf $\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}$ und hat einen einfachen Pol bei $s = 1$.

Beweis: Sei $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 1$. Dann konvergieren die Produkte analog wie das Euler-Produkt der Riemannschen Zetafunktion lokal gleichmäßig absolut und stellen für $\operatorname{Re}(s) > 1$ jeweils holomorphe Funktion ohne Nullstellen dar.

Sowohl für $N = 3$ als auch $N = 4$ ist $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \cong \{-1, 1\}$. Wir bezeichnen mit χ_0 den trivialen und mit χ_1 den nichttrivialen Dirichlet-Charakter modulo N . Weiter seien $L(s, \chi_0)$ und $L(s, \chi_1)$ die zugehörigen Dirichletschen L -Funktionen

$$L(s, \chi_0) = \prod_p \frac{1}{1 - \chi_0(p)p^{-s}} = \prod_{\operatorname{ggT}(p,N)=1} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

und

$$L(s, \chi_1) = \prod_p \frac{1}{1 - \chi_1(p)p^{-s}} = \prod_{p \equiv 1 \pmod{N}} \frac{1}{1 - p^{-s}} \cdot \prod_{p \equiv -1 \pmod{N}} \frac{1}{1 + p^{-s}}.$$

Damit folgt

$$\frac{L(s, \chi_0)}{L(s, \chi_1)} = \prod_{p \equiv -1 \pmod{N}} \frac{1 + p^{-s}}{1 - p^{-s}} = \prod_{p \equiv -1 \pmod{N}} \frac{1 - p^{-2s}}{(1 - p^{-s})^2} = \frac{\zeta_{N,-1}(s)^2}{\zeta_{N,-1}(2s)}$$

und

$$L(s, \chi_0)L(s, \chi_1) = \prod_{p \equiv 1 \pmod{N}} \frac{1}{(1 - p^{-s})^2} \cdot \prod_{p \equiv -1 \pmod{N}} \frac{1}{1 - p^{-2s}} = \zeta_{N,1}(s)^2 \zeta_{N,-1}(2s).$$

Wir erhalten

$$\zeta_{N,-1}(s)^2 = \frac{\zeta_{N,-1}(2s)L(s, \chi_0)}{L(s, \chi_1)}$$

und

$$\zeta_{N,1}(s)^2 = \frac{L(s, \chi_0)L(s, \chi_1)}{\zeta_{N,-1}(2s)}.$$

Die rechten Seiten der Gleichungen sind jeweils für $\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}$ meromorph. □

Beweis von Satz 5.3.2: Nach der bisherigen Rechnung gilt

$$\prod_{p \neq 2,3} \frac{\zeta(X_p, p^{-s})}{\xi(X_p, p^{-s})} = \frac{\zeta_{4,1}(2s)^{\frac{1}{2}}}{\zeta_{3,1}(2s)^{\frac{7}{12}} \cdot \zeta_{3,2}(2s)^{\frac{23}{12}}} \cdot \prod_{p \neq 2,3} \left(\frac{1}{1 - p^{-2s}} \right)^{\frac{p}{12}}.$$

Der Faktor $\zeta(X_3, 3^{-s})$ ist auf \mathbb{C} meromorph und nicht trivial. Nach Lemma 5.3.12 sind die Faktoren der Form $\zeta_{N,r}(s)$ für $\operatorname{Re}(s) > 1$ holomorph und nullstellenfrei, d. h.

$$\frac{\zeta_{4,1}(2s)^{\frac{1}{2}}}{\zeta_{3,1}(2s)^{\frac{7}{12}} \cdot \zeta_{3,2}(2s)^{\frac{23}{12}}}$$

ist für $\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}$ holomorph. Der Faktor

$$\prod_{p \neq 2,3} \left(\frac{1}{1 - p^{-2s}} \right)^{\frac{p}{12}}$$

ist nach Lemma 5.3.4 für $\operatorname{Re}(s) > 1$ holomorph und nullstellenfrei.

