Richtigkeit und Wahrheit.
Grenzen des Formalen

von Peter RUTZ

Vielleicht ist für viele – dem Wortgebrauch nach – „richtig" und „wahr" etwa dasselbe; die Ausdrücke werden in der Fachsprache aber oft verschieden verwendet. Wir wollen vor allem (1.) einmal erläutern, was wir unter Richtigkeit verstehen, unter formaler Richtigkeit; das ist auf den ersten Blick etwas technisch, aber eigentlich etwas ganz Einfaches und gleichzeitig fast unheimlich Mächtiges, wenn wir dann seine Beziehung zur Wahrheit ins Auge fassen (2. und 3.). Später wird sich herausstellen, dass die Richtigkeit, das Formale sozusagen, überraschenderweise eine Grenze hat (4.), die viele Hoffnungen des rationalen Denkens in Schranken setzt und zeigt, dass die Erfassung der ganzen Wahrheit durch ein formales System eine Illusion ist (5.).

Der Vortrag soll auch für Nichtspezialisten verständlich sein; der Autor nimmt es daher in Kauf, dass aus diesem Grund einige Formulierungen technisch nicht ganz sauber, einige Behauptungen an Ort und Stelle nicht bewiesen und einige Ausführungen etwas plakativ sind; auch wurde auf Fussnoten, die auf klassische Werke verweisen, verzichtet. Auf einige Bücher und Artikel, die diese Thematik zugänglich (und teilweise amüsant) darstellen und weiterentwickeln und aus denen einige Formulierungen dieses Vortrags inspiriert und teils auch wörtlich übernommen wurden, wird am Ende hingewiesen.

1. Das (g,i,p)-System

Erlauben Sie mir, Ihnen eine Art Spiel vorzustellen: das (g,i,p)-Spiel oder (g,i,p)-System, um daran einige Grundbegriffe der *Theorie der formalen Systeme* zu erläutern.

Wir nehmen an, wir haben die *Buchstaben* „g", „i" und „p" in beliebiger Anzahl zur Verfügung. Aus diesen können wir *Wörter* bilden, z. B.

pp, pgi, ig, iiigggpgp, i.

Statt Buchstaben könnte man auch Spielsteine verwenden, z. B. grosse (grandi), kleine (piccoli) und mittlere (intermedii); oder auch Spielsteine aus verschiedenem Material: aus Jaspis (i), Porphyr (p) und Granat (g). Voraussetzung ist: Man hat von jeder Sorte beliebig viele und darf sie in Reihen hinlegen: dann entstehen Ketten oder Muster (die den Wörtern entsprechen).

Einige dieser Wörter (resp. Ketten oder Muster) bestimmen wir als *ausgezeichnete Wörter*; wir nennen sie *Sätze* (oder auch Zielketten, Goals). Diese Sätze können in unserem (g,i,p)-System mit Hilfe von zwei (Spiel-)Regeln erhalten werden:

(R1') Die Setz-Regel:

Man darf immer Wörter folgender Art hinschreiben:

ipigii
ipiigiii
ipiiigiiii
. . .
usw.

Oder allgemein gesagt (durch ein sogenanntes Axiomenschema):

(R1) Setz-Regel:

Falls x* ein Wort ist, das aus lauter „i“ besteht, dann ist

ipx*gx*i

ein Satz.

(R2) Die Umformungs- oder Ableitungsregel:

Falls s* ein Satz ist, dann ist es is*i auch.

Diese Regel erlaubt es uns also, aus einem gegebenen Satz auf einen weiteren zu kommen; d. h. wenn man einen Satz hat, kann man Buchstaben in bestimmter Form hinzufügen, und es entstehen neue Sätze: So kann man also z. B. mit der Ableitungsregel (R2) legitimerweise von „iiipigiiii“ übergehen auf „iiiipigiiiii“; oder man kann – wie man sagt – aus „iipiiiigiiiii“ „iiipiiiigiiiiii“ ableiten.

In allen Spielen gibt es Spielregeln dieser Arten; unserer Regel (R1) entsprechen Anweisungen, wie man das Spiel beginnen kann, und der Regel (R2), wie man die Steine verschieben, mit ihnen „fahren“ oder neue hinzufügen kann.

In Anlehnung an vorgeschichtliche Spiele mit Kieselsteinen (lat. *calculi*) nennt man ein solches System ein *Kalkül*. Dazu ist die Art der „Kieselsteine“ nicht wichtig; hingegen wird ein Kalkül allgemein durch folgende Bedingungen definiert:

> 1. Die verschiedenen Elemente (Grundzeichen, Buchstaben, Spielsteine) sind unterscheidbar.
> 2. Die Musterung (Wort- oder Kettenbildung) sowie die Art der ausgezeichneten Muster (Sätze, Goals) sind einzig durch die Anordnung, durch die Lage der Elemente bestimmt.

Einfache Kalküle waren eine grosse Entdeckung der Menschheit: z. B. Rechnen mit den Fingern, mit Steinen; Rechenbretter und Zählrahmen; dabei betreffen die Regeln immer nur die Form oder die Stellung oder die typographische Anordnung usw. der Elemente.

Zurück zu unserem (g,i,p)-System mit den zwei Regeln (R1) und (R2): eine Sache ist es, Sätze zu *erzeugen*, eine andere, für ein vorgegebenes Wort anzugeben, ob es ein Satz ist oder nicht. Gibt es ein solches *Entscheidungsverfahren*?

Es gibt mehrere; vor allem gibt es zwei ganz verschiedener Art; wir können diese in unserem einfachen (g,i,p)-System leicht darstellen:

Man betrachte einmal die Sätze „von aussen“; dann kann man – vielleicht mit etwas Übung – „sehen“, dass jeder Satz drei Gruppen von „i“ enthält, die getrennt sind durch die Buchstaben „p“ und „g“, und zwar in dieser Reihenfolge. Diese Hypothese kann man beweisen, indem man einsieht 1. dass alle durch Regel (R1) geschriebenen Wörter von dieser Gestalt sind und 2. alle durch Regel (R2) erzeugten ebenso: man kommt mit den vorgegebenen Regeln nicht aus dieser Anordnung heraus. D. h. alle Sätze des (g,i,p)-Systems sind an der Form

x*py*gz*

erkennbar, wobei x*, y* und z* reine i-Wörter bezeichnen. Weiter könnte man vermuten, dass folgendes Kriterium (E1) gilt:

> x*py*gz* ist genau dann ein Satz des (g,i,p)-Systems, wenn x*, y* und z* i-Wörter sind und die Summe der Anzahl „i“ von x* und der Anzahl „i“ von y* gleich der Anzahl „i“ von z* ist.

Dieses Entscheidungskriterium (E1) könnte man leicht beweisen.

(E1) ist ein Entscheidungsverfahren eines „intelligenten Zuschauers“, der Einsicht in die Menge der Sätze des Systems hat; das System selbst „weiss“ das nicht; es „weiss ja sowieso nichts“ – und ist doch Träger einer Information (z. B. über die Anzahlverhältnisse der vorkommenden „i“ in jedem Satz) und damit Träger von Bedeutung; die Bedeutung aber ist die Brücke zur Wahrheit . . .

Gesucht sind nun *systeminterne Entscheidungsverfahren*, die rein formal sind, also mit den Regeln des Systems allein zu tun haben – ohne Bezug auf eine herausgetüftelte Information *über* die Struktur der Sätze. Das ist die zweite Art von Entscheidungsverfahren. Davon gibt es in der Regel zwei Methoden, um zu entscheiden, ob eine vorgegebene Zeichenfolge (ein Wort) ein Satz ist oder nicht:

(E21) Die *Stammbaum-Methode* (vgl. Abbildung 1), in der systematisch alle Sätze den zwei Regeln gemäss erzeugt und der Länge nach geordnet werden; ein vorgegebenes Wort hat eine bestimmte Länge und gehört also zur Satzmenge des Systems, falls es im Baum in der Zeile der gleich langen Sätze vorkommt.

(E22) Die *Rückführungs-Methode* (vgl. Abbildung 2) ist in einem sogenannten Flussdiagramm dargestellt, das zeigt, wie man für ein vorgegebenes Wort w* die Entscheidung durchführt (d. h. im Wesentlichen, wie man ein gegebenes Wort auf mit (R1) erzeugte Wörter zurückzuführen versucht).

Es wäre leicht, ausführlich zu zeigen, dass diese zwei Methoden echte Entscheidungsverfahren sind.

Nun sind wir imstande, zwei wichtige Begriffe allgemein zu formulieren: nämlich die Richtigkeit in einem Kalkül K und die Entscheidbarkeit eines Kalküls K.