Die Unmöglichkeit der Fortsetzung von $\zeta(M, s)$ über die Gerade $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$ folgt aus der Fortsetzbarkeit von $\xi(M, s)$ (Theorem 5.3.1), der Fortsetzbarkeit der Funktionen $\zeta_{N,r}$ (Lemma 5.3.12) und der Nichtfortsetzbarkeit von η in Lemma 5.3.4. \square

5.4 Höherer Rang

Die Konstruktion von lokalen Graphen kann man auch für höhere Dimension verallgemeinern. Wir skizzieren dies für beliebiges n über dem Grundkörper \mathbb{Q} und zeigen die auftretenden Probleme im Fall $n = 3$ auf.

Sei M eine zentrale, einfache Algebra vom Grad n über \mathbb{Q} (siehe [Voi21, § 7]). Dann gibt es eine endliche Menge von Primzahlen S , sodass $M \otimes \mathbb{Q}_p$ nicht isomorph zu $M_n(\mathbb{Q}_p)$ ist. Wir wählen eine maximale Ordnung L in M und schreiben für einen Ring R wie zuvor $M(R) = L \otimes_{\mathbb{Z}} R$ und

$$G(R) = M(R)^{\times} / R^{\times}.$$

Wieder folgt mit der starken Approximation [PR94, § 7], dass für alle $p \notin S$

$$G(\mathbb{Q})G(\mathbb{Q}_p)K = G(\mathbb{A}),$$

wobei $K = G(\mathbb{R}) \times \prod_q G(\mathbb{Z}_q)$. $G(\mathbb{Q})$ ist ein kokompaktes Gitter in $G(\mathbb{A})$ (vgl. 5.3 in [PR94]). Wir können also die lokalen Quotienten des Bruhat-Tits-Gebäudes analog wie im Fall $n = 2$ definieren.

Sei $p \notin S$. Dann gilt

$$G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}) / K^p \cong \Gamma_p \backslash G(\mathbb{Q}_p),$$

wobei $K^p = G(\mathbb{R}) \times \prod_{q \neq p} G(\mathbb{Z}_q)$ und

$$\Gamma_p = G(\mathbb{Q}) \cap \prod_{\substack{q \notin S \\ q \neq p}} G(\mathbb{Z}_q) = G(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]).$$

Wie im Fall $n = 2$ konstruieren wir das Gitter Γ_p^1 als Kern des Gruppenhomomorphismus

$$\Gamma_p \xrightarrow{\text{Norm}} \mathbb{Q}_p^\times / \mathbb{Q}_p^{\times n} \xrightarrow{\nu_p} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},$$

wobei $\mathbb{Q}_p^{\times n}$ die Gruppe der n -ten Potenzen in \mathbb{Q}_p^\times bezeichnet. Wieder erhalten wir, dass Γ_p^1 torsionsfrei ist, wenn M^\times nur die trivialen Torsionselemente ± 1 enthält. Wir identifizieren $G(\mathbb{Q}_p)$ mit $\text{PGL}_n(\mathbb{Q}_p)$ und können dann die Wirkung von Γ_p^1 auf dem Bruhat-Tits-Gebäude von $\text{PGL}_n(\mathbb{Q}_p)$ betrachten.

5.4.1 Definition.

Sei M eine zentrale, einfache Algebra über \mathbb{Q} , sodass M^\times nur die trivialen Torsionselemente ± 1 enthält. Wir definieren X_p als $\Gamma_p^1 \backslash \mathfrak{X}_p$, wobei \mathfrak{X}_p das Bruhat-Tits-Gebäude von $\text{PGL}_n(\mathbb{Q}_p)$ bezeichnet.

Die Resultate aus 3.2 und 5.3 legen nahe, dass

$$\det \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-u)^k p^{k(k-1)/2} A_{k, X_p} + p^{\frac{n(n-1)}{2}} (-u)^n \right)$$

der Term ist, dessen Euler-Produkt für eine analytische Fortsetzung in Frage kommt. Es wäre also wünschenswert, wenn wir diese Determinante mit geometrischen Zetafunktionen in Beziehung setzen können, analog zur Ihara-Formel im Fall $n = 2$. Leider ist eine derartige Formel für beliebigen Rang bislang nicht bekannt.