Wir nennen ein Wort w* eines Kalküls K *formal richtig* (kurz: richtig), d. h. einen Satz, genau dann, wenn es für w* eine endliche regelrechte (d. h. den Regeln des Kalküls K gemässe) Herleitung oder Erzeugung gibt.

Ein Kalkül K heisst *entscheidbar*, falls für jedes vorgegebene Wort w* in K in endlich vielen Schritten gezeigt werden kann, dass w* richtig ist oder dass w* nicht richtig ist. Das ist z. B. im obigen System der Fall: das (g,i,p)-System ist ein entscheidbarer Kalkül.

2. Interpretationen

Und wenn das (g,i,p)-System nicht ein blosses Spiel wäre? Bei der Einführung des Entscheidungsverfahrens (E1) konnte man vielleicht herausspüren, dass diese Sätze etwas mit der Addition von Zahlen zu tun haben könnten. Dem wollen wir jetzt nachgehen.

Wir definieren eine *Interpretation* I_1; das ist eine Abbildung, durch die den Zeichen des Systems Begriffe in einem sog. Interpretationsraum zugeordnet werden, z. B. wie folgt:

I_1:	Zeichenmenge des (g,i,p)-Systems	• •	Ausdrücke der Arithmetik
	p		plus
	g		gleich
	i		eins
	ii		zwei
	iii		drei
	iiii		vier
	. . .		. . .
	usw.		usw.

Und was dabei herauskommt, und das ist eigentlich verwunderlich und grossartig: bei der Interpretation I_1 des (g,i,p)-Systems entspricht jedem *richtigen* Wort, d. h. jedem Satz des Kalküls ein *wahrer* Satz der Zahlentheorie!

Z. B.	ipigii	bedeutet	eins plus eins gleich zwei;
	iiipiigiiiii	bedeutet	drei plus zwei gleich fünf;
	usw.		

Was als Zeichenspiel begonnen hat, bekommt durch die Interpretation plötzlich Bedeutung (im Doppelsinn des Wortes).

Man definiert allgemein: Ein Kalkül K hat eine *Bedeutung*, falls es eine Interpretation I für K gibt, so dass jedem Satz von K eine wahre Aussage im Interpretationsbereich entspricht (das ist die sogenannte Isomorphiebedingung).

Es gibt natürlich für unser System auch andere Interpretationen, z. B. die Interpretation I_2 durch die dem „p" das Pferd Sophie, dem „g" der Gaul Walter und dem „i" der Begriff „ideologisch" zuordnet wird; diese Interpretation ist offensichtlich uninteressant, eben bedeutungslos, weil die genannte Isomorphiebedingung zwischen den Sätzen des Systems und den entsprechenden „Aussagen" über Walter, Sophie und ideologisch nicht besteht.

Zu beachten ist: Die Sätze eines formalen Systems, obgleich sie ursprünglich ohne Bedeutung sind – sie sind bestimmt konstruierte Zeichenfolgen –, nehmen also bei einer gut gewählten Interpretation eine Bedeutung an. Diese Bedeutung ist aber vorerst rein passiv. D. h. einer als wahr eingestuften Aussage der Additionstheorie mit natürlichen Zahlen, etwa der Aussage „2 + 3 + 4 = 9" könnte über die Umkehrung von I_1 etwa der Ausdruck „iipiiipiiiigiiiiiiii" zugeordnet werden, der aber offensichtlich kein Satz unseres oben definierten (g,i,p)-Systems ist. Die durch die Regeln (R1) und (R2) strikt gegebene Formalitätsbedingung muss auf jeden Fall eingehalten werden. Betrachten wir noch eine dritte Interpretation.

I_3:	Zeichen des Systems	• •	Ausdrücke der Arithmetik (Interpretationsraum)
	p		gleich (=)
	g		weggenommen von
	i		1
	ii		2
	iii		3
	. . .		. . .
	usw.		usw.

Nun wird also z. B. der richtige Satz „iipiiigiiiii" unseres Systems wie folgt interpretiert: „2 = 3 weggenommen von 5", eine wahre Aussage der Zahlentheorie. Man zeigt leicht, dass unser System auch bei dieser Interpretation I_3 eine Bedeutung hat, weil allen richtigen Sätzen des Systems auch wahre Aussagen der Zahlentheorie entsprechen.

Ein Kalkül kann also verschiedene Bedeutungen haben, je nach Interpretation; eine Interpretation eines Kalküls ist dann bedeutungstragend, wenn sie auf Grund der Isomorphiebedingung ein Wissen, eine Theorie über einen Teil der (wirklichen) Welt widerspiegelt. – Nun gibt es folgende zwei interessante Aufgaben:

(A1) Zu einem gegebenen formalen System K ist eine bedeutungstragende Interpretation I zu finden, so dass die dadurch interpretierten Sätze von K wahren Aussagen des Interpretationsraumes entsprechen.
(A2) Zu einer gegebenen Theorie T (d. h. einer geordneten, wissenschaftlichen Kenntnis über einen Teil der Wirklichkeit) ist ein formales System K aufzustellen, dessen Sätze genau den wahren Aussagen der gegebenen Theorie T (den Theoremen) entsprechen.

Bei (A1) handelt es sich also darum, eine bedeutungstragende Interpretation eines (an sich bedeutungsleeren, rein formal konstruierten) Systems zu finden, vergleichbar mit dem Knacken eines Codes, mit der Entschlüsselung einer Geheimsprache. In (A2) hingegen sucht man die Formalisierung einer Theorie. – Schematisch dargestellt:

(A1) Zu einem Kalkül K ist eine Interpretation

I: Zeichen von K • • Interpretationsraum

gesucht, so dass gilt: Ist s* ein Satz in K (d.h. formal richtig), so ist seine Interpretation I(s*) wahr. Ein solcher Kalkül K heisst *widerspruchsfrei.*
(A2) Zu einer Theorie T ist eine Formalisierung

F: Grundbegriffe von T • • Zeichen von K

gesucht, so dass gilt: Ist t ein Theorem von T, so ist seine Formalisierung F(t) ein Satz in K oder: Ist t wahr, so ist seine Formalisierung in K formal richtig. Ein solcher Kalkül heisst *vollständig*.

Damit haben wir zwei wichtige Eigenschaften von K bezüglich einer Interpretation definiert, die im folgenden zu beachten sind.

Aus dem Gesagten sieht man den Zusammenhang zwischen richtig und wahr, zwischen der formalen Richtigkeit einer Formel (eines Wortes) in einem Kalkül und der Wahrheit, der Gültigkeit einer Aussage in einer Theorie. Dieser Zusammenhang hängt von der Frage nach Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit eines Kalküls bezüglich gewisser Interpretationen ab.

3. Geschichtliches bis HILBERT

All das ist nicht so weltfremd, wie es in dieser relativ abstrakten Darstellung vielleicht erscheinen mag. Besonders hat das Problem der Formalisierung (A2) denkende Menschen von alters her fasziniert. Und es muss eine gewaltige Entdeckung gewesen sein, dass bestimmte Vorgänge, bestimmte zusammenhängende Erkenntnisse *formalisiert* werden konnten; dass zu verschiedenen Gebieten des menschlichen Wissens – wo es doch um *Wahrheit* geht – entsprechende (eben isomorphe) formale Systeme konstruiert werden konnten, in denen die formalisierten wahren Aussagen formal, d. h. rechnerisch auf Richtigkeit überprüft werden konnten.

Die bekanntesten Beispiele der Antike sind die von ARISTOTELES (fast vollständig) formalisierte *Syllogistik*, die eine neuartige Weiterentwicklung in der Scholastik fand, und die *Geometrie*, die von EUKLID formal beschrieben wurde; seine Formalisierung hat im 19. Jahrhundert noch zu interessanten mathematischen Theorien geführt.

Diese zwei Leistungen waren so gekonnt und beeindruckend, dass – um ein Wort von KANT anzuwenden und auszuweiten – weder die Logik noch die Geometrie bis zum Ende des 18. Jahrhunderts „keinen Schritt rückwärts (haben) tun dürfen, (aber) . . . auch bis jetzt keinen Schritt vorwärts (haben) tun können“[1].

[1] Immanuel KANT, Kritik der reinen Vernunft B 7f.

Im 17./18. Jahrhundert haben PASCAL und LEIBNIZ versucht, die Prozesse beim folgerichtigen Denken zu mechanisieren; aus jener Zeit stammen erste eigentliche *Rechenmaschinen* (natürlich noch mit kompliziertem Zahnräderwerk, ähnlich einer astronomischen Uhr). Die Voraussetzung zu jeder Art solcher „Denkmaschinen“ ist die Möglichkeit, bestimmte Abläufe zu formalisieren, sie in einem Kalkül zu beschreiben (wir sind also wieder beim Thema). Ist ein solcher Kalkül einmal gefunden, so wird er isomorph auf eine Maschine übertragen: mechanisch, pneumatisch, elektrisch oder elektronisch – je nach dem Stand der Technik.