Im Fall $n = 3$ haben Kang, Li und Wang in [KL14] und [KLW10] eine solche Formel geliefert und gezeigt, dass man

$$\frac{(1 - u^3)^{\chi(X_p)}}{\det(1 - uA_{1, X_p} + pu^2A_{2, X_p} - p^3u^3)} \quad (7)$$

durch Quotienten zweier geometrisch definierter Zetafunktionen ausdrücken kann (siehe auch [KLW18, Theorem 6.1]). Hierbei ist $\chi(X_p)$ die Euler-Charakteristik von X_p .

Wie im Fall $n = 2$ kann man die Rechtsdarstellung auf $L^2(\Gamma_p \backslash G(\mathbb{Q}_p))$ mit der Rechtsdarstellung auf $L^2(\Gamma_p^1 \backslash G(\mathbb{Q}_p))$ in Beziehung setzen.

5.4.2 Proposition.

Sei $\bigoplus_{i=1}^k \pi_i$ die Zerlegung des unverzweigten Teils der Rechtsdarstellung auf $L^2(\Gamma_p \backslash G_p)$ in irreduzible Darstellungen. Sei χ_p ein unverzweigter Charakter von \mathbb{Q}_p^\times der Ordnung n , d. h. $\chi(g) = \varepsilon^{\nu_p(\det(g))}$ für eine primitive n -te Einheitswurzel ε . Dann gilt:

1. Der unverzweigte Teil der Rechtsdarstellung auf $L^2(\Gamma_p^1 \backslash G_p)$ zerfällt wie folgt in irreduzible Unterdarstellungen:

$$\bigoplus_{i=1}^k \bigoplus_{j=0}^{n-1} \chi_p^j \otimes \pi_i.$$

2. Ist π eine irreduzible, unverzweigte Darstellung von G_p mit Satake-Parametern $q^{-\lambda_1}, \dots, q^{-\lambda_n}$, so gilt

$$L(\pi, s) \cdot L(\chi_p \otimes \pi, s) \cdot \dots \cdot L(\chi_p^{n-1} \otimes \pi, s) = \frac{1}{(1 - p^{-ns-n\lambda_1}) \cdot \dots \cdot (1 - p^{-ns-n\lambda_n})}.$$

Im Fall $n = 2$ können wir $L(\pi, s) \cdot L(\chi_p \otimes \pi, s)$ im Wesentlichen als Rankin-Selberg- L -Funktion von π interpretieren (siehe Proposition 5.3.3):

$$L(\pi, s) \cdot L(\chi_p \otimes \pi, s) = L(\pi, \otimes^2, 2s) \cdot (1 - p^{-2s})^2.$$

Alternativ gibt es noch eine andere Interpretation:

$$L(\pi, s) \cdot L(\chi_p \otimes \pi, s) = L(\pi, \text{Sym}^2, 2s) \cdot (1 - p^{-2s}).$$

Die Terme auf der rechten Seite haben eine globale Interpretation als lokaler Faktor einer globalen L -Funktion. Für diese globale L -Funktion ist bekannt, dass sie eine analytische Fortsetzung besitzt und eine Funktionalgleichung erfüllt.

Das wesentliche Problem in höherem Rang ist die Interpretation von

$$L(\pi, s) \cdot L(\chi_p \otimes \pi, s) \cdot \dots \cdot L(\chi_p^{n-1} \otimes \pi, s)$$

als lokaler Faktor einer geeigneten globalen L -Funktion.

Wir skizzieren dies im Fall $n = 3$: Sei π eine irreduzible, unverzweigte Darstellung von $\text{PGL}_3(\mathbb{Q}_p)$ mit Satake-Parametern $q^{-\lambda_1}, q^{-\lambda_2}, q^{-\lambda_3}$. Dann gilt

$$\frac{1}{(1 - p^{-3s-3\lambda_1})(1 - p^{-3s-3\lambda_2})(1 - p^{-3s-3\lambda_3})} = \frac{L(\pi, \otimes^3, 3s)}{L(\pi \times \tilde{\pi}, 3s)^3 (1 - p^{-3s})^3}.$$