Eine Neuentdeckung der Formalisierung – und damit der formalen Richtigkeit – gab es im 19. Jahrhundert; das war ein eigentlicher Boom. George BOOLE veröffentlichte 1847 einen Artikel über „A Calculus of Deductive Reasoning“ und 1954 ein Buch über „The Laws of Thought“. Zur selben Zeit hat Augustus DE MORGAN mit seiner „Formalen Logik“ 1847 einen bedeutenden Beitrag zur Entwicklung von *Logik-Kalkülen* geleistet.

Die Aussagenlogik wurde 1879 von Gottlob FREGE formalisiert dargestellt; um die Wende vom 19. zum 20. Jahrhundert haben Giuseppe PEANO die *Arithmetik* und David HILBERT die *Geometrie* neu formalisiert.

Bei diesen Untersuchungen zeigte sich immer mehr, wie nötig es war, die Frage zu klären, was man unter einem *Beweis* genau zu verstehen hatte. Ein Beweis ist – das wusste man seit dem griechischen Altertum – eine rationale Begründung für die Geltung einer Behauptung (einer Aussage, eines Theorems) innerhalb einer Theorie. Man geht dabei bekanntlich von bereits begründeten oder einsichtigen oder einfach angenommenen Aussagen aus (sie heissen Prämissen) und zeigt, wie die zu beweisenden Aussagen aus diesen Prämissen „logisch folgen“ – wie man sagt.

Seit ARISTOTELES und der Stoa wurden gewisse logische Schlussverfahren formalisiert durchgeführt; aber im allgemeinen wurden die Beweise – auch in formalen Wissenschaften wie der Mathematik – inhaltlich geführt, waren Schritt für Schritt mit vielen Assoziationen verbunden und oft den Doppeldeutigkeiten der Umgangssprache ausgeliefert.

Das Problem eines exakten Beweisverfahrens wurde gerade um die Wende des 19. zum 20. Jahrhundert sehr brisant. Georg CANTOR hatte in den achtziger Jahren die *Mengenlehre* entwickelt, die für die Mathematik ganz neue Horizonte eröffnete: mit dieser Theorie hatten alle mathematischen Disziplinen auf einen Schlag eine gemeinsame Grundlage gefunden.

Aber was für ein Schock; in dieser eleganten und präzise formulierten Theorie, die so vieles versprach, entdeckte man schon bald unerwartete *Paradoxien*: innere Widersprüche, die sich gerade aus den klaren Formulierungen „logisch ergaben". War die Mengentheorie also nicht widerspruchsfrei? Oder waren logische Fehler unterlaufen?

Ein neuer Wissenschaftszweig entstand: die *Metamathematik*, vielleicht zu umschreiben als systematische Untersuchung des Beweises. Man wollte alle allgemein akzeptierten Methoden logischen Denkens – zumindest soweit sie sich auf die Mathematik bezogen – vollständig kodifizieren und untersuchen und begründen.

Im Sinne dieser Herausforderung ist die „Summe rationaler Begründung", das monumentale Werk „Principia Mathematica" (PM) von Alfred N. WHITEHEAD und Bertrand RUSSEL, 1910 bis 1913 entstanden mit der kühnen Ambition, die ganze Mathematik aus der Logik abzuleiten (Logizismus).

Der schon erwähnte grosse Mathematiker und Metamathematiker David HILBERT führte die Herausforderung des Formalismus auf die Spitze, indem er als konsequenter Formalist u. a. folgendes verlangte: Es soll streng – d. h. mit den Methoden der „Principia Mathematica" – bewiesen werden, dass das in den PM aufgestellte System widerspruchsfrei und vollständig sei. Damit war die geniale Hoffnung verbunden: Angenommen die PM wären vollständig, dann hätte man z. B. ein Entscheidungsverfahren für die ganze Zahlentheorie: jedes zahlentheoretische Problem könnte formal (also rechnerisch, ja mechanisch) gelöst werden. Noch 1930 sagte HILBERT in einem berühmt gewordenen Vortrag: „In der Mathematik gibt es kein *ignorabimus* . . . Wir müssen wissen, wir werden wissen". D. h.: Fragen, die wir innerhalb eines Kalküls der Mathematik stellen und heute noch nicht mit ja oder nein beantworten können, wären also nur vorläufig offen; jede sinnvolle Behauptung in einem ordentlichen Kalkül wäre also entscheidbar. – Das war 1930.