Hierbei bezeichnet $\tilde{\pi}$ die zu kontragrediente Darstellung zu π und $L(\pi \times \tilde{\pi}, s)$ die Rankin-Selberg- L -Funktion von π und $\tilde{\pi}$ (siehe [Cog04]). Alternativ gilt auch

$$\frac{1}{(1 - p^{-3s-3\lambda_1})(1 - p^{-3s-3\lambda_2})(1 - p^{-3s-3\lambda_3})} = \frac{L(\pi, \text{Sym}^3, 3s)}{L(\pi \times \tilde{\pi}, 3s) (1 - p^{-3s})^2}.$$

Für automorphe Darstellungen π der Gruppe PGL_3 ist jedoch weder für $L(\pi, \otimes^3, s)$ noch $L(\pi, \text{Sym}^3, s)$ bekannt, ob diese eine analytische Fortsetzung und Funktionalgleichung besitzen. Eine entsprechende Aussage über die Fortsetzbarkeit des Euler-Produktes über die Determinantenterme in (7) hängt damit von den Langlands-Vermutungen ab.

Literatur

- [AB08] ABRAMENKO, Peter ; BROWN, Kenneth S.: *Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 248: *Buildings*. Springer, New York, 2008. – xxii+747 S. – ISBN 978-0-387-78834-0
- [Bas92] BASS, Hyman: The Ihara-Selberg zeta function of a tree lattice. In: *Internat. J. Math.* 3 (1992), Nr. 6, S. 717–797. – ISSN 0129-167X
- [BB05] BJÖRNER, Anders ; BRENTI, Francesco: *Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 231: *Combinatorics of Coxeter groups*. Springer, New York, 2005. – xiv+363 S. – ISBN 978-3540-442387; 3-540-44238-3
- [Bor79] BOREL, A.: Automorphic L -functions. In: *Automorphic forms, representations and L -functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979 (Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII), S. 27–61
- [Car79] CARTIER, P.: Representations of p -adic groups: a survey. In: *Automorphic forms, representations and L -functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979 (Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII), S. 111–155
- [CFL⁺19] COSTACHE, Anamaria ; FEIGON, Brooke ; LAUTER, Kristin ; MASSIERER, Maike ; PUSKÁS, Anna: Ramanujan Graphs in Cryptography. In: *Research Directions in Number Theory. Association for Women in Mathematics Series 19* (2019), S. 1–40
- [CGL09] CHARLES, Denis X. ; GOREN, Eyal Z. ; LAUTER, Kristin E.: Families of Ramanujan graphs and quaternion algebras. In: *Groups and symmetries* Bd. 47. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, S. 53–80
- [Cog04] COGDELL, James W.: Lectures on L -functions, converse theorems, and functoriality for GL_n . In: *Lectures on automorphic L -functions* Bd. 20. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, S. 1–96
- [DE14] DEITMAR, Anton ; ECHTERHOFF, Siegfried: *Principles of harmonic analysis*. Second. Springer, Cham, 2014 (Universitext). – xiv+332 S. – ISBN 978-3-319-05791-0; 978-3-319-05792-7
- [Dei13] DEITMAR, Anton: *Automorphic forms*. Springer, London, 2013 (Universitext). – x+252 S. – ISBN 978-1-4471-4434-2; 978-1-4471-4435-9. – Translated from the 2010 German original
- [Dei14] DEITMAR, Anton: Ihara zeta functions and class numbers. In: *Adv. Studies in Contemp. Math.* 24 (2014), Nr. 4, S. 439–450