4. Der Bruch durch GÖDEL

Im darauffolgenden Jahr erschien in den „Monatsheften für Mathematik und Physik“ ein 25-seitiger Aufsatz von Kurt GÖDEL, der alle diese Hoffnungen (Ambitionen) zunichte machte: „Über formal unentscheidbare Sätze der PM und verwandter Systeme“[2]. Darin zeigt der Autor – und zwar mit eben den Methoden der PM (wie HILBERT das explizit erwartete) – folgendes:

- Im System der PM gibt es nicht zu reparierende Löcher.
- Es gibt überhaupt KEIN formales System, in dem alle wahren Aussagen der Zahlentheorie (geschweige denn anderer, komplexerer Wissenschaften) entscheidbar sind, ausser es sei nicht widerspruchsfrei.
- Falls es einen Beweis der Widerspruchsfreiheit des Systems der PM gäbe, dann wäre PM selbst nicht widerspruchsfrei.

Etwas anders formuliert:

Erster GÖDELscher Satz (Unvollständigkeits-Satz): Jeder widerspruchsfreie Kalkül K, der es erlaubt, von den natürlichen Zahlen zu reden (1), enthält Zeichenketten (Wörter), die in K nicht entscheidbar sind (2). K ist also unvollständig.

Erläuterungen:

(1) D.h. im Kalkül K lässt sich die elementare Arithmetik formalisieren.
(2) Gödel gelang es, eine solche Zeichenkette anzugeben, zu konstruieren. Es ist die Formalisierung etwa der folgenden Aussage g der Arithmetik: „Die Formalisierung F(g) ist nicht herleitbar“ (oder ist nicht formal richtig).

[2] Monatshefte für Mathematik und Physik 38 (1931) 173–198.

Zweiter GÖDELscher Satz:

Für jeden derartigen Kalkül K lässt sich seine Widerspruchsfreiheit nie mit den blossen Mitteln des Kalküls selbst beweisen.

Das heisst also: Widerspruchsfreiheitsbeweise sind zwar möglich, aber man braucht dazu ein stärkeres formales System; und für das dafür verwendete System gilt wieder dasselbe. Ein „absoluter" Widerspruchsfreiheitsbeweis der Mathematik würde folglich einen *regressus ad infinitum* verlangen und ist daher nicht durchführbar.

5. Die Grenzen des Formalen

5.1 Einige *Feststellungen* kurz gefasst:

– In der Mathematik (und damit in anderen Wissenschaften) wird es immer unentscheidbare Fragen geben.
– Die Wahrheit erschöpft sich nicht im Beweisbaren, im Berechenbaren, im formal Richtigen.
– Unsere rationale Fähigkeit zu Lösungen reicht nicht so weit wie unsere Fragen.
– (Mathematische) Wahrheit reicht weiter als das Konstruktionsvermögen des menschlichen Denkens.
– Mit formaler Richtigkeit kann die Wahrheit nicht ausgeschöpft werden; die Wahrheit kann nie ganz auf blosse Richtigkeit zurückgeführt werden.
– Die Ambition des Formalismus („In der Mathematik gibt es kein *ignorabimus*") war eine Illusion.

5.2 Einige *Folgerungen*:

– Durch die GÖDELschen Sätze wird mit Methoden, die dem Formalismus selbst eigen sind und deshalb Anerkennung finden, dem Formalismus eine grundsätzliche, wenn auch nicht methodische, so doch erkenntnistheoretische Grenze gesetzt. D. h.: nicht die Methode des Formalismus, aber der erkenntnistheore-