- [DK18] DEITMAR, Anton ; KANG, Ming-Hsuan: Tree-lattice zeta functions and class numbers. In: *Michigan Math. J.* 67 (2018), Nr. 3, S. 617–645. – ISSN 0026–2285
- [DKM20] DEITMAR, Anton ; KANG, Ming-Hsuan ; MCCALLUM, Rupert: Building lattices and zeta functions. In: *Adv. Geom.* 20 (2020), Nr. 2, S. 249–272. – ISSN 1615–715X
- [DM18] DEITMAR, Anton ; MCCALLUM, Rupert: A prime geodesic theorem for higher rank buildings. In: *Kodai Math. J.* 41 (2018), Nr. 2, S. 440–455
- [FH91] FULTON, William ; HARRIS, Joe: *Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 129: *Representation theory : a first course*. Springer-Verlag, New York, 1991. – xvi+551 S. – ISBN 0–387–97527–6; 0–387–97495–4
- [Fla79] FLATH, D.: Decomposition of representations into tensor products. In: *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979 (Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII), S. 179–183
- [Gar97] GARRETT, Paul: *Buildings and classical groups*. Chapman & Hall, London, 1997. – xii+373 S. – ISBN 0–412–06331–X
- [Gel75] GELBART, Stephen S.: *Automorphic forms on adèle groups*. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1975. – x+267 S. – Annals of Mathematics Studies, No. 83
- [GH11a] GOLDFELD, Dorian ; HUNDLEY, Joseph: *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Bd. 129: *Automorphic representations and L-functions for the general linear group. Volume I*. Cambridge University Press, Cambridge, 2011. – xx+550 S. – ISBN 978–0–521–47423–8. – With exercises and a preface by Xander Faber
- [GH11b] GOLDFELD, Dorian ; HUNDLEY, Joseph: *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Bd. 130: *Automorphic representations and L-functions for the general linear group. Volume II*. Cambridge University Press, Cambridge, 2011. – xx+188 S. – ISBN 978–1–107–00799–4. – With exercises and a preface by Xander Faber
- [GJ72] GODEMENT, Roger ; JACQUET, Hervé: *Zeta functions of simple algebras*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972 (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 260). – ix+188 S.
- [HB79] HEATH-BROWN, D. R.: Simple zeros of the Riemann zeta function on the critical line. In: *Bull. London Math. Soc.* 11 (1979), Nr. 1, S. 17–18. – ISSN 0024–6093

- [Hum90] HUMPHREYS, James E.: *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Bd. 29: *Reflection groups and Coxeter groups*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990. – xii+204 S. – ISBN 0–521–37510–X
- [Hum96] HUMPHREYS, John F.: *A course in group theory*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1996 (Oxford Science Publications). – xii+279 S. – ISBN 0–19–853453–1; 0–19–853459–0
- [Iha66] IHARA, Yasutaka: On discrete subgroups of the two by two projective linear group over \mathfrak{p} -adic fields. In: *J. Math. Soc. Japan* 18 (1966), S. 219–235. – ISSN 0025–5645
- [JL70] JACQUET, H. ; LANGLANDS, R. P.: *Automorphic forms on $GL(2)$* . Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970 (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 114). – vii+548 S.
- [KL14] KANG, Ming-Hsuan ; LI, Wen-Ching W.: Zeta functions of complexes arising from $PGL(3)$. In: *Adv. Math.* 256 (2014), S. 46–103. – ISSN 0001–8708
- [KLW10] KANG, Ming-Hsuan ; LI, Wen-Ching W. ; WANG, Chian-Jen: The zeta functions of complexes from $PGL(3)$: a representation-theoretic approach. In: *Israel J. Math.* 177 (2010), S. 335–348. – ISSN 0021–2172
- [KLW18] KANG, Ming-Hsuan ; LI, Wen-Ching W. ; WANG, Chian-Jen: Zeta and L -functions of finite quotients of apartments and buildings. In: *Israel J. Math.* 228 (2018), Nr. 1, S. 79–117. – ISSN 0021–2172
- [Lam73] LAM, T. Y.: *The algebraic theory of quadratic forms*. W. A. Benjamin, Inc., Reading, Mass., 1973. – xi+344 S. – Mathematics Lecture Note Series
- [Li95] LI, Wen-Ch'ing W.: Number-theoretic constructions of Ramanujan graphs. In: *Columbia university number theory seminar - New-York, 1992*. 1995 (Astérisque 228). – ISSN 0303–1179, S. 101–120
- [LPS88] LUBOTZKY, A. ; PHILLIPS, R. ; SARNAK, P.: Ramanujan graphs. In: *Combinatorica* 8 (1988), Nr. 3, S. 261–277. – ISSN 0209–9683
- [LSV05] LUBOTZKY, Alexander ; SAMUELS, Beth ; VISHNE, Uzi: Ramanujan complexes of type \tilde{A}_d . In: *Israel J. Math.* 149 (2005), S. 267–299. – ISSN 0021–2172. – Probability in mathematics
- [Lub10] LUBOTZKY, Alexander: *Discrete groups, expanding graphs and invariant measures*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2010 (Modern Birkhäuser Classics). – iii+192 S. – ISBN 978–3–0346–0331–7. – With an appendix by Jonathan D. Rogawski, Reprint of the 1994 edition

- [Neu92] NEUKIRCH, Jürgen: *Algebraische Zahlentheorie*. Springer-Verlag, Berlin, 1992. – xiii+595 S. – ISBN 3-540-54273-6
- [New72] NEWMAN, Morris: *Integral matrices*. Academic Press, New York-London, 1972. – xvii+224 S. – Pure and Applied Mathematics, Vol. 45
- [PR94] PLATONOV, Vladimir ; RAPINCHUK, Andrei: *Pure and Applied Mathematics*. Bd. 139: *Algebraic groups and number theory*. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1994. – xii+614 S. – ISBN 0-12-558180-7. – Translated from the 1991 Russian original by Rachel Rowen
- [PR08] PRASAD, Dipendra ; RAGHURAM, A.: Representation theory of $GL(n)$ over non-Archimedean local fields. In: *School on Automorphic Forms on $GL(n)$* Bd. 21. Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2008, S. 159–205
- [Rei03] REINER, I.: *London Mathematical Society Monographs. New Series*. Bd. 28: *Maximal orders*. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2003. – xiv+395 S. – ISBN 0-19-852673-3. – Corrected reprint of the 1975 original, With a foreword by M. J. Taylor
- [Rou19] ROUSE, Jeremy: Integers represented by positive-definite quadratic forms and Petersson inner products. In: *Acta Arith.* 187 (2019), Nr. 1, S. 81–100. – ISSN 0065-1036
- [Sel60] SELBERG, Atle: On discontinuous groups in higher-dimensional symmetric spaces. In: *Contributions to function theory (internat. Colloq. Function Theory, Bombay, 1960)*. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1960, S. 147–164
- [Ser03] SERRE, Jean-Pierre: *Trees*. Springer-Verlag, Berlin, 2003 (Springer Monographs in Mathematics). – x+142 S. – ISBN 3-540-44237-5. – Translated from the French original by John Stillwell, Corrected 2nd printing of the 1980 English translation
- [Spa81] SPANIER, Edwin H.: *Algebraic topology*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1981. – xvi+528 S. – ISBN 0-387-90646-0. – Corrected reprint
- [Tad86] TADIĆ, Marko: Classification of unitary representations in irreducible representations of general linear group (non-Archimedean case). In: *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* 19 (1986), Nr. 3, S. 335–382. – ISSN 0012-9593
- [Tam63] TAMAGAWA, Tsuneo: On the ζ -functions of a division algebra. In: *Ann. of Math. (2)* 77 (1963), S. 387–405. – ISSN 0003-486X

- [Ten15] TENENBAUM, Gérald: *Graduate Studies in Mathematics*. Bd. 163: *Introduction to analytic and probabilistic number theory*. Third. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015. – xxiv+629 S. – ISBN 978–0–8218–9854–3. – Translated from the 2008 French edition by Patrick D. F. Ion
- [Ter11] TERRAS, Audrey: *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Bd. 128: *Zeta functions of graphs*. Cambridge University Press, Cambridge, 2011. – xii+239 S. – A stroll through the garden
- [Vig80] VIGNÉRAS, Marie-France: *Lecture Notes in Mathematics*. Bd. 800: *Arithmétique des algèbres de quaternions*. Springer, Berlin, 1980. – vii+169 S. – ISBN 3–540–09983–2
- [Voi21] VOIGHT, John: *Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 288: *Quaternion algebras*. Springer, Cham, 2021. – 885 S. – ISBN 978–3–030–56692–0; 978–3–030–56694–4
- [Wae67] WAERDEN, B. L. d.: *Algebra. Teil II*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1967 (Unter Benutzung von Vorlesungen von E. Artin und E. Noether. Fünfte Auflage. Heidelberger Taschenbücher, Band 23). – x+300 S.
- [Wei98] WEISS, Edwin: *Algebraic number theory*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1998. – x+275 S. – ISBN 0–486–40189–8. – Reprint of the 1963 original