tische Anspruch des Formalismus und damit des Rationalismus wird in Frage gestellt[3].
- „Bis zu GÖDELs Entdeckung konnte man sich der Hoffnung hingeben, die totale Formalisierung der (entsprechend formulierten) wissenschaftlichen Erkenntnisse eines Tages zu verwirklichen. Diese Möglichkeit ist nun endgültig vorbei . . . Es wird nie gelingen, ein total reflektierendes System zu konstruieren oder formal dessen Widerspruchsfreiheit zu beweisen. Man wird immer auf einen logisch vorausliegenden, nicht formalisierbaren Rest angewiesen sein . . . GÖDEL hat somit exakt bewiesen, dass es keine totale Exaktheit gibt, dass es kein in sich selbst geschlossenes System . . . gibt und dass die exakte Methode nicht ausreicht, sich selbst zu begründen“[4]. Es gibt also kein System, das (rein) rational die gesamte Wirklichkeit erfassen und erklären könnte; die gesunde Skepsis gegen philosophische Systembildung (das *more geometrico*) ist also echt begründet.
- Diese und ähnliche verblüffende Folgerungen aus den zwei GÖDELschen Sätzen haben verschiedene Leute bewogen, daraus zu schliessen, dass die menschliche Intelligenz jedem rein formalen Denken und damit auch jedem Computer überlegen sei: „GÖDELs Satz scheint zu beweisen, dass der Geist nicht als Maschine zu erklären ist; dank GÖDELS Satz hat der Geist immer das letzte Wort“[5]. Der Mensch „ist immer grösser als jede seiner Methoden. Er kann immer mehr leisten als das noch so weit entwickelte Gefüge seiner Verhältnisweisen“[6].

Das mag sein, darf aber nicht vorschnell aus den GÖDELschen Sätzen gefolgert werden. Zwei Dinge sind m. E. zu bedenken:

1. Die menschliche Geistestätigkeit ist wesentlich an die Vernunft gebunden; menschliches Erkennen und Verstehen ist – gerade insofern es rational begründbar sein will – nie rational abgeschlos-

[3] Vgl. REICHEL, Mathematik und Weltbild (unten Literaturhinweise) 13–16.
[4] ROHRER, Entmythologisierung (unten Literaturhinweise) 180–182.
[5] Z. B. HOFSTADTER, Gödel, Escher, Bach (unten Literaturhinweise) 504f.
[6] ROHRER, Entmythologisierung (unten Literaturhinweise) 182.

sen. D. h.: Durch die GÖDELschen Sätze wird der Mensch auf eine Grenze seines eigenen systematisierenden, konstruierenden, wissenschaftlich tätigen Geistes aufmerksam, auf eine Grenze, die grundsätzlich ist[7].

2. Für die Überlegenheit der menschlichen Intelligenz muss ein Mass angegeben werden. Das könnte z. B. die Fähigkeit sein, die Gödelisierung an einem formalen System durchzuführen. Man kann einfach zeigen, dass es so grosse, so komplexe formale Systeme gibt, dass kein Mensch mehr deren Gödelisierung durchzuführen imstande ist. Kurz gesagt: die Beschränktheit der menschlichen Intelligenz ist gerade durch die Gebundenheit an die *ratio*, die Vernunft, gegeben. Nur der reine Geist, der reine *intellectus*, der reine Verstand, ist jeder Unvollständigkeit und damit jedem formalen System überlegen: Der reine Geist braucht keine Vernunft; der reine Verstand allein genügt ihm, alles durch und durch und zudem ganz zu verstehen[8].

Literaturhinweise

1. Wolf ROHRER, Zur Entmythologisierung des exakten Beweises, in: Orientierung 29 (1965) 179–183.

2. Douglas R. HOFSTADTER, Gödel, Escher, Bach – ein endloses geflochtenes Band (Stuttgart 1985).

3. Hans-Christian REICHEL / Enrique PRAT DE LA RIBA, Naturwissenschaft und Weltbild. Mathematik und Quantenphysik in unserem Denk- und Wertesystem (Wien 1992), vor allem die Artikel:
Hans-Christian REICHEL, Mathematik und Weltbild seit Kurt Gödel, in: ebd. 9–29.
Antoine SUAREZ, Unentscheidbarkeit, Unbestimmtheit, Nicht-Lokalität. Gibt es unverfügbare Kausalverbindungen in der physikalischen Wirklichkeit?, in: ebd. 223–264, bes. 223–232.

4. Dieter HATTRUP, Einstein und der würfelnde Gott. An den Grenzen des Wissens in Naturwissenschaft und Theologie (Freiburg / Basel / Wien 2001), bes. Abschnitt 2.

[7] Vgl. ebd. 182.
[8] Vgl. THOMAS VON AQUIN, Sth I q. 14 a. 7.

Stammbaum-Methode ("Bottom-up")

Man erzeugt systematisch alle Sätze nach den Regeln
(R1) <durch ⇢ angedeutet> resp.
(R2) <durch → angedeutet>
und ordnet sie nach ihrer Länge.

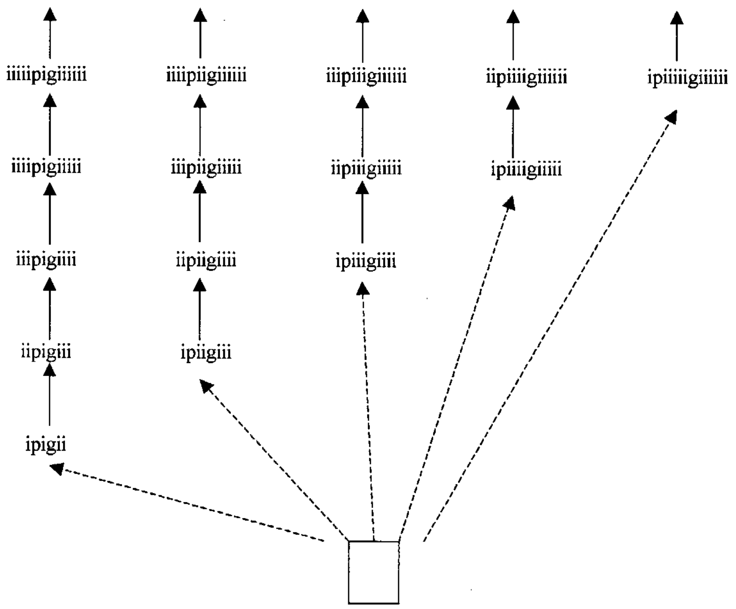

Abbildung 1 zu (E21)

Rückführungsmethode ("Top-down")

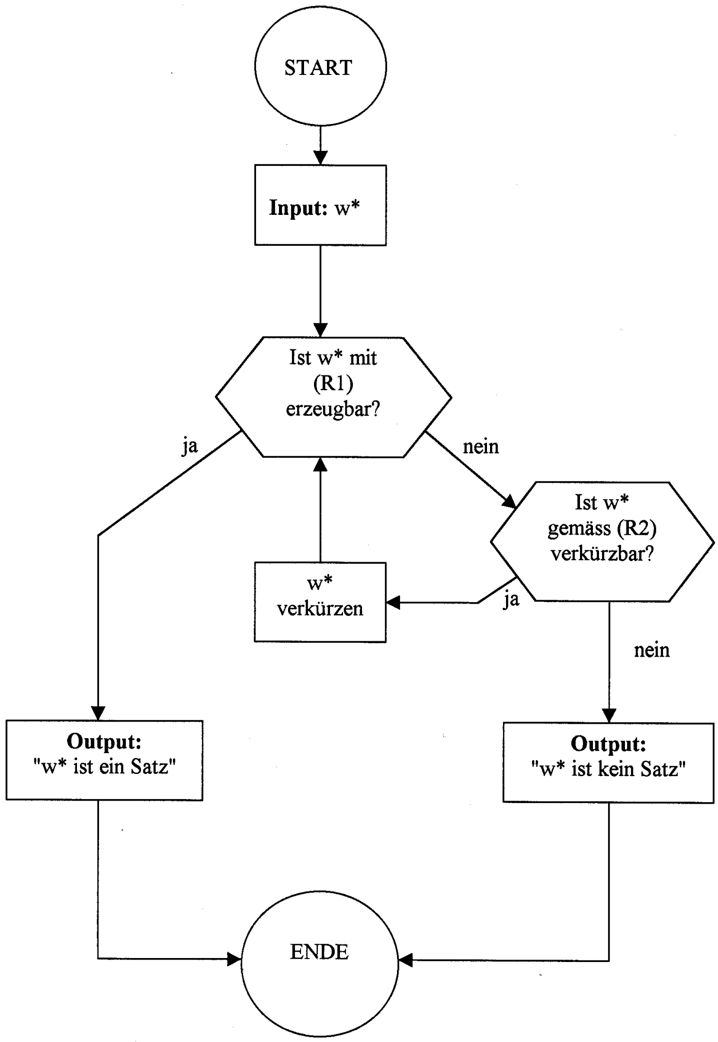

Abbildung 2 zu (E22)